Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Багатоетапна транспортна задача
як модель динамічної системи
(тема)

Виконав:
студент _2_ курсу, групи _САУм-22-1
Стрекозов А.Д.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Наумейко І. В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ ____________ Сидоров М.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра прикладної математики
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ ____________
(підпис)
“_06_” _листопада_ 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Стрекозову Антону Дмитровичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Багатоетапна транспортна задача як модель динамічної системи

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1277 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи транспортна система з трьома джерелами і одержувачами та з двома проміжними хабами

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
   1. Системний аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання _6_ листопада 2023 р.

Студент ___________________________________
(підпис)

Керівник роботи __________________ доц. Наумейко І.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 61 с., 10 табл., 14 рис., 1 дод., 15 джерел.

БАГАТОЄТАПНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ОПТИМАЛЬНИЙ ШЛЯХ, ФУНКЦІЯ БЕЛЛМАНА, УГОРСЬКИЙ МЕТОД.

Об'єкт дослідження – багатоетапна транспортна задача.

Мета роботи – це побудова математичної моделі багатоетапної транспортної задачі, проведення системного аналізу логістичної проблеми та вибір методів її вирішення; формування змістовної показової задачі, аналіз результатів дослідження.

Методи дослідження – вибір та послідовне застосування угорського методу для вирішення транспортної задачі та методу Беллмана для багатоетапного процесу.

У результаті виконання кваліфікаційної роботи, після проведення системного аналізу та побудови моделі, вирішена багатоетапна транспортна задача та змістовна тестова задача.

З результатів дослідження були зроблені висновки про нездатність пошуку оптимального рішення сучасними методами при великої кількості етапів.

ABSTRACT

Introductory note: 61 pages, 10 tables, 14 figures, 1 appendix, 15 sources.

MULTIPLE TRANSPORTATION PROBLEM, MATHEMATICAL MODEL, OPTIMAL WAY, BELLMAN FUNCTION, HUNGARIAN METHOD.

Object of research – a multi-stage transport task.

Purpose of work – constructing a mathematical model of a multi-stage transport problem, performing analysis of logistical problem and selecting methods for its solution, the formation of a meaningful example problem, carrying out research results analysis.

Methods of research – selection and consequent application of the Hungarian method for the solution of the transport problem and the Bellman functions.

As a result of qualification work, after carrying out a systems analysis and constructing a model, the multi-stage transport task and meaningful test task were solved.

From the results of the study we made conclusions about the inability to search for an optimal solution by using modern methods whilst having a big number of iterations.

ЗМІСТ

С.

Вступ 8

1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження 10

1.1 Системний аналіз проблеми побудови моделі вирішення багатоетапної багатоетапної транспортної задачі 10

1.1.1 Вербальна модель системи 10

1.1.2 Морфологічний опис системи 11

1.1.3 Функціональна модель системи 11

1.1.4 Інформаційна модель системи 15

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми вибору комбінації методів для вирішення багатоетапної транспортної задачі 17

1.2.1 Модель аналізу проблеми 17

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів методом аналізу ієрархій 19

1.2.3 Модель вирішення проблеми 21

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі 21

1.3.1 Змістовна постановка задачі 21

1.3.2 Формальна постановка задачі 22

1.4 Постановка задач дослідження 23

2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання 25

2.1 Транспортна задача 25

2.1.1 Постановка транспортної задачі 25

2.1.2 Властивості транспортної задачі 27

2.1.3 Двохетапна транспортна задача 30

2.2 Угорський метод 37

2.2.1 Угорський метод для транспортної задачі 37

2.2.2 Опис алгоритму угорського методу 38

2.3 Функція Беллмана 43

Висновки за розділом 2 45

3 Програмна реалізація 46
Висновки за розділом 3 47
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз 48
Висновки за розділом 4 52
Висновки 53
Перелік джерел посилання 54
Додаток А Лістинг програми 56

ВСТУП

Актуальність теми. Під назвою «транспортна задача», або «Т-задача» поєднано широке коло задач з єдиною математичною моделлю. Дані задачі відносяться до класу задач лінійного програмування і легко можуть бути вирішенні симплекс методом. Проте матриця системи обмежень настільки своєрідна, що для її рішення розробили спеціальні, більш швидкі методи. Ці методи скінчені, як і симплекс метод, та дозволяють знайти опорне рішення, а далі, покращуючи його, отримати оптимальне рішення.

Якщо розглянемо реальну логістичну проблему то можемо побачити, що звичайна транспортна задача не реалізуєма у житті.

Коли формується маршрут у своїй повсякденності ми не враховуємо вимушені зупинки та розтрати на них. На маршруті частіше за усього є так звані «хаби». Навіть примітивні світлофори забирають час та бензин у машини, од же і гроші у водія. Тобто, щоб реально скористатися транспортною задачею її треба модифікувати з обліку її багатоетапності.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є проаналізувати існуючі алгоритми багатокрокових Т-задач та пристосувати до задачі метод динамічного програмування і з’ясувати його доцільність.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «багатоетапна Т-задача»;

– переконатися, що суми мінімальних «відстаней» між зупинками не завжди дадуть оптимальне рішення;

– обрати головний пріоритет (функцію цілі), тому що методи вирішення нерідко можуть дати не одну, а відразу декілька локальних відповідей;

– застосувати метод динамічного програмування і з’ясувати його переваги і вади.

Об'єктом дослідження є транспортна система з джерелами, утримувачами та проміжними терміналами с заданої ємності.

Предметом дослідження є Т-задача, яка є моделлю такої системи.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи системного аналізу та дослідження операцій. Чисельні розрахунки проведено за допомогою розробленої інтерактивної комп'ютерної програми.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [1].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми побудови процесу вирішення багатоетапної транспортної задачі

1.1.1 Вербальна модель системи

В якості основної системи розглянемо «Процес вирішення багатоетапної транспортної задачі».

Мета утворення системи яка зможе створити модель багатоетапної транспортної задачі і обрати для неї потенційно оптимальний метод вирішення.

Дану систему слід поділити на два етапи:

а) сформувати модель;

б) обрати оптимальний метод вирішення.

Ефективною систему «Процес вирішення багатоетапної транспортної задачі» слід вважати до тих пір поки кількість етапів буде меншою або дорівнювати десяти. Якщо етапів більше тоді вирішення цієї задачі, як динамічної транспортної задачі, не можна обрати як оптимальне.

Головний вихід системи – оптимальне рішення. Рішення буде оптимальним лише при даних граничних умовах та на моделі що була побудована.

На вхід системи подаються граничні умови до яких також входить головне обмежування – час або ціна перевезення.

Механізмами системи є математичний апарат (методи вирішення транспортної задачі та методи динамічного програмування), кількість необхідних зупинок, а також ємність отримувачів, хабів на приймачів.

Керування системою на кожному етапі буде проведено дослідником, а також обраним програмним забезпеченням на етапах коли воно необхідно.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Головний вхід системи – граничні умову включає до себе багато факторів які можуть вплинути на побудову моделі та процес вирішення.

У даній моделі упускаються незначні з точки зору ймовірності фактори такі як затори або світлофори.

Модель типу «чорний ящик» акцентує увагу на взаємодії системи із зовнішнім середовищем як наведено на рисунку 1.1.

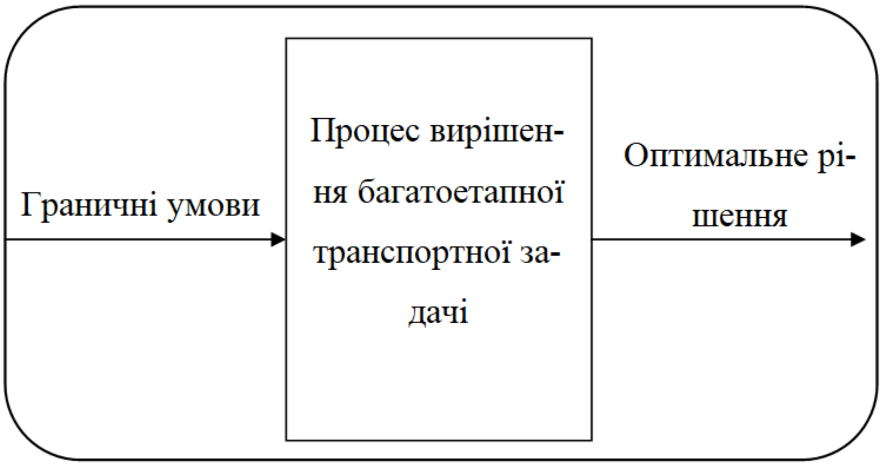

Рисунок 1.1 – Модель системи типу «чорний ящик»

1.1.3 Функціональна модель системи

Методологія IDEF0 представляє побудову ієрархічної системи діаграм – одиничних описів фрагментів системи. Спочатку проводиться опис системи в цілому і її взаємодії з навколишнім світом (контекстна діаграма), після чого проводиться функціональна декомпозиція – система розбивається на підсистеми і кожна підсистема розбивається на більш дрібні і так далі до досягнення потрібного ступеня уявлення

З рисунку 1.2 можна зауважити, що для системи «Процес вирішення багатоетапної транспортної задачі» були подані на вхід граничні умови, які дадуть змогу описати багатоетапну транспортну задачу; засобами керування є вибір шляхів, ємність та кількість проміжних вузлів; механізмами управління є програмне забезпечення та дослідник операцій та ЛПР; на виході ми отримаємо оптимальне рішення.

