

СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН С МАКСИМАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ

ДОЛЖИКОВ В.В.

Рассмотрена задача статистического синтеза непрерывной линейной антенны с максимальным средним КУ. Получены выражения для максимально достижимого среднего коэффициента усиления и оптимального АФР. Показано, что для достаточно большой области значений параметров флуктуаций, возможен эффект сверхусиления.

Введение

Известно, что у антенны конечных размеров можно получить неограниченно большой коэффициент направленного действия (КНД) путем создания быстроосциллирующего амплитудно-фазового распределения (АФР) тока. Это явление получило название эффекта сверхнаправленности (СН). В отличие от КНД величина коэффициента усиления (КУ) таких сверхнаправленных антенн оказывается весьма малой. В реальных антеннах помимо тепловых потерь, как правило, имеют место флуктуации амплитуды и фазы тока. Наличие последних хотя и может приводить к значительному в среднем снижению КНД [1], но при определенных условиях все-таки допускает реализацию умеренной СН [2]. В какой мере присутствие флуктуаций снижает КУ и какова при этом величина максимального коэффициента усиления, остается неясным. В связи с этим требуется более детальное изучение вопроса о предельно достижимой величине КУ реальных антенн (антенн с тепловыми потерями и флуктуациями АФР).

В работе проводится решение задачи синтеза линейной антенны по критерию максимума КУ, в которой наличие флуктуаций учитывается на этапе постановки, т.е. рассматривается задача синтеза линейной антенны с максимальным средним КУ. Анализ полученного в явном виде решения для случая малых потерь и флуктуаций позволил выяснить причину, приводящую, в отличие от КНД, к ограниченному значению максимального КУ, а также роль флуктуаций и степень их влияния на снижение среднего КУ по сравнению со случаем, когда они отсутствуют. Получен критерий, дающий возможность определить, в каких случаях преобладающее влияние на снижение КУ оказывают потери, а в каких – флуктуации. Показано, что и при наличии флуктуаций возможен режим сверхусиления (СУ), т.е. КУ, даже средний, может превышать коэффициент усиления равномерно возбужденной антенны.

1. Постановка и общее решение задачи

Рассмотрим линейную антенну (линейную систему непрерывно распределенных и одинаково ориентированных источников) длиной L . Амплитудно-фазовое распределение источников в антен-

не реализуется со случайными фазовыми ошибками, характеризуемыми случайной функцией $\varphi(x)$. Множитель системы запишем в следующем виде:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 A_0(x) e^{i[\varphi(x)+kx]} dx, \quad (1)$$

где $A_0(x)$ – функция, описывающая амплитудно-фазовое распределение в отсутствие флуктуаций; $x = 2z/L$ – безразмерная продольная координата; $u = (\pi L/\lambda) \sin \theta = a \sin \theta$ – обобщенный угол; θ – угол, отсчитываемый от нормали к оси антенны.

Будем считать, что $\varphi(x)$ – нормально распределенная однородная случайная функция с нулевым средним значением, дисперсией $\sigma^2(x) = \alpha = \text{const}$ и корреляционной функцией, зависящей только от разности координат. Коэффициент корреляции выберем в гауссовой форме. Средний коэффициент усиления в направлении u_0 определим следующим соотношением:

$$\bar{G}(u_0) = 2a \frac{|f(u_0)|^2}{P_{\Sigma} + P_{\Pi}}, \quad (2)$$

черта означает знак усреднения, P_{Σ} и P_{Π} – мощности излучения и потерь соответственно.

Задача максимизации среднего КУ формулируется следующим образом: определить номинальное АФР – $A_0(x)$, реализация которого с заданными фазовыми ошибками обеспечивает максимум среднего КУ – $\bar{G}(u_0)$.

Представим $A_0(x)$ в виде разложения по полной ортонормированной системе собственных функций преобразования Фурье в конечных пределах

$$[3] \left\{ \Psi_n(a, ax) \right\}_{n=0}^{\infty} :$$

$$A_0(x) = \sum_n^{N_{\max}} b_n \Psi_n(a, ax). \quad (3)$$

Функции $\Psi_n(a, ax)$ связаны с вытянутыми угловыми сфероидальными функциями (ВУСФ) соотношением

$$\Psi_n(a, ax) = \frac{\sqrt{\lambda_n(a)}}{\sqrt{a \cdot k_n(a)}} S_{0n}(a, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (4)$$

где $\lambda_n(a)$ – соответствующие $\Psi_n(a, ax)$ собственные значения, которые являются вещественными положительными числами, перенумерованными так, что $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > 0$, $k_n(a)$ – коэффициент, определяемый из условия нормировки ВУСФ:

$$k_n^2(a) = \int_{-1}^1 S_{0n}^2(a, x) dx. \quad (5)$$

Слагаемые в (3) можно рассматривать как пространственные гармоники АФР тока, каждая из

которых формирует свою парциальную ДН. Для гармоник с $n \leq 2a/\pi$ максимумы парциальных ДН лежат в видимой области углов, поэтому их обычно [4] называют активными. Гармоники с $n > 2a/\pi$ получили название реактивных, так как максимумы их парциальных диаграмм направленности (ДН) расположены в области мнимых углов.

