

$$(W_{\alpha\beta}(t,s)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r \varphi_j^{(1)}(t) \overline{\varphi_j^{(1)}(s)} & \sum_{j=1}^r \varphi_j^{(1)}(t) \overline{\varphi_j^{(2)}(s)} \\ \sum_{j=1}^r \varphi_j^{(2)}(t) \overline{\varphi_j^{(1)}(s)} & \sum_{j=1}^r \varphi_j^{(2)}(t) \overline{\varphi_j^{(2)}(s)} \end{pmatrix},$$

так как  $\varphi_j^{(\alpha)}(t) = \langle e^{itA} z_{0\alpha}, g_j \rangle = \int_0^\ell f^{(j)}(u, t) \psi_\alpha(u) du$ ,

то из  $U_\alpha^{(j)}(x, t) = U_\alpha^{(j)}(0, t) - i \int_0^x f^{(j)}(u, t) \overline{\psi_\alpha(u)} du$  при  $U_\alpha^{(j)}(0, t) \equiv 0$  получаем, полагая  $x = \ell$ ,  $\varphi_j^{(\alpha)}(t) = i U_\alpha^{(j)}(\ell, t)$ .

## Выводы

С помощью треугольных моделей диссипативных операторов построены представления для корреляционных матриц и векторных нестационарных случайных процессов, которые определяются только спектром (лежащим в верхней полуплоскости в случае дискретного спектра или бесконечнократного спектра в нуле).

*Научная новизна.* Впервые дан спектральный анализ корреляционных матриц и самих векторных нестационарных случайных процессов при помощи треугольных моделей диссипативных операторов и линейных систем, ассоциированных с операторными узлами или комплексами.

*Перспективы исследования.* Для получения спектральных представлений корреляционной матрицы ВНСП можно воспользоваться спектральным разложением адекватных векторных кривых  $x(t)$ , используя спектральную теорию систем коммутирующих несамосопряженных операторов, развитую в [8]. Однако соответствующие спектральные представления носят очень громоздкий характер, поэтому мы ограничились тем классом нестационарных векторных кривых, для которых все  $A_j$  совпадают (аналог стационарных и стационарно связанных случайных процессов, для которых в соответствующем гильбертовом пространстве  $A_j = A = A^*$  ( $j = 1, 2$ )).

*Практическая значимость* работы заключается в том, что, воспользовавшись универсальными моделями диссипативных операторов [4], можно рассмотреть векторные эволюционно представимые случайные процессы произвольного конечного ранга нестационарности и получить модельные представления для корреляционных матриц и соответствующих векторных случайных процессов.

**Литература:** 1. Розанов Ю. А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем // Успехи матем. наук. 2 (13). М., 1958. С. 92–142. 2. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963. 284 с. 3. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974. 576 с. 4. Livshits M. S. and Yantsevitch A. A. Operator colligations in Hilbert space, Wiley, New-York, 1979. 210 p. 5. Петрова А. Ю. Корреляционная теория некоторых классов нестационарных случайных функций конечного ранга нестационарности // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 1. С. 29–34. 6. Козут Е. А., Черемская Н. В., Янцевич А. А. О представлении резольвент вольтерровых операторов // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. Київ, Ін-т математики НАН України, 1998. Вип. 1(17). С. 99–101. 7. Курчев К. П. Об одном классе нестационарных случайных процессов // Сб. Теория функции, функциональный анализ и их приложения. X., 1971. Вып. 14. С. 150–159. 8. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. X.: Изд-во ХНУ, 2003. 342 с.

Поступила в редколлегия 14.12.2007

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Золотарев В. А.

**Янцевич Артем Артемович**, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики и информатики механико-математического фак-та ХНУ им. В. Н. Каразина. Научные интересы: спектральная теория несамосопряженных или неунитарных операторов; линейные системы, ассоциированные с операторными узлами; прикладная теория случайных процессов; прогнозы фильтрации случайных процессов. Адрес: Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4, тел. 707-55-42.

**Петрова Анжела Юрьевна**, соискатель, преподаватель кафедры информационных технологий и математики Харьковского гуманитарного университета «Народная украинская академия». Научные интересы: моделирование случайных процессов, нестационарные случайные функции. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Лермонтовская, 27, тел. 716-44-09 (доп. 2-22).

УДК 517.95:519.63

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

АРТЮХ А.В., ГИБКИНА Н.В., СИДОРОВ М.В.

Рассматривается применение метода R-функций в сочетании с методом последовательных приближений для решения задачи расчета плоских стационарных течений

вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в конечных односвязных областях. Доказывается сходимость построенного итерационного процесса в норме пространства  $W_2^3(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$  к обобщенному решению исходной задачи. Получены оценки скорости сходимости. Предложенный метод протестирован на модельных областях, полученные приближенные решения сравнены с решениями, полученными другими авторами.

## Введение

*Актуальность задачи.* Изучение законов движения жидкости играет важную роль в развитии техники и естествознания. Исследования в этой области стимулируются потребностями авиации, кораблестроения, теплоэнергетики, геофизики, биологии и т.д. за последние десятилетия сфера исследования и применения

явлений, связанных с движением жидкости, постоянно расширяется и охватывает ведущие направления промышленности (химические технологии, нефте- и газоразработка, металлургия и т. д.) и ряд естественных наук (биология, физика атмосферы и океана и др.). Во многих практически важных случаях жидкость можно с большой достоверностью считать вязкой несжимаемой ньютоновской средой, и проходящие в ней процессы могут быть промоделированы с помощью уравнений Навье-Стокса [1, 2]. Различные задачи, возникающие при изучении динамики вязкой жидкости, могут быть исследованы теоретическим путем или с помощью физического эксперимента. Однако с развитием ЭВМ все активнее используется математическое моделирование. Существует множество численных методов, применяемых при расчете вязких течений. Литература по этому направлению обширна [3-5 и др.]. В основном эти численные методы используют метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых. Точно учесть геометрию области можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций, разрабатываемой акад. В.Л. Рвачевым и его учениками [6, 7 и др.]. Задачи гидродинамики решались в работах С.В. Колосовой, К.В. Максименко-Шейко, И.Г. Суворовой, Т.И. Шейко и др. [8-11], однако в основном рассматривались задачи динамики идеальной жидкости или вязкой для случаев, когда можно построить решение за счет удачного выбора координат (осесимметрические течения, течения, обладающие винтовой симметрией, и т. п.), теплопроводность при этом не учитывалась. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования динамики вязкой теплопроводной жидкости на основе метода R-функций является актуальной научной проблемой.