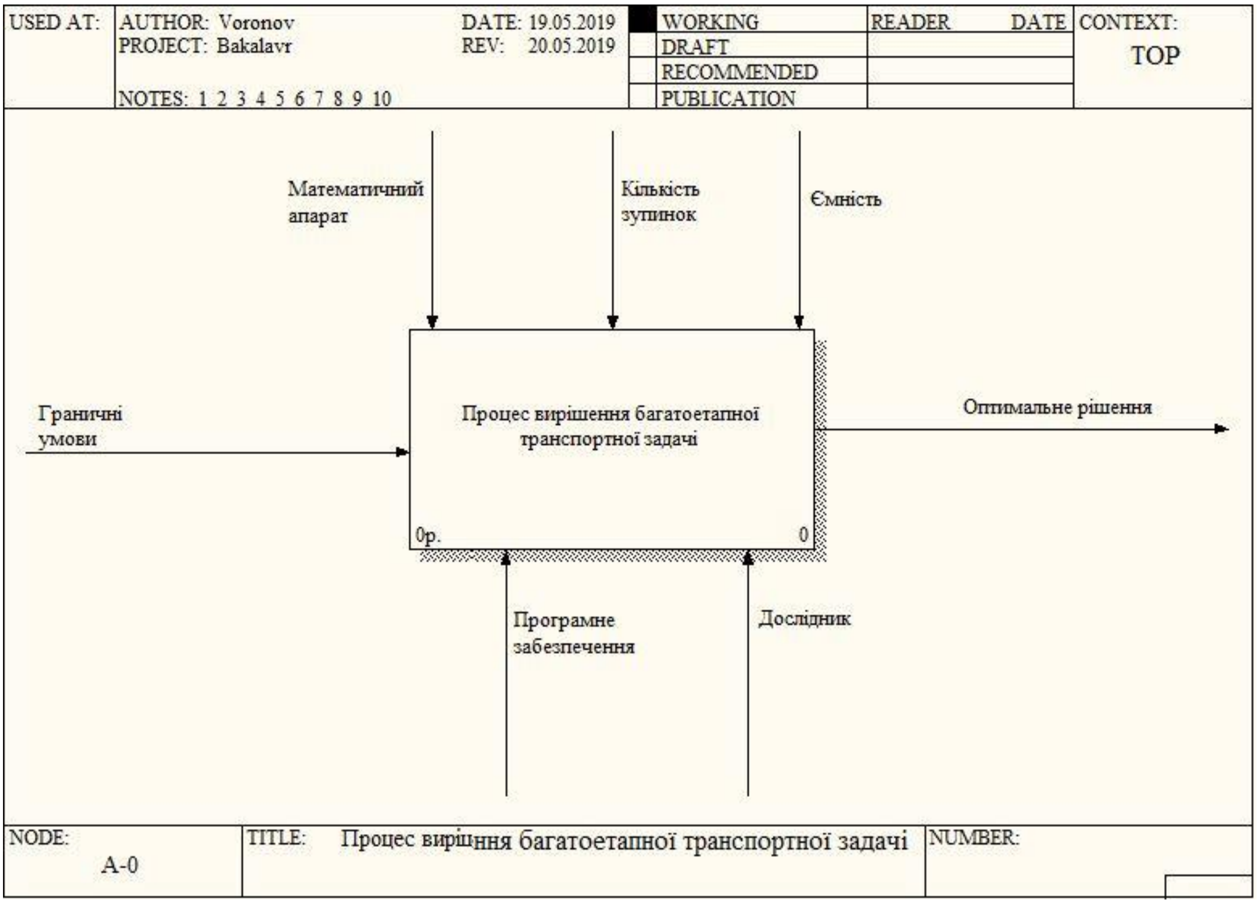

Рисунок 1.2 – Контекстна діаграма системи. Рівень A0

З рисунку 1.3 можна побачити що основна проблема розглядається в два етапи:

а) моделювання транспортної задачі – компіляція та модернізація початкових даних, що наведено на рисунку 1.4;

б) вибір та застосування метода рішення – обрати метод який дає найкраще рішення за нашою потребою (найшвидший, найдешевший або найточніший), що наведено на рисунку 1.5.

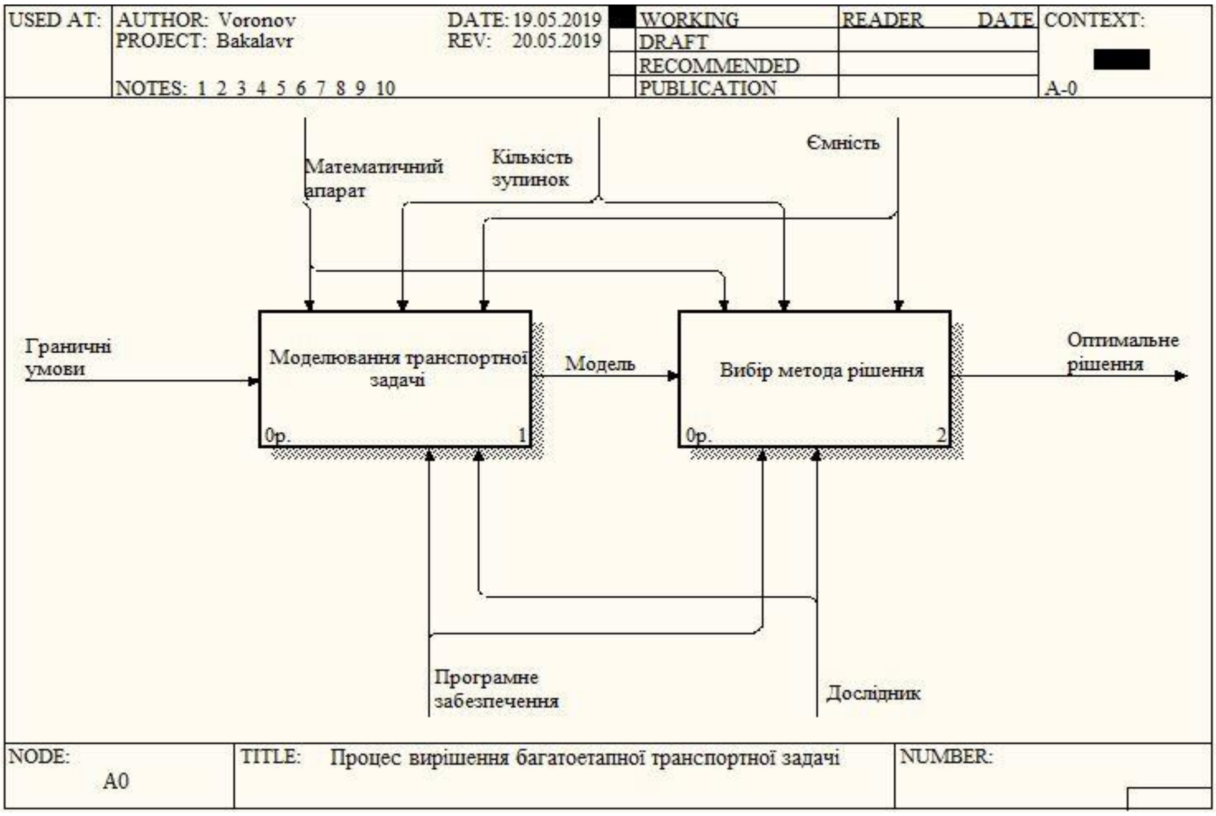

Рисунок 1.3 – Діаграма декомпозицій. Рівень А0

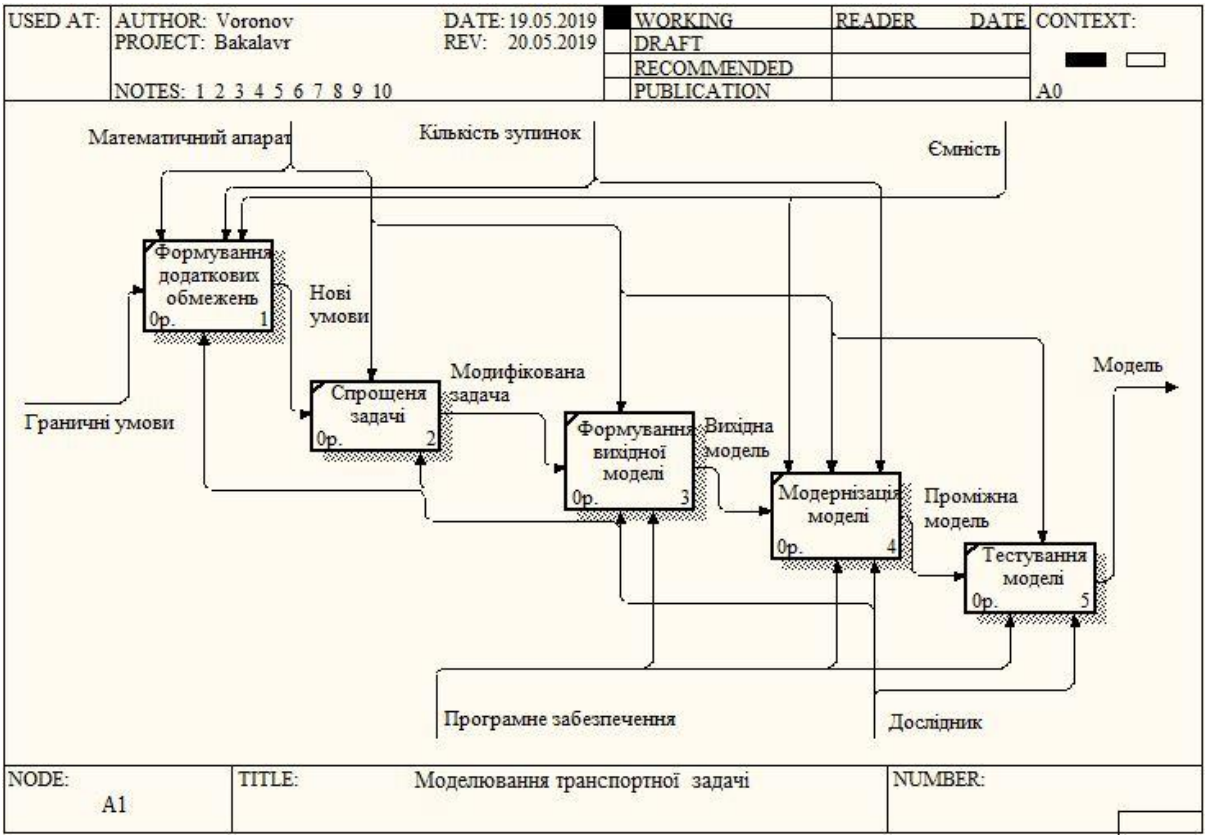

Рисунок 1.4 – Діаграма декомпозиції моделювання транспортної задачі.