Величина N_{\max} в формуле (3) может принимать любое сколь угодно большое значение, в том числе и ∞ . Вопрос о выборе конкретного значения N_{\max} более детально обсуждается в следующем разделе.

Подставляя (3) в (1) и вычисляя затем $\overline{P_{\Sigma}}$ и $\overline{P_n}$, для $\overline{G}(u_0)$ получаем выражение в виде отношения двух квадратичных форм:

$$\overline{G}(u_0) = 2a \frac{\mathbf{a}^* (\mathbf{w}\mathbf{w} + \alpha\mathbf{Q}) \mathbf{a}}{\mathbf{a}^* (\mathbf{L}_{\chi} + \alpha\mathbf{B}_{\chi}) \mathbf{a}}. \quad (6)$$

Здесь * - знак транспонирования и комплексного сопряжения; \mathbf{a} - вектор-столбец неизвестных коэффициентов, связанных с коэффициентами разложения $A_0(x)$ следующим соотношением: $\mathbf{a}_n = i^n \sqrt{\lambda_n(a)/2\pi a} \cdot \mathbf{b}_n$, \mathbf{W} - вектор-столбец с элементами $\Psi_n(a, u)$,

$$\mathbf{L}_{\chi} = \mathbf{L} + \chi\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_{\chi} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha^{p-1}}{p!} \cdot (\mathbf{J}^{(p)} + \chi\mathbf{E}),$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha^{p-1}}{p!} \cdot \mathbf{I}^{(p)},$$

где \mathbf{E} - единичная матрица; \mathbf{L} - диагональная матрица с элементами $\lambda_n(a)$; $\mathbf{I}^{(p)}, \mathbf{J}^{(p)}$ - квадратные симметрические матрицы с элементами

$$I_{nm}^{(p)}(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i^{m-n}}{k_n(a) \cdot k_m(a)} \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_{0n}(a, x) S_{0m}(a, x_1) * \frac{p(x-x_1)^2}{c^2} + i u (x-x_1) dx dx_1, \quad (7)$$

$$J_{nm}^{(p)} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i^{m-n}}{k_n(a) \cdot k_m(a)} \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_{0n}(a, x) S_{0m}(a, x) * \frac{\sin a(x-x_1)}{x-x_1} \frac{p(x-x_1)^2}{c^2} dx dx_1. \quad (8)$$

В (4-6) α - дисперсия фазовых флуктуаций; c - радиус корреляции в относительных единицах, связанный с абсолютным радиусом корреляции соотношением $c = 2\rho/L = 2\pi\rho/a\lambda$; $\chi = R_{\Pi}/60\pi a$ - параметр, характеризующий величину потерь; R_{Π} - полное сопротивление тепловых потерь антенны.

Таким образом, синтез антенны с максимальным средним КУ сводится к задаче максимизации

по вектору \mathbf{a} отношения двух квадратичных форм (6). Решение ее может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{a}^{(p)} = \mathbf{a}^{(0)} + \sum_{q=1}^p \alpha^q \frac{\left[(\mathbf{L}_{\chi} + \alpha\mathbf{B}_{\chi})^{-1} \mathbf{Q} \right]^q \mathbf{a}^{(0)}}{\mu_{p-1}^q}, \quad (9)$$

$$\overline{G}_{\max}^{(p)} = 2a \mu_p = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{a}^{(p)}, \quad (10)$$

где $\mathbf{a}^{(0)} = (\mathbf{L}_{\chi} + \alpha\mathbf{B}_{\chi})^{-1}$ - начальное приближение, p - номер приближения.