*Цели и задачи исследования.* Целью данной работы является создание современного и эффективного метода математического моделирования плоских стационарных течений вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в конечных областях неклассической геометрии с кусочно-гладкой границей. Основные результаты по теоретическому обоснованию корректности начально-краевых и краевых задач для уравнения Навье-Стокса получены О.А. Ладыженской [12], Ж.-Л. Лионсом [13], Р. Темамом [14]. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: разработка и обоснование метода расчета плоских стационарных течений теплопроводной вязкой жидкости в односвязных областях неклассической геометрической формы с кусочно-гладкой границей в переменных «функция тока – температура» (приближение Буссинеска); применение разработанных численных методов для решения модельных задач расче-

та течения вязкой несжимаемой жидкости в односвязных областях при различных числах Рейнольдса и чисел Грасгофа и Пекле.

В этой работе методы, предложенные в [24], распространяются на систему нелинейных уравнений.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую стационарную задачу о конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Такое течение можно описать с помощью краевой задачи для системы дифференциальных уравнений относительно функции тока  $\psi(x, y)$  и температуры  $T(x, y)$  вида (приближение Буссинеска):

$$\Delta^2 \psi = \text{Re}J(\Delta\psi, \psi) + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} + \text{Re}F(x, y) \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\Delta T = \text{Pe}J(T, \psi) + \text{Pe}G(x, y) \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (3)$$

$$T|_{\partial\Omega} = \tilde{h}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь  $J(\Delta\psi, \psi) = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x}$ ,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $\text{Gr}$  – число Грасгофа;  $\text{Pe}$  – число Пекле;

$G(x, y)$  – объемная плотность тепловых источников;

$\tilde{h}(s)$  – распределение температуры на границе;  $\frac{d\tilde{f}}{ds}$ ,  $\tilde{g}$

– некоторые распределения нормальной и касательной составляющих скорости потока соответственно;

$\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\Omega$ . Предполагаем, что  $F, G \in L_2(\Omega)$ ,  $\tilde{f} \in W_2^1(\partial\Omega)$ ,  $\tilde{g}, \tilde{h} \in L_2(\partial\Omega)$ , система координат выбрана так, что сила тяжести сонаправлена с вектором  $(0, -1)$ .

## 2. Выбор и обоснование метода решения

Для решения задачи (1) – (4) применим процесс последовательных приближений.

Обозначим через  $(u_0, v_0)$  решение следующей задачи:

$$\Delta^2 u_0 = \text{Re}F(x, y) + \text{Gr} \frac{\partial v_0}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (5)$$

$$\Delta v_0 = \text{Pe}G(x, y) \text{ в } \Omega, \quad (6)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial u_0}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (7)$$

$$v_0|_{\partial\Omega} = \tilde{h}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (8)$$

В сделанных предположениях задача (5) – (8) однозначно разрешима и  $(u_0, v_0) \in W_2^4(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ . Ее решение может быть построено с помощью метода, базирующегося на методе R-функций [15 – 17].

В задаче (1) – (4) сделаем замену:

$$\psi = u_0 + u, \quad (9)$$

$$T = v_0 + v, \quad (10)$$

где  $u, v$  – новые неизвестные функции. Это приводит к задаче

$$\Delta^2 u = \text{Re}J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u) + \text{Gr} \frac{\partial v}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (11)$$

$$\Delta v = \text{Pe}J(v_0 + v, u_0 + u) \text{ в } \Omega, \quad (12)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (13)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (14)$$

Для решения задачи (11) – (14) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть начальное приближение  $(u^{(0)}, v^{(0)})$  задано. Тогда при известном значении  $(u^{(k)}, v^{(k)})$  функций  $(u, v)$  на  $k$ -й итерации приближение на  $(k+1)$ -й итерации находится как решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta^2 u^{(k+1)} = & \text{Re}J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) + \\ & + \text{Gr} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta v^{(k+1)} = \text{Pe}J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)}) \text{ в } \Omega, \quad (16)$$

$$u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (17)$$

$$v^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18)$$

Изучим вопрос сходимости итерационного процесса (15) – (18). На каждом шаге итерационного процесса нужно найти пару функций

$$(u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) \in (W_2^3(\Omega) \cap \dot{W}_2^2(\Omega)) \times \dot{W}_2^1(\Omega). \text{ Пусть}$$

$$\|u^{(j)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq M, \quad \|v^{(j)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq L \text{ для всех}$$

$j = 0, 1, 2, \dots, k$ . Из (15), (16) имеем

$$\begin{aligned} & \|u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \\ & \leq c_1 (\text{Re} \|J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} + \text{Gr} \left\| \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}) \leq \\ & \leq c_1 c_2 \text{Re} (\|u_0\|_{W_2^3(\Omega)} + \|u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)})^2 + c_1 \text{Gr} \|v^{(k)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \\ & \leq c_1 c_2 \text{Re} (M_0 + M)^2 + c_1 \text{Gr} L; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\|v^{(k+1)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_3 \text{Pe} \|J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq c_2 c_3 \text{Pe} \|v_0 + v^{(k)}\|_{W_2^1(\Omega)} \|u_0 + u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \\ & \leq c_2 c_3 \text{Pe} (L_0 + L)(M_0 + M), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\|u_0\|_{W_2^3(\Omega)} \leq M_0, \|v_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq L_0$ .