Рівень А1

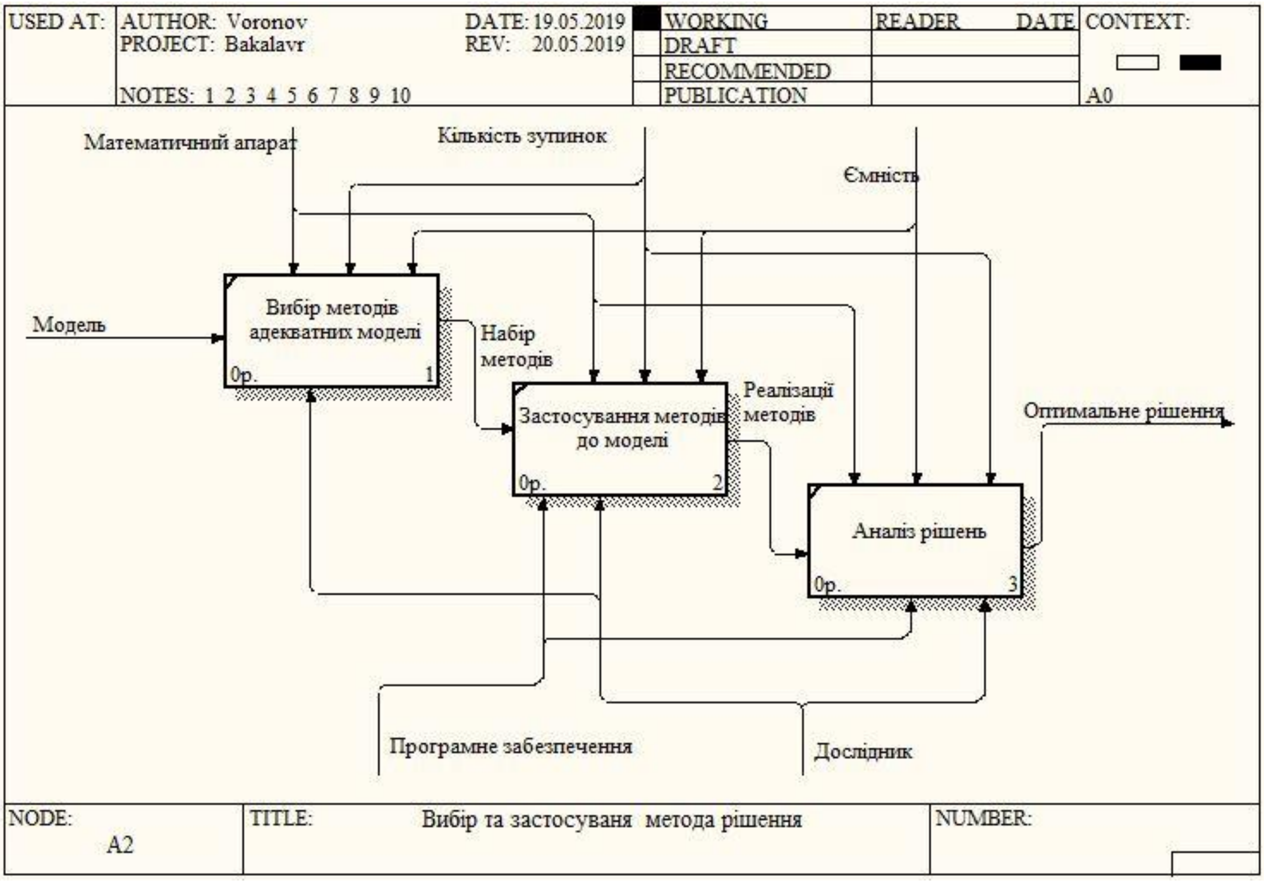

Рисунок 1.5 – Діаграма декомпозиції вибір та застосування метода рішення. Рівень А2

Розглянемо декомпозицію підсистеми А1 «Моделювання транспортної задачі», а саме декомпозицію «Модернізація моделі». При розгляді даної підсистеми треба звернути увагу на явну, на перший погляд, помилку – етап представляє собою деякий цикл. У граматиці IDEF0 така постанова не є вірною тому, що порушує основну структуру IDEF0 – дерево рішень. Проте така постанова необхідна для формування максимально точної проміжної моделі, яка буде подана на тестування на наявність помилок у наступному етапі. За результатами порівняння динаміки моделі та об'єкта можна зробити висновок про адекватність моделі. В іншому випадку модель модернізується шляхом введення раніше не врахованих факторів та підсистем. Саме тому цей процес циклічний як вказано на рисунку 1.6.

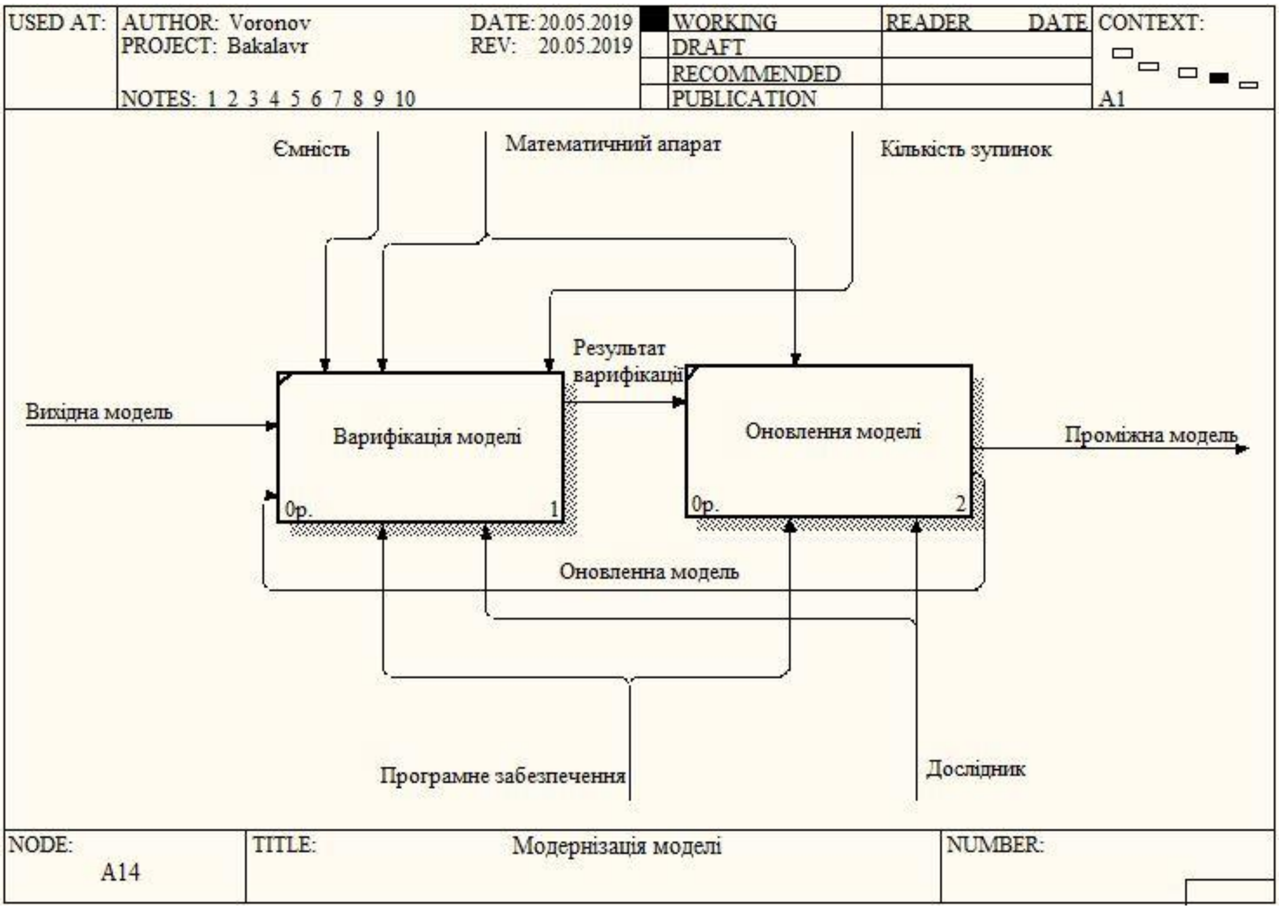

Рисунок 1.6 – Діаграма декомпозиції модернізація моделі. Рівень А14

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель системи відображає зв’язки між елементами системи у вигляді структур даних, акцентуючи увагу дослідника на склад та взаємозв’язках потоків даних.

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD) використовуються для опису документообігу та обробки інформації. Подібно до IDEF0, DFD є модельною системою. Вони зображують досліджувану систему у вигляді мережі пов’язаних між собою робіт. Їх можна використовувати як додаток до моделі IDEF0 для більш наочного відображення поточних операцій.

Всього DFD використовує чотири важливі елементи:

– роботи (Роботи в DFD позначають функції або процеси, які обробляють і змінюють інформацію. Роботи представлені на діаграмах у вигляді прямокутників з округленими кутами);

– стрілки (стрілки йдуть від об'єкта-джерела до об'єкта-приймача, позначаючи інформаційні потоки в системі документообігу);

– зовнішні посилання (зовнішні посилання вказують на місце, організацію або людину, які беруть участь в процесі обміну інформацією з системою, але розташовуються за рамками цієї діаграми);

– сховища даних (сховища даних являють собою власне дані, до яких здійснюється доступ, ці дані також можуть бути створені або змінені роботами. На одній діаграмі може бути присутнім кілька копій одного і того ж сховища даних).

На рисунку 1.7 розглянемо декомпозицію системи «Процес вирішення багатоетапної транспортної задачі» із застосуванням методології DFD.

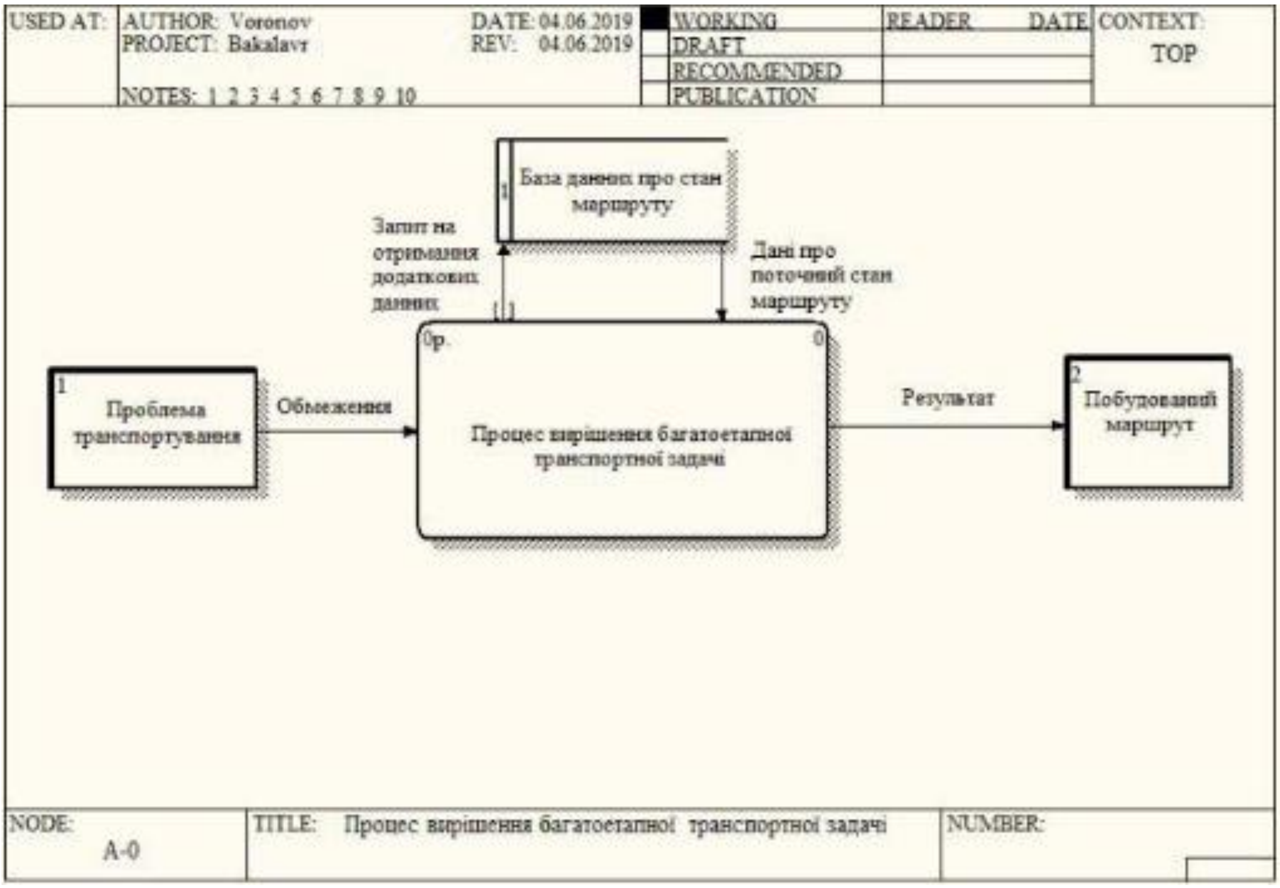

Рисунок 1.7 – Контекстна діаграма системи у методології DFD

У діаграмі потоків даних можна чітко проглянути взаємодію інформації між об’єктами «Процес вирішення багатоетапної транспортної задачі». На рисунку 1.8 зображена контекстна діаграма системи рівня А0.