В случае малых потерь и малых флуктуаций ($\chi \ll 1, \alpha \ll 1$), ограничиваясь в числителе и знаменателе (9), (10) членами первого порядка малости по α и χ , можно получить

$$\frac{\overline{G}_{\max}}{2a} = \sum_{n=0}^{N_{\max}} \frac{\psi_n^2(a, u_0)}{\lambda_n + \chi + \alpha J_{nn}(a, c)} = \sum_{n=0}^{N_{\max}} (a_n \cdot \psi_n); \quad (11)$$

$$a_n = \frac{\psi_n(a, u_0)}{\lambda_n + \chi + \alpha J_{nn}(a, c)}, \quad b_n = i^{-n} \sqrt{\frac{2\pi a}{\lambda_n}} a_n. \quad (12)$$

Заметим, что слагаемые в знаменателе (11) и (12) имеют вполне определенный физический смысл: $\lambda_n(a)$ - с точностью до постоянного множителя равно мощности излучения n -й гармоники АФР с единичной амплитудой; c - с той же точностью её мощности омических потерь; $\alpha J_{nn}(a, c)$ - мощности, сосредоточенной в фоне излучения, обусловленном фазовыми флуктуациями, которую назовем мощностью флуктуационных потерь n -й гармоники. Свойства $J_{nn}(a, c)$ подробно исследованы в [5].

2. Анализ решения. Численные результаты

Рассмотрим антенну нормального излучения ($u_0 = 0$) и перепишем (11) в следующем виде:

$$\frac{\overline{G}_{\max}}{2a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{S_{0n}^2(a, 0)}{k_n^2(a)} \cdot \left[1 + \frac{\chi + \alpha J_{nn}(a, c)}{\lambda_n(a)} \right]^{-1} + \frac{1}{a} \sum_{n=N_0+2}^{N_{\max}} \frac{S_{0n}^2(a, 0)}{k_n^2(a)} \cdot \left[1 + \frac{\chi + \alpha J_{nn}(a, c)}{\lambda_n(a)} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Здесь первая сумма описывает вклад активных, а вторая - реактивных гармоник в \overline{G}_{\max} . При $\chi = 0, \alpha = 0$; $\chi = 0$; $\alpha = 0$ формула (13) переходит в выражения для максимального КНД в отсутствие флуктуаций - D_{\max} , для максимального среднего КНД - \overline{D}_{\max} и максимального КУ - G_{\max} соответственно.

Соотношение (13) позволяет выяснить вопрос о предельной величине указанных параметров антенны.

Рассмотрим вначале случай, когда $\chi = 0, \alpha = 0$. Поскольку при значении $n > N_0 = (2a/\pi)$ величина

$$\frac{S_{0n}(a,0)}{k_n^2(a)} \leq \frac{2}{\pi} \text{ стремится к } \left(\frac{2}{\pi}\right) \text{ снизу при } n \rightarrow \infty [5],$$

то увеличение N_{\max} до бесконечности ведет к безграничному росту КНД, что соответствует известному явлению сверхнаправленности по КНД.

При наличии тепловых и флуктуационных потерь слагаемые, описывающие вклад n -й гармоники в \bar{G}_{\max} , из-за монотонного убывания $\lambda_n(a)$ (согласно [3], $(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \approx 10^{-1}$) монотонно убывают по величине. Тогда вторая сумма может быть оборвана на слагаемом с номером $n = N_{\max}$, определяемым в виде $\chi + \alpha J_{N_{\max} N_{\max}}(a,c) \geq 10\lambda_{N_{\max}}(a)$. Дальнейшее увеличение количества слагаемых не приведет к заметному увеличению суммы, а значит и \bar{G}_{\max} . Физически это означает, что поскольку с ростом номера реактивной гармоники уменьшается ее мощность излучения и возрастает мощность суммарных потерь, то ее "эффективность" с точки зрения увеличения усиления антенны уменьшается. Начиная с некоторого $n > N_{\max}$, эта "эффективность" настолько мала, что вклад соответствующей гармоники в увеличение максимального КУ становится пренебрежимо малым.

Более того, если обратиться к выражениям (12) для a_n и b_n , то можно увидеть, что в отличие от случая КНД с ростом номера n происходит уменьшение амплитуды реактивных гармоник. Так, если для КНД при $n > (2a/\pi)$ амплитуда b_n неограниченно растет:

$$b_n \approx \frac{S_{0n}(a,0)}{\sqrt{a} k_n(a)} \cdot \frac{1}{\lambda_n(a)} \rightarrow \infty, \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то при наличии потерь монотонно убывает, стремясь к пределу, определяемому величиной потерь:

$$b_n \approx \frac{S_{0n}(a,0)}{\sqrt{a} k_n(a)} \cdot \frac{1}{\chi + \alpha J_{nn}(a,c)} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \cdot \frac{1}{\chi}, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Соответствующая парциальная ДН при этом оказывает пренебрежимо малое влияние на результирующую оптимальную ДН, так как для $n \rightarrow \infty$

$$a_n \approx \frac{S_{0n}(a,0)}{\sqrt{a} k_n(a)} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_n(a)}}{\chi + \alpha J_{nn}(a,c)} \rightarrow 0.$$

Таким образом, при оптимизации реальной антенны по критерию максимума ее усиления происходит ограничение амплитуд "малоэффективных" реактивных гармоник, что фактически приводит к автоматическому обрыву ряда в разложении для АФР.