Из (19), (20) следует, что итерационный процесс (15) – (18) будет давать ограниченное решение, т.е. будет выполнено

$$\|u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq M, \quad \|v^{(k+1)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq L, \quad (21)$$

если

$$\text{Re} \leq \frac{M\mu}{c_1 c_2 (M_0 + M)^2}, \quad (22)$$

$$\text{Gr} \leq \frac{M(1-\mu)}{c_1 L}, \quad (23)$$

$$\text{Pe} \leq \frac{L}{c_2 c_3 (L_0 + L)(M_0 + M)}, \quad (24)$$

где  $0 < \mu < 1$ .

Докажем сходимость последовательности  $(u^{(k)}, v^{(k)})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Рассмотрим разности

$$(\delta u^{(k+1)}, \delta v^{(k+1)}) = (u^{(k+1)} - u^{(k)}, v^{(k+1)} - v^{(k)}).$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta^2 \delta u^{(k+1)} = & \text{Re}[J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - \\ & - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)})] + \text{Gr} \frac{\partial \delta v^{(k)}}{\partial x} \text{ в } \Omega, \\ \Delta \delta v^{(k+1)} = & \text{Pe}[J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)}) - \\ & - J(v_0 + v^{(k-1)}, u_0 + u^{(k-1)})] \text{ в } \Omega \end{aligned}$$

и краевым условиям

$$\delta u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \delta v^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ .

Тогда

$$\begin{aligned} & \|\delta u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq c_1 \text{Re} \|J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k)}) + \\ & + J(\Delta \delta u^{(k)}, u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} + c_1 \text{Gr} \left\| \frac{\partial \delta v^{(k)}}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq 2c_1 c_2 \text{Re} (M_0 + M) \|\delta u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} + c_1 \text{Gr} \|\delta v^{(k)}\|_{W_2^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \|\delta v^{(k+1)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_3 \text{Pe} \|J(v_0 + v^{(k-1)}, \delta u^{(k)}) + \\ & + J(\delta v^{(k)}, u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_2 c_3 \text{Pe} \left( \|v_0 + v^{(k-1)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \|\delta u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \right. \\ &+ \left. \|\delta v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \|u_0 + u^{(k-1)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \right) \leq \\ &\leq c_2 c_3 \text{Pe} \left( (L_0 + L) \|\delta u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \right. \\ &+ \left. (M_0 + M) \|\delta v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \right). \quad (26) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})^T = \left( \|\delta u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)}, \|\delta v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \right)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M) & c_1 \text{Gr} \\ c_2 c_3 \text{Pe}(L_0 + L) & c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M) \end{bmatrix}$$

(по смыслу задачи все входящие в вектор  $\xi^{(k)}$  и матрицу  $A$  величины неотрицательны).

Тогда (25), (26) в матричном виде запишется так:

$$\xi^{(k+1)} \leq A \xi^{(k)}. \quad (27)$$

Будем рассматривать (27) как систему линейных неравенств с нормой  $\|\xi\| = \max\{\xi_1, \xi_2\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|\xi^{(k+1)}\| &= \max\{\xi_1^{(k+1)}, \xi_2^{(k+1)}\} \leq \\ &\leq \max\{a_{11}\xi_1^{(k)} + a_{12}\xi_2^{(k)}, a_{21}\xi_1^{(k)} + a_{22}\xi_2^{(k)}\} \leq \\ &\leq \max\{a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}\} \max\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}\} = \\ &= \max\{a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}\} \|\xi^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Как видно из последнего неравенства, если

$$\max\{a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}\} = \alpha < 1, \quad (28)$$

то  $\|\xi^{(k)}\| = \max\{\|\delta u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)}, \|\delta v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)}\}$  будет сходиться к нулю. Ограничения (28) на элементы матрицы  $A$  приводят к таким ограничениям для чисел Рейнольдса  $\text{Re}$ , Грасгофа  $\text{Gr}$  и Пекле  $\text{Pe}$ :

$$\text{Re} \leq \frac{\alpha \mu_1}{2c_1 c_2 (M_0 + M)}, \quad (29)$$

$$\text{Gr} \leq \frac{\alpha(1 - \mu_1)}{c_1}, \quad (30)$$

$$\text{Pe} \leq \frac{\alpha}{c_2 c_3 (L_0 + M_0 + L + M)}. \quad (31)$$

Приходим к выводу о сходимости последовательности  $(u^{(k)}, v^{(k)})$  к некоторым функциям  $(u^*, v^*)$  из

$(W_{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap \dot{W}_{\frac{2}{2}}(\Omega)) \times \dot{W}_{\frac{1}{2}}(\Omega)$ , причем имеют место оценки

$$\max\left\{ \|u^* - u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)}, \|v^* - v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \right\} \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma, \quad (32)$$

где обозначено  $\gamma = \max\left\{ \|\delta u^{(1)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)}, \|\delta v^{(1)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \right\}$ .