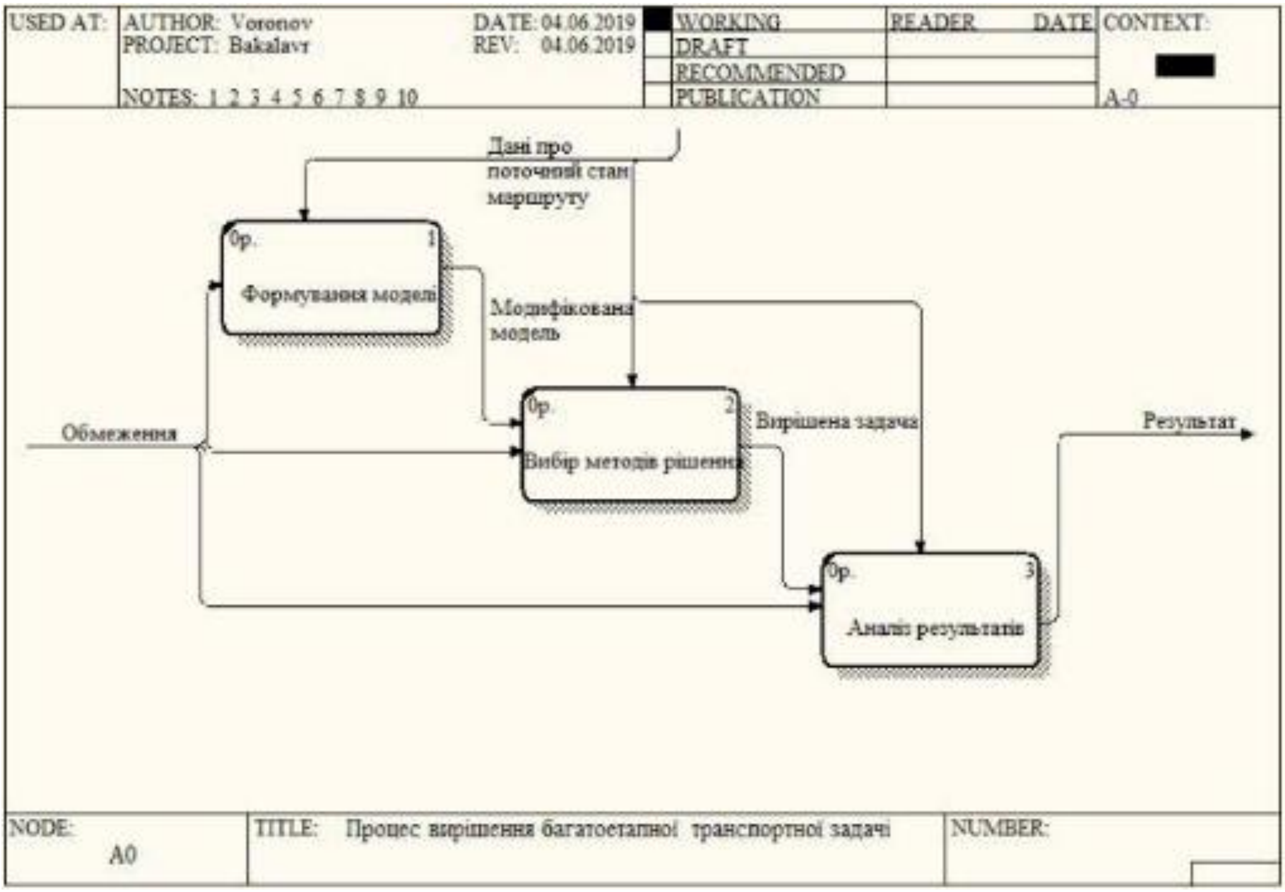

Рисунок 1.8 – Діаграма декомпозиції А0 у методології DFD

1.2 Аналіз проблеми вибору комбінації методів для вирішення багатоетапної транспортної задачі

1.2.1 Модель аналізу проблеми

На сьогодні не існує чіткого метода вирішення багатоетапної транспортної задачі, натомість використовується комбінації методів вирішення стандартної транспортної задачі та методів динамічного програмування. Серед методів динамічного програмування універсальним вважається функція

Беллмана, тому порівняємо комбінації різних методів вирішення транспортної задачі з функцією Беллмана.

Обирати будемо з множини альтернатив:

– альтернатива 1: угорський метод;

– альтернатива 2: симплекс метод;

– альтернатива 3: метод потенціалів.

Розв’язок будується за наступними критеріями:

– критерій 1: швидкість збіжності;

– критерій 2: точність розв’язку;

– критерій 3:складність алгоритму;

– критерій 4: час роботи програми.

Ієрархічна модель проблеми вибору має вигляд, який зображений на рисунку 1.9.

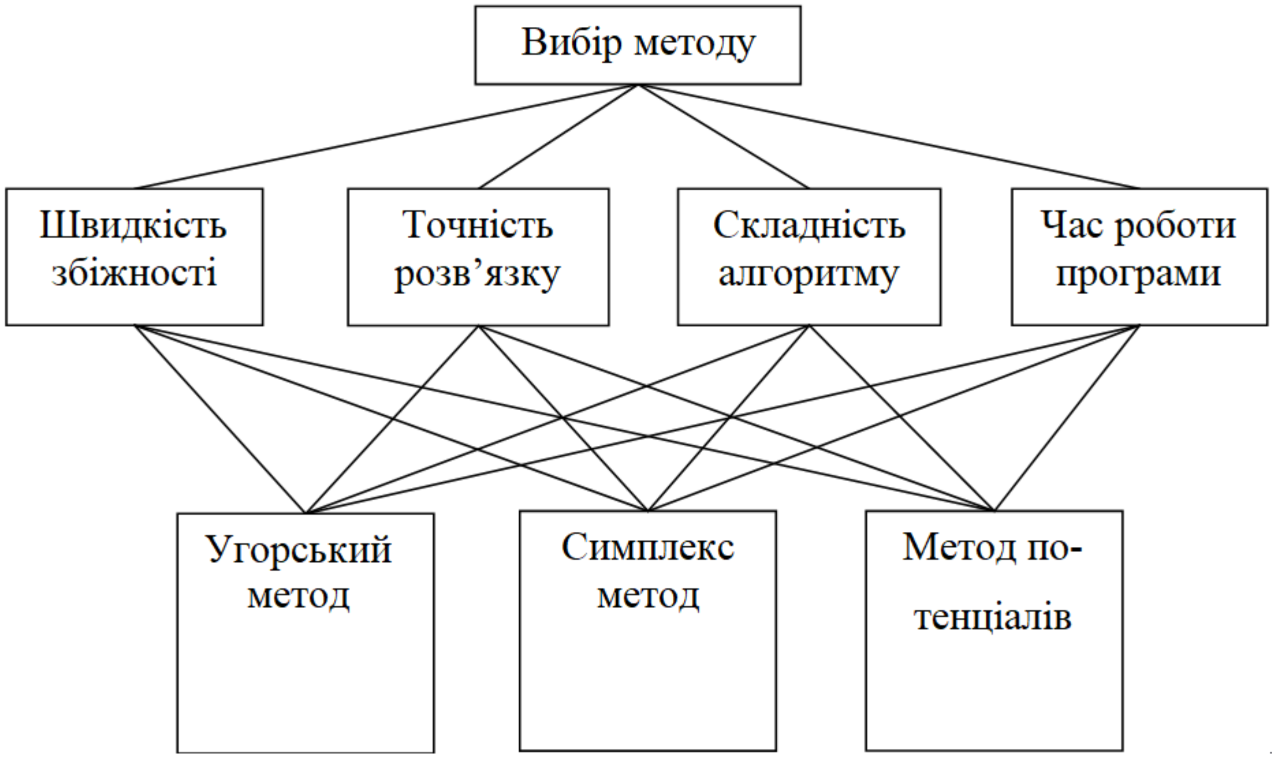

Рисунок 1.9 – Ієрархічна модель аналізу проблеми

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів методом аналізу ієрархій

Для таблиці 1.1 індекс узгодженості (ІУ) $=\frac{4,227-4}{4-1}=0,076$, випадкова узгодженість = 0,9, відносна узгодженість (ВУ) $=\frac{0,076}{0,9}=0,084=8,4\%$.

Для прийняття рішення щодо методу вирішання системи, необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив.

Таблиця 1.1 – Матриця парних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	К1	К2	К3	К4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
К1	1	3	7	8	3,600	0,582	0,932
К2	$\frac{1}{3}$	1	5	6	1,778	0,287	1,253
К3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	0,312	0,050	0,800
К4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	3	1	0,5	0,081	1,242
Усього					6,19		4,227

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

Критерій 1	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	7	3	2,759	0,649	0,958
А2	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	0,306	0,072	0,936
А3	$\frac{1}{3}$	5	1	1,186	0,279	1,172
Усього				4,251		3,066

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

Критерій 2	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	3	2	1,817	0,517	0,948
А2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	0,550	0,157	0,942
А3	$\frac{1}{2}$	2	1	1,145	0,326	1,141
Усього				3,512		3,031

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

Критерій 3	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	7	$\frac{1}{3}$	1,326	0,295	1,222
А2	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0,415	0,092	1,380
А3	3	7	1	2,759	0,613	0,905
Усього				4,500		3,507

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

Критерій 4	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	3	7	2,759	0,674	0,995
А2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0,382	0,094	0,930
А3	$\frac{1}{7}$	6	1	0,950	0,232	1,895
Усього				4,091		3,820

Для таблиці 1.2 маємо ІУ = 0,033, ВУ =0,057.

Для таблиці 1.3 маємо ІУ = 0,015, ВУ = 0,026.

Для таблиці 1.4 маємо ІУ = 0,254, ВУ = 0,438.

Для таблиці 1.5 маємо ІУ = 0,410 , ВУ = 0,707.

Оцінивши їх щодо кожної з критеріїв, отримаємо данні, що представлені у таблицях 1.2 – 1.5. Випадкова узгодженість для матриць дорівнює 0,58.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити кінцеві підрахунки та зробити висновки. У таблиці 1.6 наведені результати, які дозволяють на сказати, що кращою для нас буде перша альтернатива, а саме – угорський метод.

Таблиця 1.6 – Кінцеві дані

Критерій Альтернатива	К1	К2	К3	К4	Узагальнені пріоритети
А1	0,649	0,517	0,295	0,674	0,481
А2	0,072	0,157	0,092	0,093	0,096
А3	0,279	0,326	0,613	0,232	0,423

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

При моделюванні задачі пошуку оптимального маршруту при наявності обов’язкових зупинок у першу чергу треба обрати комбінацію методів які будуть використані для її вирішення.