Из всего сказанного следует, что \bar{G}_{\max} не может принимать сколь угодно большое значение, а оптимальное распределение тока, соответствующее

еще \bar{G}_{\max} , будет более гладким, чем в случае D_{\max} , поскольку в его формировании эффективно участвует конечное число реактивных гармоник. В зависимости от величины χ и параметров флуктуаций основное ограничивающее воздействие будут оказывать либо тепловые потери, либо флуктуации.

В качестве критерия, определяющего, какой эффект (тепловые потери или присутствие флуктуаций) в основном ограничивает \bar{G}_{\max} , могут служить соотношения

$$\chi \gg \alpha J_{N_0+2, N_0+2}(a,c),$$

$$\chi \ll \alpha J_{N_0+2, N_0+2}(a,c).$$

При выполнении первого неравенства основную роль играют тепловые потери, а при выполнении второго – присутствие флуктуаций.

Приведенный анализ относится к предельно достижимой величине \bar{G}_{\max} , но его выводы в равной мере могут быть распространены на \bar{D}_{\max} и G_{\max} . Только в этих случаях нужно понимать под потерями либо флуктуационные, либо тепловые соответственно.

Рассмотрим более детально влияние параметров флуктуаций, величины потерь и длины антенны на \bar{G}_{\max} для антенны нормального излучения ($u_0 = 0$). Полагая, что $\alpha J_{nn}(a,c) \ll \lambda_n(a) + \chi$, и ограничиваясь членами первого порядка малости, из (11) для $u_0 = 0$ получаем:

$$\frac{\bar{G}_{\max}}{2a} = G_{\max} - \alpha \sum_{n=0}^{N_{\max}} \frac{\psi_n^2(a,0)}{\lambda_n(a) + \chi} \frac{J_{nn}(a,c)}{\lambda_n(a) + \chi}, \quad (14)$$

где G_{\max} – максимальный КУ антенны в отсутствие флуктуаций.

Из (14) следует, что \bar{G}_{\max} всегда меньше G_{\max} и снижение среднего КУ, описываемое вторым слагаемым, тем больше, чем больше величина дисперсии. Физически это понятно, так как все большая часть мощности каждой гармоники "идет" на флуктуационные потери (на создание слабо-направленного фона излучения, который не улучшает направленности антенны).

Зависимость \bar{G}_{\max} от радиуса корреляции c более сложная. Она представлена на рис. 1, где MG_{\max} – максимальное значение среднего КУ, G_0 – КУ антенны с равномерным амплитудным распределением при отсутствии флуктуаций. Согласно приведенным кривым имеется достаточно четко выраженный минимум \bar{G}_{\max} , лежащий в области значений параметра c , равных 0,2–0,5. С ростом величины c и дисперсии a этот минимум становится менее выраженным.

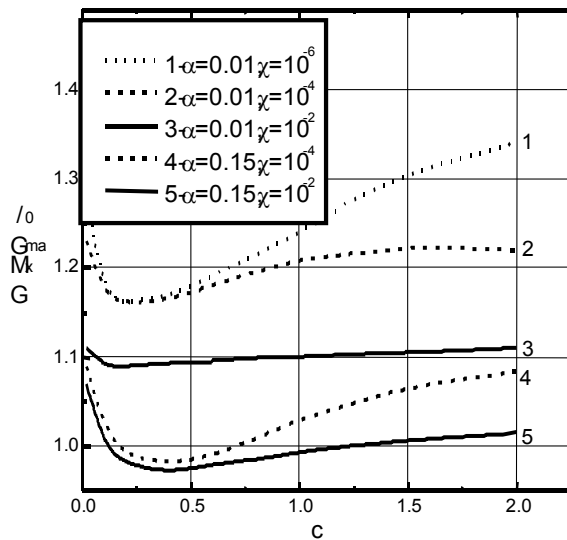


Рис. 1

Из рисунка следует, что при определенных значениях параметров флуктуаций $\left(\frac{\bar{G}_{\max}}{G_0}\right) > 1$ имеет место режим сверхусиления. Этот термин можно ввести по аналогии с термином сверхнаправленности при рассмотрении вопроса о максимальном КНД. Для антенны с длиной $L=3\lambda$ ($a=3\pi$) значения a и c , при различных c , для которых имеет место СУ, можно определить из рис. 2. Область значений a и c , все точки которой лежат