Докажем, что предельные функции  $(u^*, v^*)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям (11), (12). Рассмотрим уравнение (11). Удовлетворение краевым условиям (13) очевидно. Пусть  $u^* \in W_{\frac{3}{2}}(\Omega)$ . С учетом (15), (31), (32) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \Delta^2 u^* - \text{Re} J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*) - \text{Gr} \frac{\partial v^*}{\partial x} \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq \\ &\leq \left\| \Delta^2 (u^* - u^{(k+1)}) \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \text{Re} \left\| J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*) - \right. \\ &- \left. J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \\ &+ \text{Gr} \left\| \frac{\partial}{\partial x} (v^* - v^{(k)}) \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq \|u^* - u^{(k+1)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \\ &+ 2\text{Re} \tilde{c}_2 \|u_0 + u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|u^* - u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \text{Gr} \|v^* - v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq \\ &\leq (\alpha + 2\text{Re} \tilde{c}_2 (M_0 + M) + \text{Gr}) \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma \rightarrow 0 \quad \text{при} \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим уравнение (12). Удовлетворение краевому условию (14) очевидно. Пусть  $v^* \in W_{\frac{1}{2}}(\Omega)$ . С учетом (31), (32), (16) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \Delta v^* - \text{Pe} J(v_0 + v^*, u_0 + u^*) \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq \\ &\leq \left\| \Delta (v^* - v^{(k+1)}) \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \\ &+ \text{Pe} \left\| J(v_0 + v^*, u_0 + u^*) - J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)}) \right\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq \\ &\leq \|v^* - v^{(k+1)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \tilde{c} \text{Pe} \left( \left\| J(v_0 + v^*, u^* - u^{(k)}) \right\|_{L_2(\Omega)} + \right. \\ &+ \left. \left\| J(v^* - v^{(k)}, u_0 + u^*) \right\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq \|v^* - v^{(k+1)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \\ &+ \tilde{c} c_2 \text{Pe} \left( \|v_0 + v^*\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \|u^* - u^{(k)}\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \right. \\ &+ \left. \|v^* - v^{(k)}\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)} \|u_0 + u^*\|_{W_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq (\alpha + \text{Re}\tilde{c}_2(L_0 + M_0 + L + M)) \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \gamma \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

Выясним теперь, при каких ограничениях на числа Рейнольдса  $\text{Re}$ , Грасгофа  $\text{Gr}$  и Пекле  $\text{Pe}$  пара  $(u^*, v^*)$  будет единственным решением дифференциальных уравнений (11), (12). Пусть задача (11) – (14) имеет еще одно решение  $(u^{**}, v^{**})$ , удовлетворяющее условиям (21). Рассмотрим разности  $\delta u = u^* - u^{**}$  и  $\delta v = v^* - v^{**}$ . Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta^2 \delta u &= \text{Re} \left[ J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*) - \right. \\ &\left. - J(\Delta(u_0 + u^{**}), u_0 + u^{**}) \right] + \text{Gr} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \quad \text{в } \Omega, \\ \Delta \delta v &= \\ &= \text{Pe} \left[ J(v_0 + v^*, u_0 + u^*) - J(v_0 + v^{**}, u_0 + u^{**}) \right] \quad \text{в } \Omega. \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} &\leq \|\delta u\|_{W_3^2(\Omega)} \leq c_1 (\text{Re} \|J(\Delta(u_0 + u^*), u_0 + u^*) - \\ &- J(\Delta(u_0 + u^{**}), u_0 + u^{**})\|_{L_2(\Omega)} + \text{Gr} \left\| \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}) \leq \\ &\leq c_1 (\text{Re} \|J(\Delta(u_0 + u^*), \delta u) - \\ &- J(\Delta \delta u, u_0 + u^*)\|_{L_2(\Omega)} + \text{Gr} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}) \leq \\ &\leq c_1 c_2 \text{Re} \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} (\|u_0 + u^{**}\|_{W_3^3(\Omega)} + \|u_0 + u^*\|_{W_3^3(\Omega)}) + \\ &+ c_1 \text{Gr} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)} \leq \\ &\leq 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M) \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} + c_1 \text{Gr} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}, \\ \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)} &\leq \|\delta v\|_{W_3^2(\Omega)} \leq \\ &\leq c_3 \text{Pe} \|J(v_0 + v^*, u_0 + u^*) - J(v_0 + v^{**}, u_0 + u^{**})\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= c_3 \text{Pe} \|J(v_0 + v^{**}, \delta u) + J(\delta v, u_0 + u^{**})\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq c_2 c_3 \text{Pe} (\|v_0 + v^{**}\|_{W_3^1(\Omega)} \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} + \\ &+ \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)} \|u_0 + u^{**}\|_{W_3^3(\Omega)}) \leq \\ &\leq c_2 c_3 \text{Pe}(L_0 + L) \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} + c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M) \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} \leq 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M) \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} + c_1 \text{Gr} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)} &\leq c_2 c_3 \text{Pe}(L_0 + L) \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} + \\ &+ c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M) \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Перепишем систему неравенств (33), (34) в виде

$$(1 - 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M)) \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} \leq c_1 \text{Gr} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)},$$

$$(1 - c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M)) \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)} \leq c_2 c_3 \text{Pe}(L_0 + L) \|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)}.$$

Из (28), (30) следует, что  $1 - 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M) > 0$  и  $1 - c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M) > 0$ . Тогда

$$\|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} \leq \frac{c_1 \text{Gr}}{1 - 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M)} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}, \quad (35)$$

$$\|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} \geq \frac{1 - c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M)}{c_2 c_3 \text{Pe}(L_0 + L)} \|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)}. \quad (36)$$

Система (35), (36) будет иметь лишь нулевое решение

$\|\delta u\|_{W_3^3(\Omega)} = 0$ ,  $\|\delta v\|_{W_3^1(\Omega)} = 0$ , если

$$\frac{c_1 \text{Gr}}{1 - 2c_1 c_2 \text{Re}(M_0 + M)} < \frac{1 - c_2 c_3 \text{Pe}(M_0 + M)}{c_2 c_3 \text{Pe}(L_0 + L)}. \quad (37)$$

Объединив (22) – (24) и (28) – (30), получим следующие ограничения для чисел Рейнольдса  $\text{Re}$ , Грасгофа  $\text{Gr}$  и Пекле  $\text{Pe}$ :

$$\text{Re} < \min \left\{ \frac{M\mu}{c_1 c_2 (M_0 + M)^2}, \frac{\alpha \mu_1}{2c_1 c_2 (M_0 + M)} \right\}, \quad (38)$$

$$\text{Gr} < \min \left\{ \frac{M(1-\mu)}{c_1 L}, \frac{\alpha(1-\mu_1)}{c_1} \right\}, \quad (39)$$

$$\text{Pe} < \min \left\{ \frac{L}{c_2 c_3 (L_0 + L)(M_0 + M)}, \frac{\alpha}{c_2 c_3 (L_0 + M_0 + L + M)} \right\}, \quad (40)$$

где  $\mu$  и  $\mu_1$  – произвольные числа из  $(0, 1)$ , а константы  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  зависят только от области  $\Omega$ .