Звичайні методи для вирішення багатоетапної транспортної задачі не підходять, бо не враховують зупинки, для цього потрібно утворити умовну комбінацію з методів динамічного програмування та методів вирішення транспортної задачі.

Якщо звичайну транспортну задачу можна представити як

$$\sum C_{ij} x_{ij} \to \min,$$

тоді багатоетапна задача буде мати вигляд суми подібних функцій

$$\sum C_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(1)} + \sum C_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} + \ldots \to \min.$$

Метою роботи є наглядне застосування комбінації методів для вирішення багатоетапної транспортної задачі

1.3.2 Формальна постановка задачі

Об’єкт дослідження – багатоетапна транспортна задача.

Предмет дослідження – математична модель багатоетапної транспортної задачі.

Метою кваліфікаційної роботи є утворення системи яка зможе створити модель багатоетапної транспортної задачі і обрати для неї потенційно оптимальний метод вирішення, а також доказ необхідності у існуванні подібної системи. Схема цієї задачі наведена у рисунку 1.10.

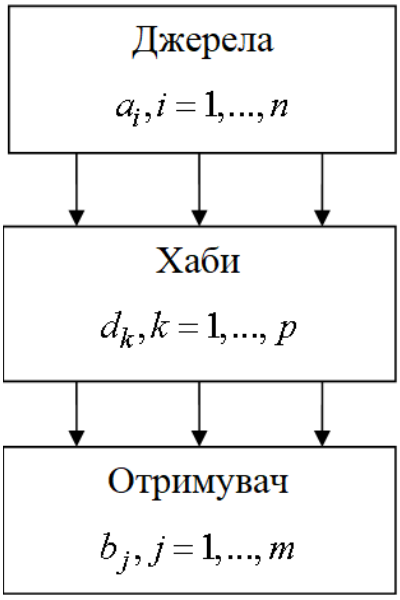

Рис. 1.10 – Схема багатоетапної транспортної задачі

Головним критерієм будемо вважати

$$U = \sum C_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(1)} + \sum C_{ij}^{(2)} x_{ij}^{(2)} \to \min,$$

де U – ціна;

$c^{(1)}, c^{(2)}$ – матриці цін перевезень;

$\sum_i x_{ij}^{(k)} = h_j^{(k)}, \ \sum_j x_{ij}^{(k)} = a_i^{(k)}$ – матриці вирішень;

$x_{ij} \geq 0$ – ціна одиничного кроку на матриці перевезень.

1.4 Постановка задачі дослідження

Метою написання кваліфікаційної роботи є наглядне рішення проблеми вибору комбінації методів для пошуку оптимального рішення у багатоетапній транспортній задачі. Для досягнення мети треба виконати наступні етапи:

– провести системний аналіз проблеми;

– ознайомитися із можливими методами розв’язку проблеми;

– обрати комбінацію метода вирішення транспортної задачі з методом динамічного програмування (угорський метод та функція Беллмана);

– виконати розв’язок окремої задачі;

– довести оптимальність отриманого рішення.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Транспортна задача

2.1.1 Постанова транспортної задачі

Наведемо основні відомості з теорії лінійного програмування.

Транспортна задача є однією з найбільш розповсюджених спеціальних задач лінійного програмування.

Постановка транспортної задачі. Нехай у пунктах $A_1, A_2, ..., A_m$ виготовляють деякий однорідний продукт, причому об'єм виготовлення у пункті A_i становить a_i одиниць (i=1,2,…,m). Допустимо, що даний продукт споживають у пунктах $B_1, B_2, ..., B_n$, а об'єм споживання в пунктах B_j становить b_j одиниць (j=1,2,…,n).

Допустимо, що з кожного пункту виготовлення можливо транспортування продукту в будь який пункт споживання. Транспортні витримки по перевезенню з пункту A_i в пункт B_j одиниць продукції дорівнюють c_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n).

Задача складається у визначенні такого плану перевезень, при якому запити усіх споживачів повністю задоволені, уся продукція із пунктів виготовлення вивезена і сумарні транспортні витримки мінімальні.

Нехай x_{ij} – кількість продукції, перевози мого з пункту A_i у пункт B_j. Потрібно визначити множину змінних $x_{ij} \geq 0$ (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n), задовольняючих умовам

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1,2,...,m, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1,2,...,n, \tag{2.2}$$

таких, що цільова функція

$$L(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.3}$$

досягає мінімуму.

Умова (2.1) гарантує повний вивіз продукції з усіх пунктів виготовлення, а умова (2.2) означає повну задоволеність попиту в усіх пунктах споживання.

Транспортна задача уявляє собою задачу лінійного програмування з $(m \times n)$ кількістю змінних x_{ij} та $(m \times n)$ числом обмежень-рівності.

Змінні x_{ij} нумеруються за допомогою двох індексів і тому набір $\{x_{ij}\}$, задовольняючий умовам (2.1) та (2.2), записують у вигляді матриці:

$$X = \left\| x_{ij} \right\|_{m,n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Матрицю X називають планом перевезень транспортної задачі, а змінні x_{ij} – перевозками. План X_{opt}, при якому цільова функція мінімальна, називається оптимальним планом. Матриця $C = \left\| c_{ij} \right\|$ називається матрицею транспортних витримок.

Вектор P_{ij}, компоненти якого складаються з коефіцієнтів при змінних x_{ij} у обмеженнях (2.1) та (2.2), називають вектором комунікацій:

$$P_{ij}^{T} = [\underbrace{\underbrace{\underbrace{0,0,\dots,0,1}_{i},0,\dots,0,1}_{m+j},0,\dots 0}_{m+n}].$$

Вводять також вектор виробництва-споживання P_0, де $P_0^T = (a_1, a_2, ..., a_m, b_1, ..., b_n)$.

Тоді обмеження (2.1) та (2.2) можна записати у векторній формі так:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} P_{ij} = P_0 . \tag{2.5}$$

2.1.2 Властивості транспортної задачі

У даній кваліфікаційній роботі важливо знати лише дві основні властивості транспортної задачі.

Властивість 1. Для розв’язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова балансу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{2.6}$$

іншими словами, об’єм виробництва повинен дорівнювати об’єму споживання.

Доведення. Нехай змінна $x_{ij}\ (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, ..., n)$ задовольняють умовам (2.1) та (2.2). Сумуючи (2.1) по *i*, а (2.2) по *j*, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} .$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

що і доводить необхідність умови балансу транспортної задачі.

Нехай справедлива умова (2.6). Позначимо

$$\bar{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{d},$$

де

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Неважко показати, що $\bar{x}_{ij}$ утворює план задачі. Дійсно

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, (i = 1, 2, ..., m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^{n} a_i = b_j, (j = 1, 2, ..., n).$$

Таким чином доведено достатність умови балансу транспортної задачі.

Властивість 2. Ранг системи обмежень (2.1), (2.2) дорівнює $r = m + n - 1$.

Доведення. Так як кількість рівнянь (2.1), (2.2) рівняється $m + n$, то ранг цієї системи $r \le m + n$.

Далі нехай набір $\left\{x_{ij}\right\}_{i=m,\, j=n}$ задовольняє усім рівнянням, окрім першого. Покажемо, що він задовольняє також і першому рівнянню.

Очевидно, що

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} - \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} .$$

Так як

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i, (i = 2,...,m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_j, (j = 1,2,...,n),$$

то

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j ;$$

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{i=2}^{m} a_i .$$

Звідси

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=2}^{m} a_i .$$

Враховуючи умову балансу (2.6), отримуємо

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=2}^{m} a_i = a_1,$$

тобто перше рівняння системи (2.1) також задовольняється. Таким чином ранг системи рівнянь $r \le m + n - 1$.

Зараз доведемо, що ранг системи рівнянь (2.1), (2.2) дорівнює точно $m + n - 1$. Для цього побудуємо матрицю з перших $(m + n - 1)$ компонентів векторів P_{1n}, P_{2n},..., P_{mn}, P_{11},..., $P_{1,n-1}$.

Очевидно, що ця матриця не вироджена. Тому вектор $P_{1n}, P_{2n}, ..., P_{mn}, P_{11}, ..., P_{1,n-1}$ утворює базис. Так як базис системи складається з $(m+n-1)$ векторів, то ранг системи $r = m+n-1$.

2.1.3 Двохетапна транспортна задача.

У класичній постановці транспортної задачі допускається, що вантаж перевозиться безпосередньо від постачальників до споживачів. Але на практиці досить часто зустрічається випадок, коли певна частина продукції спочатку перевозиться до посередницьких фірм (сховищ), а потім споживачам. У такому разі розв'язання задачі поділяють на два етапи: спочатку знаходять оптимальний план перевезень від постачальників до посередників, а потім – від посередників до споживачів. Така задача має назву двохетапної транспортної задачі.

Нехай в m пунктах постачання $A_1, A_2, ..., A_m$ є відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць продукції, яку необхідно перевезти до l посередницьких фірм $D_1, D_2, ..., D_l$, місткості сховищ яких становлять $d_1, d_2, ..., d_l$, а потім доставити її n споживачам $B_1, B_2, ..., B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, ..., b_n$. Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до посередницьких фірм – c_{ik} та від посередників до споживачів – c_{kj}. Потрібно визначити оптимальну схему перевезень продукції з мінімальними сумарними витратами. Якщо обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника до k-ої фірми, позначити через x_{ik}, а обсяг вантажу, що перевозиться від k-ої фірми j-му споживачеві – через x_{kj}, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_{kj}$$

за наступних умов:

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \; i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k, \; k = \overline{1,l};$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{kj} = b_j, \; j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le d_k, \; k = \overline{1,l};$$

$$x_{ik} \ge 0, \; x_{kj} \ge 0, \; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}; \; k = \overline{1,l}.$$

Зазначимо, що коли загальний обсяг вантажу $\sum_{i=1}^{m} a_i$ дорівнює місткості всіх складів та баз $\sum_{k=1}^{l} d_k$, а також сумарній потребі всіх споживачів $\sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{l} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то така двохетапна транспортна задача може бути розв’язана як дві одноетапні задачі.

В іншому разі окремі оптимальні плани двох задач не збігатимуться з оптимальним планом загальної задачі.

Метод розв’язування двохетапної транспортної задачі, розроблений Орденом-Маршем, полягає у врахуванні місткостей посередників двічі – як постачальників і як споживачів. Умови задачі подаються у вигляді таблиці, в рядках якої записують дані про постачальників, а також про посередницькі фірми, а в стовпцях – знову дані про посередників та споживачів. У клітинах, які розміщені на перетині рядків-постачальників та стовпців-споживачів, фіксують реальні затрати на перевезення одиниці продукції. В діагональних клітинах на перетині рядків і стовпців, які відповідають посередницьким фірмам, ставлять нульові величини затрат. Решту клітин таблиці блокують, тобто вартості перевезень прирівнюють до деякого досить великого числа M. У процесі розв'язування задачі в цих клітинах не будуть передбачатися перевезення продукції, що відповідає умовам двохетапної транспортної задачі.