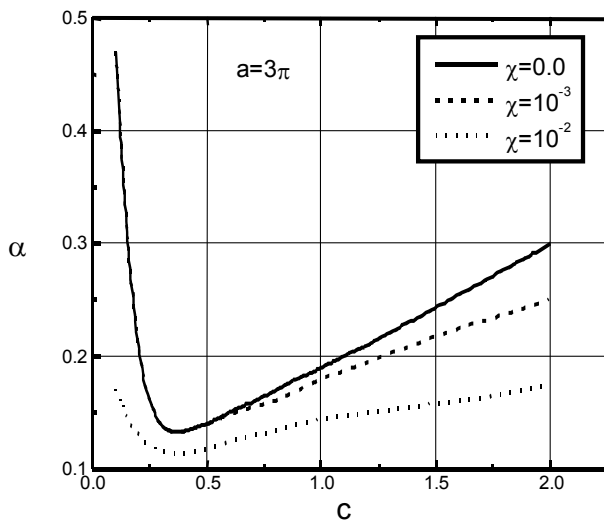


Рис. 2

ниже кривой, соответствующей определенному c , является областью a и c , допускающих сверхусиление в указанном выше смысле.

Предельно возможное значение максимального среднего КУ равно максимальному КУ в отсутствие флуктуаций (кривые 1 и 2 на рис. 3 для

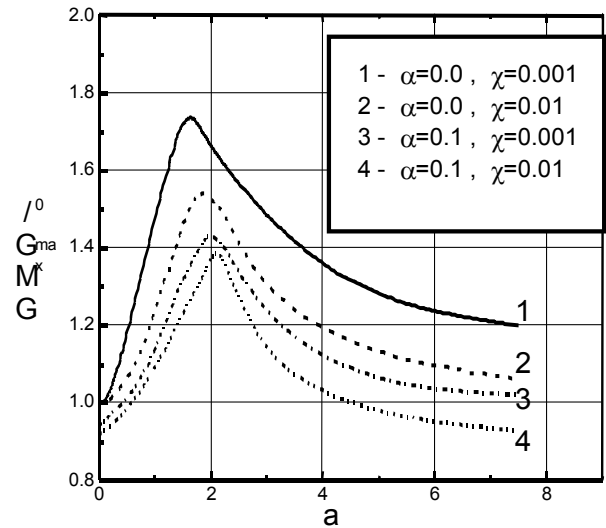


Рис. 3

$\chi = 0.01$ и $\chi = 0.001$ соответственно). Характерным для приведенных зависимостей является наличие максимума при определенной длине антенны, зависящей от χ и α . При увеличении или уменьшении длины, по сравнению с оптимальной, максимальный КУ стремится к G_0 , а при оптимальной, в зависимости от c , достигает величины (1.5-1.75) G_0 . С уменьшением c величина \bar{G}_{\max}/G_0 растет, стремясь к D_{\max}/D_0 . Наличие флуктуаций фазы, как отмечалось выше, приводит к снижению предельно возможного среднего КУ (кривые 3, 4 на рис. 3). Так, при $\rho/\lambda=0,6$ и $\chi=0,001$ снижение максимального среднего КУ равно примерно 20%.

Литература: 1. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. М: Сов. радио.- 1970.- 384 с. 2. Должиков В.В., Радченко В.Ю. Влияние случайных ошибок в антенне на ее предельный КНД // Радиотехника. Всес. межвед. науч.-техн. сб.- 1990.- Вып. 95.- Ч. 1, 2.- С. 92-109. 3. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике / Пер. и научн. обработка М.К. Размахнина, В.П. Яковлева М.: Сов.радио.- 1971.- 256 с. 4. Минкович Б.М., Яковлев В.П. Теория синтеза антенн. М: Сов. радио.- 1969.- 239 с. 5. Шифрин Я.С., Должиков В.В., Радченко В.Ю. Сверхнаправленность в статистической теории антенн / Харьк. ин-т радиоэлектроники, Харьков: 1988.- Деп. в УкрНИИТИ, № 86Ук 88.- 121 с.

Поступила в редколлегию 22.12.97

Должиков Владимир Васильевич, кан. физ.-мат. наук, доцент кафедры основ радиотехники ХТУРЭ. Адрес: 310086, Харьков, ул. 23 Августа, 29а, кв. 11, тел. 306-752, 409-430. Научные интересы: аналитические и численные методы в электродинамике, прямые и обратные задачи статистической теории антенн.