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

**Теорема.** При достаточно малых числах Рейнольдса  $\text{Re}$ , Грасгофа  $\text{Gr}$  и Пекле  $\text{Pe}$ , удовлетворяющих условию (37), последовательные приближения, формируемые по схеме (15) – (18), сходятся к единственному обобщенному решению задачи (11) – (13), принадлежащему  $(W_3^3(\Omega) \cap \dot{W}_2^2(\Omega)) \times \dot{W}_2^1(\Omega)$ .

Условие малости для чисел  $Re$ ,  $Gr$  и  $Pe$  формулируется в виде неравенства (38) – (40).

При реализации вычислительного процесса по схеме (15) – (18) функции  $u^{(k+1)}$  и  $v^{(k+1)}$  также могут быть найдены с помощью метода Рунге.

Как видно из (15) – (18), эта задача при известных функциях  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $u^{(k)}$  и  $v^{(k)}$  распадается на две независимые задачи (15), (17) и (16), (18).

С задачей (15), (17) свяжем оператор  $A_I$  этой краевой задачи, действующий по правилу

$$A_I u \equiv \Delta^2 u,$$

с областью определения

$$D(A_I) = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (41)$$

Пополнив множество (41) в норму, порожденной скалярным произведением

$$[u_1, u_2]_I = \int_{\Omega} \Delta u_1 \Delta u_2 \, dx \, dy,$$

получим энергетическое пространство  $H_I$ .

С задачей (16), (18) свяжем оператор  $A_{II}$  этой краевой задачи, действующий по правилу

$$A_{II} v \equiv -\Delta v,$$

с областью определения

$$D(A_{II}) = \left\{ v \mid v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (42)$$

Пополнив множество (42) в норму, порожденной скалярным произведением

$$[v_1, v_2]_{II} = \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v_2 \, dx \, dy,$$

получим энергетическое пространство  $H_{II}$ . Тогда при известных функциях  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $u^{(k)}$  и  $v^{(k)}$  задача (15), (17) эквивалентна задаче нахождения в  $H_I$  минимума функционала

$$I_I[u] = \int_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2u(\operatorname{Re} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)})) + \operatorname{Gr} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}] \, dx \, dy, \quad (43)$$

а задача (16), (18) эквивалентна задаче нахождения минимума в  $H_{II}$  функционала [19]

$$I_{II}[v] = \int_{\Omega} [(\nabla v)^2 + 2v \operatorname{Pe} J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)})] \, dx \, dy \quad (44)$$

Выберем систему координатных элементов  $\{\varphi_i\}$  такую, что

- 1)  $\varphi_i \in H_I$  для всех  $i$ ;
- 2) система  $\{\varphi_i\}$  полна в  $H_I$ ;

3) для любого  $N$  система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  линейно независима;

и систему координатных элементов  $\{\tau_i\}$ , такую, что

- 1)  $\tau_i \in H_{II}$  для всех  $i$ ;
- 2) система  $\{\tau_i\}$  полна в  $H_{II}$ ;
- 3) для любого  $N$  система  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  линейно независима.

Функцию  $u^{(k+1)}$ , реализующую минимум функционала (43), будем искать в виде

$$u_{N_1}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(k+1)} \varphi_i, \quad (45)$$

а функцию  $v^{(k+1)}$ , реализующую минимум функционала (44), будем искать в виде

$$v_{N_2}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{N_2} d_i^{(k+1)} \tau_i. \quad (46)$$

Согласно методу Рунге [19] задача нахождения коэффициентов  $c_i^{(k+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$ , из (45) и коэффициентов  $d_i^{(k+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_2$ , из (46) приводит к решению двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$A_I \mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{b}_I^{(k+1)}, \quad (47)$$

$$A_{II} \mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{b}_{II}^{(k+1)}, \quad (48)$$

где

$$A_I = [a_{ij}^I]_{N_1 \times N_1}, \quad \mathbf{b}_I^{(k+1)} = [b_i^{(k+1)}]_{N_1 \times 1}, \quad \mathbf{c}^{(k+1)} = [c_i^{(k+1)}]_{N_1 \times 1},$$

$$A_{II} = [a_{ij}^{II}]_{N_2 \times N_2}, \quad \mathbf{b}_{II}^{(k+1)} = [b_i^{(k+1)}]_{N_2 \times 1},$$

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = [d_i^{(k+1)}]_{N_2 \times 1},$$

$$a_{ij}^I = \int_{\Omega} \Delta \varphi_i \Delta \varphi_j \, dx \, dy, \quad (49)$$

$$b_i^{(k+1)} = \operatorname{Re} \int_{\Omega} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \varphi_i \, dx \, dy + \operatorname{Gr} \int_{\Omega} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \varphi_i \, dx \, dy, \quad (50)$$

$$a_{ij}^{II} = \int_{\Omega} \nabla \tau_i \nabla \tau_j \, dx \, dy, \quad (51)$$

$$b_i^{(k+1)} = -\operatorname{Pe} \int_{\Omega} J(v_0 + v^{(k)}, u_0 + u^{(k)}) \tau_i \, dx \, dy. \quad (52)$$

Как видно, матрицы систем (47), (48) являются симметричными, не изменяются от итерации к итерации, вычисляются один раз при решении задачи (5) – (8), а на каждом шаге итерационного процесса лишь пересчитываются векторы правых частей, что приво-

дит к вычислению  $N_1 + N_2$  интегралов вида (50), (52). Используя свойства якобианов, интегралы (50) и (52) можно преобразовать к виду

$$b_i^{I(k+1)} = \operatorname{Re} \int_{\Omega} J(u_0 + u^{(k)}, \varphi_i) \Delta(u_0 + u^{(k)}) dx dy - \operatorname{Gr} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} v^{(k)} dx dy,$$

$$b_i^{II(k+1)} = -\operatorname{Pe} \int_{\Omega} J(u_0 + u^{(k)}, \tau_i)(v_0 + v^{(k)}) dx dy,$$

который уже не содержит под интегралом производных третьего порядка.