Розглянемо наступний ілюстративний приклад.

Виробниче об'єднання складається з трьох філіалів: A_1, A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в обсягах відповідно 1000, 1500 та 1200 одиниць на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D_1 і D_2 місткістю відповідно 2500 та 1200 од., а потім — до п'яти споживачів B_1, B_2, …, B_5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартості перевезень одиниці продукції (в умовних одиницях) від виробників на склади, а потім — зі складів до споживачів наведені у наступних таблицях.

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першого філіалу до другого споживача, а також з третього філіалу — до четвертого споживача.

Вартість транспортування одиниці продукції та транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 ум. од., а за маршрутом A_3B_4 – 4 ум. од. Перевезення продукції зі складу на склад недопустимі.

Сформулювати поставлену задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну) та визначити її оптимальний план.

Для розв'язання. поставленої задачі кожний склад можна подати як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому в транспортній таблиці вони гратимуть роль і постачальника продукції, і її споживача.

Перевезення продукції безпосередньо від філіалів до споживачів (крім випадків, визначених в умові задачі), а також зі складу на склад блокується введенням у відповідні клітини досить великих вартостей перевезення одиниці продукції M .

Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двохетапної задачі наведено нижче на рис. 2.1.

A_i, D_i	D_k, B_j							u_i
	$d_1 = 2500$	$d_2 = 1200$	$b_1 = 900$	$b_2 = 700$	$b_3 = 1000$	$b_4 = 500$	$b_5 = 600$	
$a_1 = 1000$	2 1000	8	M	+ 3 0	M	M	M	$u_1 = 0$
$a_2 = 1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$a_3 = 1200$	1 1200	4	M	M	M	4 1	M	$u_3 = -1$
$d_1 = 2500$	0 2	M	1 900	− 3 700	8 900	5 1	4	$u_4 = 0$
$d_2 = 1200$	M	0 1	2	4	5 100	3 500	1 600	$u_5 = -3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

Рисунок 2.1 – Таблиця двохетапної задачі

Зауважимо, що в клітинках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає неповне використання ємностей сховищ у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням продукції.

Ця транспортна задача є збалансованою, бо:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700 \text{ од.,}$$

а також

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700 \text{ од.,}$$

тому немає потреби вводити в транспорту таблицю фіктивного постачальника або споживача.

Перший опорний план транспортної задачі побудовано методом мінімальної вартості. Розрахуємо загальну вартість перевезень, що відповідає цьому плану:

$$Z_1 = 2\cdot 1000 + 3\cdot 300 + 5\cdot 1200 + 1\cdot 1200 + 1\cdot 900 +$$
$$+3\cdot 700 + 8\cdot 900 + 5\cdot 100 + 3\cdot 500 + 1\cdot 600 = 22900.$$

Тобто загальна вартість перевезень складає 22 900 умовних одиниць.

Цей опорний план задачі неоптимальний. Перехід від нього до другого плану виконуємо, заповнюючи порожню клітинку D_1D_1 згідно з побудованим циклом (наведено у рис. 2.2).

Визначимо вартість перевезень згідно з другим опорним планом:

$$Z_2 = 2\cdot 300 + 3\cdot 700 + 3\cdot 300 + 5\cdot 1200 + 1\cdot 1200 +$$
$$+1\cdot 900 + 8\cdot 900 + 5\cdot 100 + 3\cdot 500 + 1\cdot 600 = 21500.$$

Тобто загальна вартість перевезень складає 21 500 умовних одиниць.

$$Z_{\min} = 2\cdot 300 + 3\cdot 700 + 3\cdot 300 + 5\cdot 1200 + 1\cdot 700 +$$
$$+4\cdot 500 + 1\cdot 900 + 8\cdot 400 + 5\cdot 600 + 1\cdot 600 = 20000.$$

Для більшої наочності оптимальний план перевезень продукції двохетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми (рис. 2.3).

На схемі показано, що на перший склад надходить лише

$$300 + 300 + 700 = 1300$$

одиниць продукції, тобто його місткість використовується не повністю (D_1D_1 = 1200 од.). Це зумовлено прямими поставками продукції за маршрутами A_1B_2 у обсязі 700 од. і A_3B_4 – у обсязі 500 од.

A_i, D_i	D_i, B_j							u_i
	$d_1 = 2500$	$d_2 = 1200$	$b_1 = 900$	$b_2 = 700$	$b_3 = 1000$	$b_4 = 500$	$b_5 = 600$	
$a_1 = 1000$	2 300	8	M	3 700	M	M	M	$u_1 = 0$
$a_2 = 1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$a_3 = 1200$	1 1200 –	4	M	M	M	4 + 1	M	$u_3 = -1$
$d_1 = 2500$	0 + 700	M	1 900	3	8 – 900	5 1	4	$u_4 = 0$
$d_2 = 1200$	M	0	2	4	5 + 100	3 – 500	1 600	$u_5 = -3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

Рисунок 2.2 – Перехід до другого плану

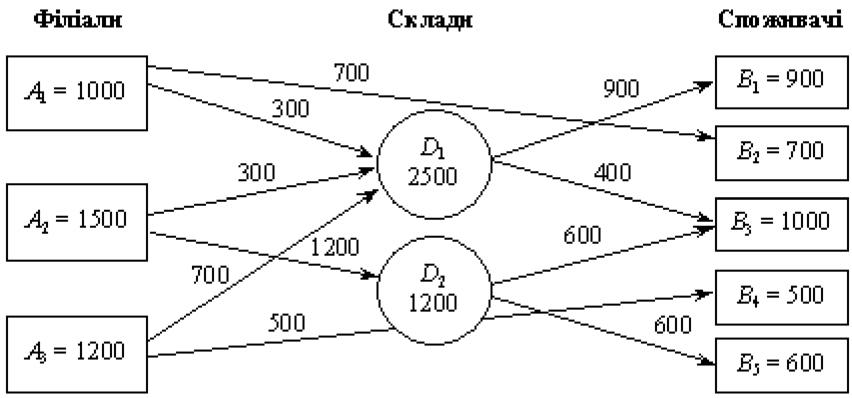

Рисунок 2.3 – Оптимальний план перевезень продукції

Розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план, який відрізняється від першого лише перевезеннями продукції зі складів до третього та п’ятого споживачів.

Крім розглянутої у транспортних задачах із проміжними пунктами можуть зустрічатися і такі ситуації:

а) незбалансованість транспортної задачі ($\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$). У цьому разі необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши у такий спосіб задачу до закритого типу.

б) місткість проміжних пунктів не дорівнює загальному обсягу продукції постачальників:

1) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що «перевозитиметься» до нього, має дорівнювати невивезеній частині продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевезення за обсягом не менш як $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{k} d_j$ од.);

2) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому разі немає потреби вводити фіктивного постачальника і, зрозуміло, що місткість проміжних пунктів повністю не використовуватиметься);

в) місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі споживачів:

1) $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{k} d_i$ (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що «перевозитиметься» від нього до споживача *Bj*, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів за обсягом не менш як $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{k} d_i$ од.);

2) $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{k} d_i$ (розглядається аналогічно ситуації, коли місткість проміжних пунктів не дорівнює загальному обсягу продукції постачальників та при цьому $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{k} d_j$).

2.2 Угорський метод

2.2.1 Угорський метод для транспортної задачі

Нехай треба вирішити транспортну задачу типу

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} ,$$

де при $x_{ij} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,\ i = 1,2,...,m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,\ j = 1,2,...,\mathrm{n}.$$

Алгоритм вирішення транспортної задачі, оснований на так званому, «угорському методі» (Егерварі), складається з попереднього етапу та скінченого числа ітерацій.

У результаті попереднього етапу будується матриця $X_0 = \left\| x_{ij} \right\|_{m,n}$, елементи якої задовольняють наступним умовам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(0)} \leq a_i ,\ i = 1,2,...,m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(0)} \leq b_j ,\ j = 1,2,...,\mathrm{n}.$$

Якщо отримаємо сувору рівність, тоді матриця X_0 є вирішенням транспортної задачі. Матрицю, побудовану у результаті k – ї ітерації, позначаємо

$$X_k = \left\| x_{ij}^{(k)} \right\|_{m,n}.$$

Нехай

$$\sum_{i}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} = \Delta_k.$$

Величина Δ_k називається сумарною нев'язкою для матриці X_k. Вона описує близькість матриці X_k до опорного плану транспортної задачі. Ітерації проводяться до тих пір, поки величина Δ_k не стане при деякому k рівна нулю.

2.2.2 Опис алгоритму угорського метода

На попередньому етапі у кожному із стовпців матриці транспортних витримок $C = \left\| c_{ij} \right\|$ відшукуємо мінімальний елемент, котрий віднімаємо від усіх елементів цього стовпця. Отримаємо матрицю C'. Далі у кожній строчці матриці C' обирають мінімальний елемент і віднімають його з усіх елементів цієї строчки. Переходять до матриці C_0, усі елементи якої невід'ємні та у кожній строчці та стовпці знаходиться що найменше один нуль.

Далі будують матрицю X_0 так, щоб її нульові елементи знаходились у позиціях нулів матриці C_0.

Нехай i_{k_j} – номер строки, у якій знаходиться k – ї нуль j – го стовпця матриці C_0. Тоді елементи першого стовпця матриці X_0 визначаються за рекурентною формулою

$$x_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0; i \neq i_{k_1}, k = 1,2,\dots,r \\ \min\left(a_i; b_j - \sum\limits_{\mu=1}^{i-1} x_{i\mu}^{(0)}\right); i = i_{k_1} \end{cases}.$$

Усі елементи першого стовпця X_0, які відповідають ненульовим елементам у матриці C_0, заповнюють нулями, а інші елементи цього стовпця заповнюють за методом північно-західного кута.

Допустимо, що стовпці матриці X_0 до (*j*-1)-го включно вже заповнені. Тоді елементи *j*-го стовпця визначаються у відповідності з формулою

$$x_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0; i \neq i_{k_1}, k = 1,2,\dots,r; \\ \min\left(a_i - \sum\limits_{\mu=1}^{j-1} x_{i\mu}^{(0)}; b_j - \sum\limits_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu j}^{(0)}\right); i = i_{k_1}. \end{cases}$$

Далі обчислюємо нев'язку:

$$\Delta_0 = \sum_{i}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(0)}.$$

Якщо $\Delta_0 = 0$, то X_0 – оптимальне рішення транспортної задачі.

Якщо $\Delta_0 > 0$, то переходимо до першої ітерації.

Кожна ітерація складається із трьох етапів. Ітерація починається першим етапом, а закінчується другим.

Між першим та другим етапами у загальному випадку можуть бути декілька раз проведень перший та третій етапи.

Допустимо, що вже проведено k ітерацій, та $\Delta_k > 0$. У цьому випадку необхідно, використовуючи матриці C_k та X_k, провести наступну $(k+1)$ ітерацію. Перед початком ітерації виділяють знаком «+» стовпці матриці C_k, для котрих нев’язка по стовпцям дорівнює

$$\delta_j^{(k)} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(k)} = 0.$$

Перший етап. Якщо усі нульові елементи матриці C_k знаходяться у виділених стовпцях, то переходять до третього етапу. У іншому випадку обирають довільний невиділений нуль C_k, який знаходиться, наприклад, у *i*-й строчці та *j*-у стовпці, і обчислюють величину нев’язки *i*-й строчки:

$$\delta_i^{(k)} = a_i - \sum_{\mu=1}^{n} x_{i\mu}^{(k)}.$$

При цьому можливий один з двох випадків:

а) $\delta_i^{(k)} = 0$;

б) $\delta_i^{(k)} > 0$.

У першому випадку *i*-у строчку C_k відмічають знаком «+» справа від неї, а елементи матриці $c_{ij}^{(k)}$, що дорівнюють нулю, відмічають штрихом. Далі дивляться усі виділені стовпці матриці C_k по цій строчці. Якщо μ-й стовпець матриці C_k виділений і елемент $x_{i\mu}^{(k)} > 0$, то знак «+» над стовпцем знищується, а елемент $c_{ij}^{(k)}$ (обов’язково рівний нулю) відмічають зірочкою.

Потім оглядають μ-й стовпець та шукають його нульові елементи $c_{r\mu}$, що знаходяться у відмінних від *i*-й строчках. Якщо такі маються, то їх виділяють штрихом.

Далі процес виділення нулів продовжують аналогічно, закінчуючи одним з двох результатів:

а) знайдено невиділений нуль матриці C_k, для якого нев’язка $\delta_i > 0$. У цьому випадку переходять до другого етапу;

б) усі нулі матриці C_k виділені, причому для кожного з нулів, виділених штрихом, нев'язка $\delta_i = 0$. Тоді переходять до третього етапу.

У другому випадку, відмітив цей нуль штрихом, відразу переходимо до другого етапу.

Другий етап слідує за першим, якщо $\delta_i > 0$, і полягає у побудові ланцюга із нулів матриці C_k відмічених штрихами та зірочками, і у подальшому переході до нової матриці X_{k+1}.

Нехай для деякого невиділеного нуля матриці C_k, що знаходиться, наприклад, у позиції $\lambda_1\mu_1$, нев'язка $\delta_{\lambda_1} > 0$. Починаючи з цього елемента, будують послідовність з відмічених нулів матриці C_k у відповідності з наступним правилом.

У стовбці μ_1 матриці C_k обирають нуль з зірочкою $0'_{\lambda_2\mu_1}$, у λ_2 строчці обирають нуль зі штрихом $0'_{\lambda_2\mu_2}$. Далі від $0'_{\lambda_2\mu_2}$ рухаємося по стовпцю μ_2 до нуля з зірочкою и т.д. Послідовний перехід від нуля зі штрихом до нуля з зірочкою по стовпцю и від нуля з зірочкою до нуля зі штрихом по строчці робимо до тих пір, поки це можливо. Можна довести, що побудова послідовності здійснюється завжди однозначно, ланцюг не має замкнутих циклів та закінчується нулем зі штрихом.

Після того як послідовність виду

$$0'_{\lambda_1\mu_1}, 0'_{\lambda_2\mu_1}, 0'_{\lambda_2\mu_2}, \ldots, 0'_{\lambda_S\mu_S}$$

побудована, здійснюється перехід до матриці X_{k+1} від X_k за формулою

$$x_{ij}^{k+1} = \begin{cases} x_{ij}^{(k)}, & \text{якщо } c_{ij}^{(k)} \text{ не входить до послідовності;} \\ x_{ij}^{(k)} + \theta_k, & \text{якщо } c_{ij}^{(k)} - \text{непарний елемент послідовності;} \\ x_{ij}^{(k)} - \theta_k, & \text{якщо } c_{ij}^{(k)} - \text{парний елемент послідовності;} \end{cases}$$

де

$$\theta_k = \min_{1 \le t \le S} \left\{ x^{(k)}_{\lambda_t \mu_{t-1}}; \delta^{(k)}_{\lambda_1}; \delta^{(k)}_{\mu_S} \right\};$$

$$\delta^{(k)}_{\lambda_1} = a_{\lambda_1} - \sum_{j=1}^{n} x^{(k)}_{\lambda_1 j};\ \delta^{(k)}_{\mu_S} = b_{\mu_S} - \sum_{i=1}^{m} x^{(k)}_{i\mu_S}.$$

Таким чином θ_k – мінімальний елемент серед сукупності парних елементів послідовності, нев’язки строчки, де починається послідовність та стовпця, де вона закінчується.

Після виконання другого етапу $(k+1)$-у ітерацію закінчують, притому нев’язка $\Delta_{k+1} = \Delta_k - 2\theta_k$.

Третій етап. Припустимо, що усі нулі виділені. Цей етап заклечається у переході від матриці C_k до матриці C'_k, у якій з’являється один (або більше) невиділений нуль.

Нехай $h = \min\left\{c^{k}_{ij}\right\}$, де мінімум обирають з усіх невиділених елементів матриці C_k. Тоді із елементів матриці C_k, що належать невиділеним строчкам, віднімають *h*, а до елементів виділених стовпців додають *h*. Отриману матрицю при цьому позначають $C^{(1)}_k$.

Далі переходять до першого етапу, а далі або переходять до другого, або знову повертаються до третього етапу.

Якщо після другого етапу сумарна нев’язка Δ_{k+1} дорівнює нулю, тоді X_{k+1} оптимальний план.

У іншому випадку переходимо до наступної ітерації.

Підкреслимо деякі переваги угорського метода:

– на відміну від метода потенціалів не використовує опорний план, а отже не є виродженим;

– на кожній ітерації дозволяє, за величиною нев'язки, мати уявлення о близькості до оптимального плану, а також оцінювати верхню границю числа наступних ітерацій.

2.3 Функція Беллмана

В основі динамічного програмування заходиться принцип оптимальності, що вказує на процедуру побудови оптимального рівняння. Так як оптимальною стратегією може бути лише та, яка одночасно оптимальна і для будь якої кількості проміжних кроків, її можна будувати по частинам: спочатку для останнього етапу, потім для двох останніх, для трьох и т.д., поки не дійдемо до першого кроку. Звідси принцип оптимальності зв'язаний з другим принципом – занурення, за котрим при вирішені початкової задачі її не мов би погружають у сімейство подібних їй та вирішують для одного останнього етапу, для двох останніх и т.д., поки не буде отримано вирішення початкової задачі.

Дамо математичне формулювання принципу оптимальності для задач з адитивним критерієм оптимальності (сепарабельна функція мети). Для спрощення будемо вважати, що початковий x_0 та кінцевий x_T стани системи данні. Позначимо $z_1(x_0,u_1)$ значення функції мети на першому етапі при початковому стані системи x_0 та управлінні u_1, через $z_2(x_1,u_2)$ – відповідне значення функції мети тільки на другому етапі і т.д., через $z_N(x_{N-1},u_N)$ – на N-му етапі. Очевидно що

$$Z = z(x_0,u) = \sum_{i=1}^{N} z_i(x_{i-1},u_i). \qquad (2.7)$$

Треба знайти оптимальне управління $u^* = (u_1^*;u_2^*;...;u_N^*)$ таке, що доставляє екстремум цільовій функції (2.7) за обмеженням $u \in \Omega$.

Для вирішення цієї задачі занурюємо її до сімейства подібних. Введемо позначення. Нехай $\Omega_N, \Omega_{N-1,N}, ..., \Omega_{1,2,...,N} \equiv \Omega$ – відповідна область визначення для подібних задач на останньому етапі, двох останніх і т.д.; Ω – область визначення початкової задачі. Позначимо як

$$F_1(x_{N-1}), F_2(x_{N-2}), ..., F_k(x_{N-k}), ..., F_N(x_0)$$

відповідно умовно-оптимальні значення функції мети на останньому етапі, двох останніх і т.д., на останніх k і т.д., на усіх N етапах. Знаходимо

$$F_1(x_{N-1}) = \max_{u_N \in \Omega_N}(\min) z_N(x_{N-1}, u_N). \tag{2.8}$$

Для двох наступних етапів отримаємо

$$F_2(x_{N-2}) = \max_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}}(\min)\,(z_{N-1}(x_{N-2}, u_{N-1}) + F_1(x_{N-1})). \tag{2.9}$$

Аналогічно:

$$F_3(x_{N-3}) = \max_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2,N-1,N}}(\min)\,(z_{N-2}(x_{N-3}, u_{N-2}) + F_2(x_{N-2})), \tag{2.10}$$

$$F_k(x_{N-k}) = \max_{u-k+1 \in \Omega_{N+k+1,...,N}}(\min)\,(z_{N-k+1}(x_{N-k}, u_{N-k+1}) + F_{k-1}(x_{N-k+1})), \tag{2.11}$$

$$F_N(x_0) = \max_{u_1 \in \Omega}(\min)(z_1(x_0, u_1) + F_{N-1}(x_1)). \tag{2.12}$$

Формула (2.12) представляє собою математичний запис принципу оптимальності. Формула (2.11) – загальна форма запису умовно-оптимального значення функції мети для k проміжних етапів. Формули (2.8) – (2.12) називають функціональними рівняннями Беллмана.

Висновки за розділом 2

Безпосередньо на прикладі показано, що сума оптимальних шляхів на кожному етапі багатоетапної транспортної задачі не дають оптимальний шлях укупі. Розглянуто два класичних алгоритмів пошуку оптимальних шляхів.

Під час формування алгоритму вирішення багатоетапної задачі методом Беллмана дослідник зіткнеться з проблемою перенасичення граничними умовами або їх нехваткою. Недостатність швидкодії при великій розмірності задачі. Маємо відмічено ще Беллманом, так зване «прокляття розмірності».

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Програма написана на Delphi та вирішує транспортні завдання методом потенціалів. Програма також пропонує вибрати метод знаходження опорного плану.

Системні вимоги :

– ОС Windows;

– 16 Мб оперативної пам'яті та більше;

– клавіатура, миша;

– процесор від 0,3 Гц.

Інтерфейс програми доволі простий (рис. 3.1).