Из теорем о сходимости метода Рунге [19] и теоремы в данной статье следует, что при числах Рейнольдса  $Re$ , Грасгофа  $Gr$  и Пекле  $Pe$ , удовлетворяющих соотношениям (37) – (40), при  $N_1 \rightarrow \infty$ ,  $N_2 \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$  последовательность  $(u_0 + u_{N_1}^{(k)}, v_0 + v_{N_2}^{(k)})$  сходится к функциям  $(\psi^*, T^*) = (u_0 + u^*, v_0 + v^*)$ , являющимся решением (вообще говоря, обобщенным) задачи (1) – (4).

Рассмотрим задачу (5) – (8). Ее можно решить следующим образом. Пусть известны функции  $f \in W_2^5(\Omega)$ ,  $g \in W_2^2(\Omega)$ ,  $h \in W_2^2(\Omega)$ , такие, что  $f|_{\partial\Omega} = \tilde{f}$ ,  $g|_{\partial\Omega} = \tilde{g}$ ,  $h|_{\partial\Omega} = \tilde{h}$ . Тогда в соответствии со структурным методом В.Л. Рвачева [6] структуру решения задачи (5) – (8) можно записать в виде

$$u_0 = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi_0, \quad (53)$$

$$v_0 = h + \omega \Upsilon_0, \quad (54)$$

где  $\Phi_0, \Upsilon_0$  – неопределенные компоненты,

$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$ , а функция  $\omega(x, y)$  удовлетворяет таким условиям:

- 1)  $\omega(x, y) \in W_2^4(\Omega)$ ;
- 2)  $\omega(x, y) = 0$  при всех  $(x, y) \in \partial\Omega$ ;
- 3)  $\omega(x, y) > 0$  при всех  $(x, y) \in \Omega$ ;
- 4)  $|\nabla \omega| = 1$  при всех  $(x, y) \in \partial\Omega$ .

Для аппроксимации неопределенных компонент в (53), (54) можно воспользоваться методом Рунге [19], представив  $\Phi_0$  и  $\Upsilon_0$  в виде линейной комбинации элементов какой-либо координатной системы (например, полиномов, сплайнов и пр.).

### Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент был проведен для прямоугольной области. Предполагалось, что массовые силы  $\mathbf{f}$  потенциальны, т.е.  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$  и внутренние источники тепла отсутствуют, а значит,  $F(x, y) \equiv 0$ ,  $G(x, y) \equiv 0$ . В качестве базисных функций выбирались степенные полиномы, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра, кубические сплайны

Шенберга. Сплайны показали большую вычислительную устойчивость и им было отдано предпочтение. Шаг сетки сплайнов выбран  $h_x = h_y = 0,1$ . При вычислении интегралов в системах Рунге использовалась формула Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате  $0,1 \times 0,1$ . Предполагалось, что жидкость ограничена твердыми неподвижными стенками. Итерационный процесс был построен для чисел Рейнольдса  $Re = 1$ , Пекле  $Pe = 1$  и Грасгофа  $Gr = 50, 150$ . Условие окончания итерационного процесса выбрано в виде

$$\max \left\{ \|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}, \|T^{(k+1)} - T^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \right\} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Рассмотрим прямоугольную область  $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$ . Математическая модель свободноконвективного течения имеет вид

$$\Delta^2 \psi = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) + \operatorname{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (55)$$

$$\Delta T = \operatorname{Pe} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \text{ в } \Omega, \quad (56)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (57)$$

$$T|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 - |2x - 1|, & y = 0; \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega \setminus \{y = 0\}. \end{cases} \quad (58)$$

Итерационный процесс последовательных приближений для задачи (55), (58) строим следующим образом. Задаем начальное приближение – пару функций  $\psi^{(0)}(x, y)$ ,  $T^{(0)}(x, y)$ . Его можно задать произвольно или, например, взять решение задачи

$$\Delta^2 \psi^{(0)} = \operatorname{Gr} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}, \quad \Delta T^{(0)} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (59)$$

$$\psi^{(0)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (60)$$

$$T^{(0)}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 - |2x - 1|, & y = 0; \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega \setminus \{y = 0\}. \end{cases} \quad (61)$$

Для решения задачи (59) – (61) воспользуемся методом R-функций. Структура решения имеет вид

$$\psi^{(0)}(x, y) = \omega^2(x, y) \Phi^{(0)}(x, y), \quad (62)$$

$$T^{(0)}(x, y) = T_0(x, y) + \omega(x, y) \Upsilon^{(0)}(x, y), \quad (63)$$

где  $\omega(x, y) = \left[ \frac{1}{a} x(a - x) \right] \wedge_{\alpha} \left[ \frac{1}{b} y(b - y) \right]$ ,

$$T_0(x, y) = \frac{2x\omega_1(x, y)\omega_3(x, y) + (2-2x)\omega_1(x, y)\omega_2(x, y)}{\omega_2(x, y)\omega_3(x, y) + \omega_1(x, y)\omega_3(x, y) + \omega_1(x, y)\omega_2(x, y)} \quad (64)$$

$$\omega_1(x, y) = x(1-x)(1-y),$$

$$\omega_2(x, y) = \left[ \frac{1}{16} - \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 - y^2 \right] \wedge_\alpha(-y^2),$$

$$\omega_3(x, y) = \left[ \frac{1}{16} - \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - y^2 \right] \wedge_\alpha(-y^2). \quad (65)$$