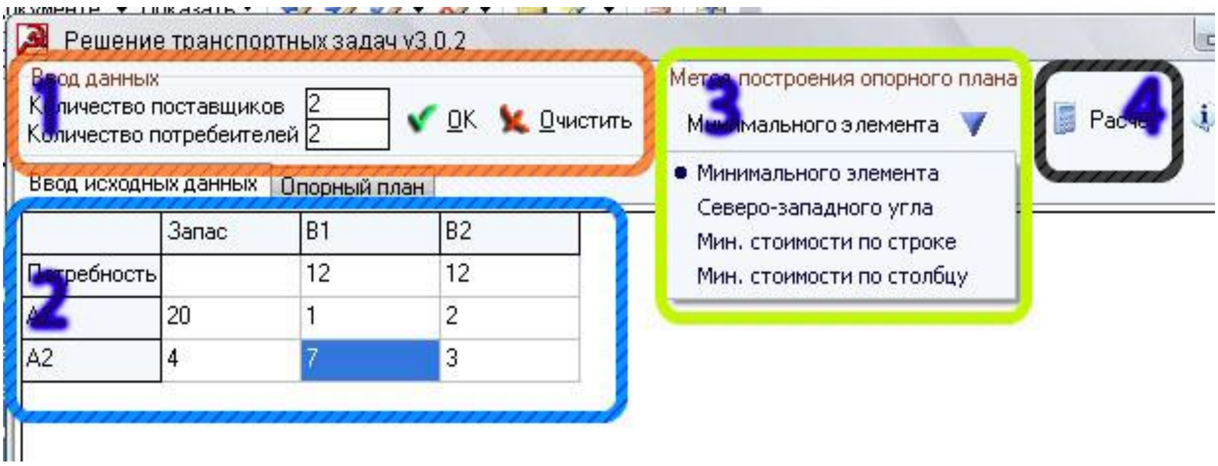

Рисунок 3.1 – Інтерфейс програмної реалізації

Далі наведемо кроки, необхідні для використання цього програмного забезпечення.

Крок 1 – необхідно ввести кількість постачальників та споживачів.

Крок 2 – заповнити таблицю даними.

Крок 3 – вибрати метод опорного плану.

Крок 4 – натиснути «розрахунок».

Далі програма виведе опорний план, графіки, вартість вантажоперевезень та ітерації, при необхідності сама додасть фіктивних постачальників.

Недолік програми у цьому, що може вирішувати двоетапні завдання лише 2 і 3 методом, метод Ордена-Маша не підтримується програмою. Також загальну вартість вантажоперевезень завдання треба обчислювати вручну.

Програмний код наведено у додатку А.

Висновки за розділом 3

Наприкінці програма виводить опорний план, графіки, вартість вантажних перевезень та ітерації, при необхідності сама додасть фіктивних постачальників. Недолік програми у тому, що може вирішувати двохетапні завдання лише 2 і 3 методом, метод Ордена-Маша не підтримується програмою. Також загальну вартість вантажоперевезень завдання треба обчислювати вручну. Лістинг наведено у Додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент було проведено у два етапи. Перший етап представляє вирішення задачі як звичайної транспортної задачі угорським методом.

Розділимо задачу на дві не пов’язані матриці наведені у таблиці 4.1 та 4.2.

Таблиця 4.1 – Матриця перевезень на першому етапі

	h_1	h_2	a_i
A_1	10	2	100
A_2	4	6	20
A_3	3	1	50
b_j	70	100	

Таблиця 4.2 – Матриця перевезень на другому етапі

	B_1	B_2	B_3	a_i
h_1	4	2	1	70
h_2	1	3	5	100
b_j	60	60	50	y

Перевіримо умову балансу для обох матриці

$$\sum_i a_i^{(1)} = \sum_i a_i^{(2)} = \sum_j b_j^{(1)} = \sum_j b_j^{(2)} = 170 .$$

Попередній етап для першої матриці.

$$C^{(2)} = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

З першого стовпця вичитаємо 3 та з другого 1

$$C_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

З першої рядка вичитаємо 1, з другої 1та з третьої 0

$$C_0^{(1)} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Будуємо початкову матрицю перевезень

$$X_0^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 100 \\ 20 & 0 \\ 50 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо нев’язки для стовпців $\delta_j^{(1)} = \{0,0\}$, для строк $\delta_i^{(1)} = \{0,0,0\}$.

Сумарна нев’язка $\Delta_0^{(1)} = 0$, отже $X_0^{(1)}$ оптимальний план перевезень у першій частині задачі.

Розглянемо другу матрицю

$$C^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

З першого стовпця вичитаємо 1, з другого 2 та з третього 1

$$C_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

З першої та другої строки вичисти 0 тому $C_1^{(2)} = C_0^{(2)}$.

Будуємо початкову матрицю перевезень

$$X_0^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 60 & 10 \\ 60 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо нев'язки для стовпців $\delta_j^{(2)} = \{0, 0, 40\}$, для строк $\delta_i^{(2)} = \{0, 40\}$.

Сумарна нев'язка $\Delta_0^{(2)} = 80 > 0$, отже переходимо до першої ітерації.

$$C_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$X_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 60 & 10 \\ 60 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Сумарна нев'язка $\Delta_1^{(2)} = 80 > 0$, отже переходимо до другої ітерації.

$$C_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$X_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 60 & 10 \\ 60 & 0 & 40 \end{vmatrix}.$$

Сумарна нев’язка $\Delta_2^{(2)} = 0$ отже $X_2^{(2)}$ оптимальний план перевезень у другій частині задачі.

Другий етап, це вирішення цієї задачі функцією Беллмана як задачі про вибір найкоротшого шляху, як показано на рисунку 4.1

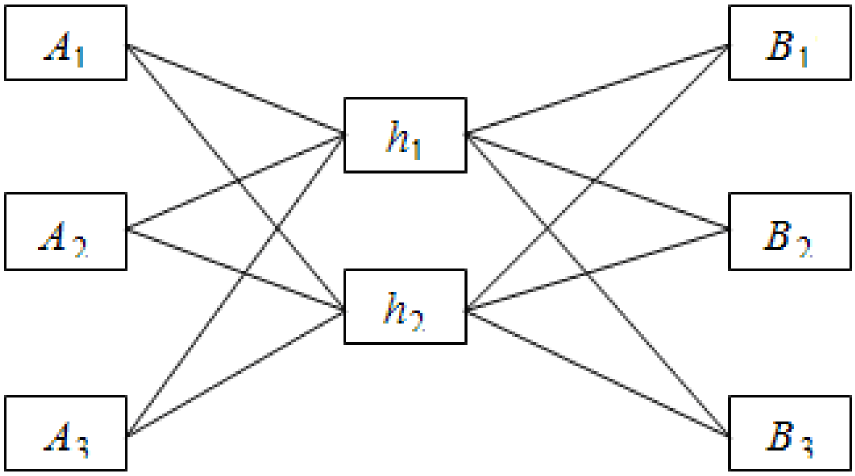

Рисунок 4.1 – Постановка задачі для вирішення по Беллману

Будемо вирішувати задачу з кінця у два кроки, а саме від B_j до h_k та від h_k до A_i (i=1,2,3; k=1,2; j=1,2,3).

Крок перший. З пункту B_j до h_k можна дістатися як наведено у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Матриця довжин шляхів на першому кроці

	h_1	h_2
B_1	4	1
B_2	2	3
B_3	1	5

Тобто маємо два однаково коротких шляхи – до пункту h_1 мінімальна відстань від пункту B_3, а до h_2 мінімальна відстань у пункту B_1.

Крок другий. З пункту h_k до A_i можна дістатися (при умові що під пунктами h_k ми розуміємо найкоротші шляхи від B_j до h_k) як наведено у таблиці 4.4. Тому що найкоротші шляхи виявилися однаковими за відстанню, то ми одразу додамо їх до усіх можливих шляхів таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 – Матриця довжин шляхів на другому кроці

	A_1	A_2	A_3
$h_1(B_3)$	11	5	4
$h_2(B_1)$	3	7	2

З таблиці видно, що найкоротшим, а отже і оптимальним за Беллманом, є шлях $A_3 - h_2 - B_1$.

Висновки за розділом 4

Транспортна задача у будь якому вигляді одна з найчастіших у нашому житті. Починаючи від простого переходу на інший бік дороги до міжнародних поставок товару між країнами, проте сучасні методи вирішення транспортної задачі не мають змоги до застосування у реальних ситуаціях.

Як бачимо з прикладу, що наведено вище є досить тривіальним проте у той же час і змістовним. Як можна побачити, оптимальний маршрут на усіх етапах не є оптимальним на кожному окремому з них.

Якщо такий простий приклад не може бути вирішений сучасними одно-етапними методами, тоді про більш складні методи і не може йти і розмови.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання кваліфікаційної роботи був проведений системний аналіз побудови багатоетапної транспортної задачі з якого можна зробити висновки про не тривіальність побудованої моделі.

Також було проведено експеримент з можливості використанні сучасних методів вирішення транспортної задачі для вирішення багатоетапної транспортної задачі.

У результаті даного експерименту було показана неможливість вирішення багатоетапної транспортної задачі сучасними методами вирішення транспортної задачі.

З експерименту можна зробити декілька основних висновків:

а) класичні методи вирішення транспортної задачі не дають оптимальне рішення для багатоетапної транспортної задачі;

б) сума оптимальних шляхів на кожному етапі багатоетапної транспортної задачі не дають оптимальний шлях укупі;

в) доведена необхідність у модифікуванні класичних алгоритмів пошуку оптимальних шляхів;

г) під час формування алгоритму вирішення багатоетапної задачі дослідник зіткнеться проблемою перенасичення граничними умовами або їх нехваткою;

ґ) недостатність швидкодії при великій розмірності задачі.

Ціль дослідження досягнута – доведено неможливості пошуку оптимального шляху класичними методами у багатоетапній транспортній задачі.

Вирішення усіх практичних задач було проведено інтерактивно, за допомогою відповідних програм.

Як такої комбінації методів для вирішення багатоетапної транспортної задачі, на даний момент, не існує, а ті що є – не сумісні.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Стрекозов А. Д. Багатоетапна транспортна задача як модель динамічної системи. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 203–204.

2. Линейное и нелинейное программирование / Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. Э. Київ : Вища школа, 1975. 372 с.

3. Вивальнюк Л. М. Елементи лінійного програмування. Київ : Вища школа, 1975. 190 с.

4. Іксанов О. М., Шевченко В. І. Транспортна задача, її властивості та методи розв’язування: навч. посібник. Київ : Наукове видавництво "ТВіМС", 2010. 84 с.

5. Самойленко М. І., Скоков Б. Г. Дослідження операцій. Математичне програмування. Теорія масового обслуговування: навч. посібник. Харків : ХНАМГ, 2005. 176 с.

6. Вовк В. М., Зомчак Л. М. Оптимізаційні моделі економіки: навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 318 с.

7. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. Київ : КНЕУ, 2001. 303 с.

8. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Збірник задач. Київ : Видавничий Дім “Слово”, 2007. 472 с.

9. Ларіонов Ю. І., Левикін В. М., Хажмурадов М. А. Дослідження операцій в інформаційних системах. Харків : Компанія СМІТ, 2005. 364 с.

10. Томашевський В. М. Моделювання систем. Підручник. Київ : Видавнича група BHV, 2007. 352 с.

11. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. Київ : Видавнича група BHV, 2007. 544 с.

12. Andrianov A. The full Monge problem solution based on the linear programming (LP). *Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation* (22–27 August 2011) V.3. Moscow : Peoples’ Friendship University of Russia. 2012. P.94–101.

13. Канторович Л. В. Математико-экономические работы. Новосибирск : Наука, 2011. 760 с.

14. Berzina P., Istranikova E. The way of solving two-stage transportation problems. *Mathematical Methods in Economics*. 1999. P. 39 – 44.

15. Лукинский В. С., Цвириньо И. А., Малевич Ю. В. Модели и методы теории логистики. Санкт-Петербург : ПИТЕР, 2003. 219 с.