Итерационный процесс имеет вид

$$\Delta^2 \psi^{(k+1)} = \text{Re} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta \psi^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta \psi^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} \right) \right) + \text{Gr} \frac{\partial \Gamma^{(k)}}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (66)$$

$$\Delta \Gamma^{(k+1)} = \text{Pe} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} \right) \right] \text{ в } \Omega, \quad (67)$$

$$\psi^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (68)$$

$$\Gamma^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 - |2x - 1|, & y = 0; \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega \setminus \{y = 0\}; \end{cases} \quad (69)$$

Структура решения задачи (66) – (69) на каждой итерации имеет вид

$$\psi^{(k+1)}(x, y) = \omega^2(x, y)\Phi^{(k+1)}(x, y), \quad (70)$$

$$\Gamma^{(k+1)}(x, y) = T_0(x, y) + \omega(x, y)\Upsilon^{(k+1)}(x, y), \quad (71)$$

где  $\Phi^{(k+1)}$ ,  $\Upsilon^{(k+1)}$  – неопределенные компоненты структуры, а функции  $\omega(x, y)$ ,  $T_0(x, y)$  определяются с помощью соотношений (64), (65).

Неопределенные компоненты  $\Phi^{(k)}$ ,  $\Upsilon^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , в (62), (63) и в (70), (71) аппроксимировались кубическими сплайнами Шенберга [22, 23]:

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}(x, y) &= \sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_y+1} c_{ij}^{(k)} B_3 \left( \frac{N_x x}{a} - i \right) B_3 \left( \frac{N_y y}{b} - j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_y+1} c_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}(x, y), \end{aligned}$$

$$\Upsilon^{(k)}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_y+1} d_{ij}^{(k)} B_3 \left( \frac{N_x x}{a} - i \right) B_3 \left( \frac{N_y y}{b} - j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_y+1} d_{ij}^{(k)} \varphi_{ij}(x, y).$$

Вычислительный эксперимент был проведен при  $a = b = 1$ . Результаты в виде линий уровня температуры (изотерм) и линий уровня функции тока (линий тока) приведены на рис. 1, 2 ( $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pe} = 1$  и  $\text{Gr} = 50$ ). Сходимость с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  была достигнута за 7 итераций.

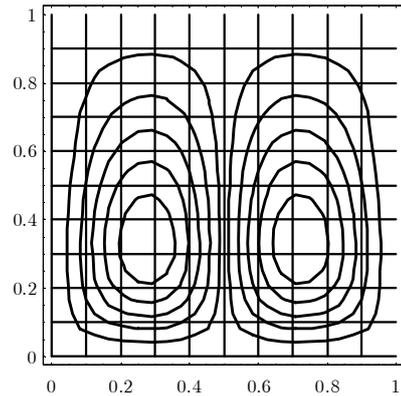


Рис. 1. Линии уровня функции тока при  $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pe} = 1$  и  $\text{Gr} = 50$  ( $\max_{(x, y) \in \Omega} \psi(x, y) = 0,0064$ )

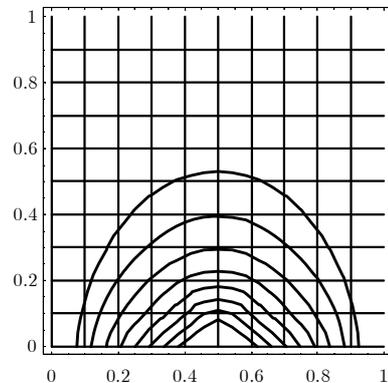


Рис.2. Изотермы при  $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pe} = 1$  и  $\text{Gr} = 50$ .

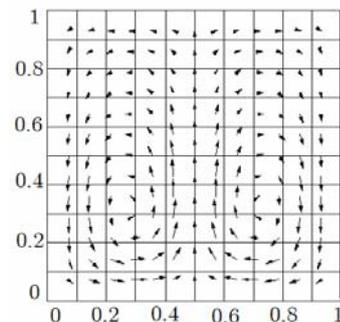


Рис.3. Векторное поле скоростей при  $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pe} = 1$  и  $\text{Gr} = 50$

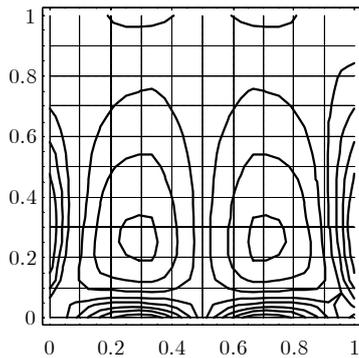


Рис. 4. Линии равной завихренности

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов [1, 2] и результатами, полученными методом фиктивных областей [22, 23]. Расхождения составили около 5%.

### Выводы

Предлагаемый метод показал свою эффективность на модельной задаче и, по мнению авторов, имеет ряд преимуществ. Матрицы систем (47), (48) являются симметричными и не изменяются от итерации к итерации, т.е. становятся универсальными. Это даёт возможность использовать одну и ту же матрицу при различных числах Рейнольдса, Грасгофа, Пекле и на каждой итерации пересчитывать только правые части системы, что снижает вычислительные затраты по сравнению с другими методами. В отличие от сеточных методов решение получается в явном аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование для определения различных характеристик течения.

*Научная новизна* полученных результатов заключается в том, что впервые разработан итерационный метод решения систем нелинейных уравнений для функции тока и температуры в односвязных областях неклассической геометрии с кусочно-гладкой границей, основанный на совместном применении метода R-функции и метода последовательных приближений, отличающийся от известных методов более простым вычислительным алгоритмом (решение нелинейной задачи сводится к решению последовательности задач с одним и тем же линейным оператором) и универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области), что позволило получить приближенное решение задачи расчета этого класса течений в областях неклассической геометрии. Получены условия и оценки скорости сходимости в норме  $W_2^3(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$  к обобщенному решению задачи расчета стационарного течения вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в односвязной области с кусочно-гладкой границей.

*Практическая значимость полученных результатов.* Разработанные методы расчета плоских течений вязкой жидкости в односвязных областях являются

простыми в алгоритмизации и более универсальными, чем используемые в данное время, поскольку при переходе от одной области к другой требуется лишь изменить уравнение границы. Полученные результаты позволяют проводить вычислительные эксперименты во время математического моделирования различных физико-механических, биологических течений (течения в инжекторах, форсунках, соплах, обтекание подводных тел и т. д.).

**Литература:** 1. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с. 2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. 3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с. 4. Donea J., Huerta A. Finite Element Methods for flow problems. London: Wiley, 2003. 350 p. 5. Zienkiewicz O.C., Taylor R. L. The finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dynamics. Oxford: BH, 2000. 334 p. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 7. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач: Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр. Харьков, 1975. 75 с. 8. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. №31. С. 141–148. 9. Колосова С.В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе // Прикл. мех., 1971. №7. В. 10. С. 100–105. 10. Максименко-Шейко К.В. Исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом R-функций // Проблемы машиностроения, 2001. Т. 4, № 3 – 4. С. 108 – 116. 11. Рвачев В. Л., Корсунский А.Л., Шейко Т.И. Метод R-функций в задаче о течении Гартмана // Магнитная гидродинамика. 1982. № 2. С. 64 – 69. 12. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Мир, 1972. 588 с. 13. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных задач. М.: Мир, 1972. 588 с. 14. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408с. 15. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика, № 3, 2002. с. 52 – 54. 16. Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 4. С. 77 – 78. 17. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. № 602, 2003. С. 61 – 67. 18. Слободецкий Л.Н. Обобщение пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1958, Т. 197. С. 54 – 112. 19. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. 20. Федотова Е.А. Атомарная и сплайн-аппроксимация решений краевых задач математической физики: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Харьков, 1985. 170 с. 21. Федотова Е.А. Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программируемых системах серии «Поле»: Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; 202. Харьков, 1984. 60 с. 22. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 156 с. 23. Вабищевич П.Н., Вабищевич Т.Н. Численное решение стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости на основе метода фиктивных областей // Вычислительная математика и математическое обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во Моск. ун-

та, 1985. С. 255 – 262. 24. *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // *Радиоэлектроника и информатика*. 2007. № 2. С. 50 – 57.

Поступила в редколлегию 20.12.2007

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

**Артюх Антон Владимирович**, студент группы ПМ-04-1 факультета ПММ ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, численные методы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-36.

**Гибкина Надежда Валентиновна**, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: экономический риск, актуарная математика, математическая физика, оптимальное управление динамическими объектами. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-36.

**Сидоров Максим Викторович**, ассистент каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-36.

УДК 546.28

## **АРХИТЕКТУРА И ФУНКЦИОНАЛЬНОСТЬ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВЫРАЩИВАНИЕМ СЛИТКОВ КРЕМНИЯ**

*ОКСАНИЧ А.П., ПЕТРЕНКО В.Р.,  
ПРИТЧИН С.Э.*

Рассматриваются вопросы управления процессом выращивания слитков кремния диаметром до 200 мм. Предлагается архитектура двухуровневой системы управления процессом выращивания слитков монокристаллического кремния. Описываются функции подсистем верхнего и нижнего уровней.

### **Введение**

В настоящее время получение слитков кремния, выращиваемых методом Чохральского, качество и диаметр которых соответствует мировым требованиям, возможно только при высоком качестве функционирования системы управления процессом выращивания.

Современные системы управления должны обеспечивать воспроизводимость результатов технологических процессов при достаточно высоких значениях показателей качества выращенных кристаллов, которые определяются техническими условиями и требованиями заказчика. Это может быть достигнуто только путем использования в контурах управления математических моделей с настраиваемыми параметрами систем оперативной идентификации этих моделей и систем оптимизации режимов. При таком подходе до минимума сводится влияние на процесс «человеческого фактора».

Вопросу создания систем управления уделялось достаточно большое внимание с самого начала промышленного производства слитков кремния. Уровень автоматизации на том или ином этапе определялся степенью развития базы и средств вычислительной техники [1-4].

Достаточно подробный анализ развития автоматизации управления процессом выращивания монокристаллов по методу Чохральского представлен в работе [5].

Первые системы динамических моделей, описывающих процесс выращивания монокристаллов [4,5], были получены на основе классического подхода к решению задачи идентификации объекта управления. Модель процесса выращивания в пространстве состояний была предложена и развита Г.А. Сатункиным [7,8].

В работах [12-14] развит подход к моделированию передаточных функций, необходимых для регулирования диаметра растущего кристалла, на основе использования класса комбинированных моделей «передаточная функция – шум» [15]. Описание процедуры синтеза схемы регулирования с применением такой модели представлено в [16].

Современные подходы к проектированию эффективных автоматизированных систем управления процессом выращивания слитков по методу Чохральского достаточно подробно изложены в работах [9, 10], а принципы построения системы управления технологическим процессом выращивания бездефектного кремния с поддержанием заданных диаметра и температуры расплава описаны в [11, 12]. Примером реализации этих подходов и принципов может служить автоматизированная система «Кремь» [17]. Именно эксплуатация этой системы позволила выявить дальнейшие пути повышения эффективности систем управления процессом выращивания. Основные из них: замена локальной стойки управления установкой в целях обеспечения возможности реализации ею всех локальных контуров регулирования параметров процесса, оставляя за основной ПЭВМ настройку параметров регуляторов; обеспечение возможности с помощью одной ПЭВМ управлять работой нескольких установок; ведение информационной базы системы на основе использования промышленных СУБД; обеспечение информационной связи с другими технологическими участками производства; применение систем идентификации управляемых процессов и систем адаптации параметров используемых моделей.