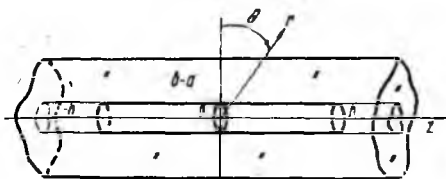


УДК 621.396.67

И. П. ЗАЙКИН, канд. техн. наук, А. А. ЗЕЛЕНСКИЙ, канд. техн. наук,
Г. И. КОШЕВОЙ, канд. физ.-мат. наук, Ю. Н. ТАМУРОВ, канд. техн. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОКОВ В ИЗОЛИРОВАННОЙ АНТЕННЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Анализ изолированной антенны проведен для окружающей среды электрически намного плотнее изолирующей оболочки, при которой наиболее точным оказывается простое приближение длинной линии*. Рассмотрен важный для практики случай, когда электрическая плотность слоя, окружающего трубчатую антенну, гораздо больше плотности среды с помещенной в ней изолированной антенной.



Вывод интегрального уравнения для тока. Исследуемая структура состоит из идеально проводящего цилиндра радиуса a длины $2h$ с абсолютно тонкими стенками, расположенного внутри бесконечного диэлектрического цилиндра со стенками толщиной $b-a$ (рисунок).

Выберем цилиндрическую систему координат с осью oz , совпадающей с осями цилиндров и с центром в середине проводящего цилиндра. Предположим, что $ka \ll 1$ (k — волновое число свободного пространства). Электромагнитное поле, создаваемое генератором дельта-

* Кинг Р., Смит Т. Антенны в материальных средах: В 2 т. М., 1984. Т. 2. 824 с.

функции, размещенном в центре антенны и поддерживающем при $z = 0$, $r = a$ электрическое поле $E_z^0 = -V_0^e \delta(z)$, где V_0^e — ЭДС генератора, найдем в виде электрического векторного потенциала, который имеет только одну составляющую $\vec{A} = (0, 0, A_z(r, z))$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2) A_z(r, z) &= 0 \quad r < a, \quad r > b; \\ (\Delta + k^2 \varepsilon) A_z(r, z) &= 0, \quad a < r < b.\end{aligned}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа; ε — диэлектрическая проницаемость изолирующего цилиндра.

Воспользуемся преобразованием Фурье

$$A(r, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} A_z(r, z) e^{i\zeta z} dz,$$

для которого будем иметь уравнение Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{A}}{\partial r} \right) + \xi_\varepsilon^2 \hat{A} = 0, \quad (2)$$

$$\xi_\varepsilon^2 = k^2 \varepsilon - \xi^2.$$

Решение (2) запишем в виде

$$A(r, \zeta) = \begin{cases} FJ_0(r\xi_1), & r < a; \\ AH_0^{(1)}(r\xi_\varepsilon) + BJ_0(r\xi_\varepsilon), & a < r < b; \\ CH_0^{(1)}(r\xi_1), & r > b, \end{cases} \quad (3)$$

где $\xi_1 = \xi_\varepsilon$, если $\varepsilon = 1$, а для записи в областях $r < a$ и $r > b$ учтено поведение поля при $r = 0$ и $r \rightarrow \infty$.

Удовлетворим граничные условия при $r = a$ и $r = b$. Так как

$$E_z(r, z) = -\frac{1}{ik} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z, & a < r < b; \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z, & r < a, \quad r < b \end{cases} \quad (4)$$

или для преобразований Фурье

$$\hat{E}_z = \frac{\xi_1^2}{ik} \hat{A}, \quad r < a, \quad r > b;$$

$$\hat{E}_z = \frac{\xi_\varepsilon^2}{ik\varepsilon} \hat{A}, \quad a < r < b,$$

выполнение граничных условий при $r = a$ даст соотношение

$$\xi_\varepsilon^2 [AH_0^{(1)}(a\xi_\varepsilon) + BJ_0(a\xi_\varepsilon)] = \varepsilon \xi_1^2 FJ_0(a\xi_1), \quad (5)$$

если $r = b$ —

$$\xi_\varepsilon^2 [AH_0^{(1)}(b\xi_\varepsilon) + BJ_0(b\xi_\varepsilon)] = \varepsilon \xi_1^2 CH_0^{(1)}(b\xi_1). \quad (6)$$

Учитывая, что $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, а $B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$, и выполняя условия непрерывности B_θ на границе $r = b$, получаем

$$\{A [H_0^{(1)}(r\xi_e)]'_r + B [J_0(r\xi_e)]'_r\}_{r=b} = C [H_0^{(1)}(r\xi_1)]'_r \Big|_{r=b}$$

или после дифференцирования цилиндрических функций

$$A\xi_e H_1^{(1)}(b\xi_e) + B\xi_e J_1(b\xi_e) = C\xi_1 H_1^{(1)}(b\xi_1). \quad (7)$$

При переходе через границу $r = a$ касательная составляющая вектора \vec{B} испытывает разрыв, равный плотности поверхностного тока на проводящем цилиндре. Следовательно, когда $|z| < h$, $B_\theta(a_+, z) - B_\theta(a_-, z) = j_z(z)$ или в образах Фурье

$$A\xi_e H_1^{(1)}(a\xi_e) + B\xi_e J_1(a\xi_e) - F\xi_1 J_1(a\xi_1) = \hat{j}_z(\zeta). \quad (8)$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов A , B , C , F в выражении (4) имеем линейные алгебраические уравнения (5) — (8). Определитель этой системы имеет вид

$$D(\zeta) = \xi_1 \{ [e^{2\xi_1^2} H_0^{(1)}(b\xi_1) B_{11}(\xi_e) + e\xi_1 \xi_e H_1^{(1)}(b\xi_1) B_{01}(\xi_e)] \times \\ \times \xi_e^2 \xi_1 J_0(a\xi_1) - N(\zeta) J_1(a\xi_1) \}, \quad (9)$$

где

$$N(\zeta) = [\xi_e^2 H_1^{(1)}(b\xi_1) B_{00}(\xi_e) + e\xi_1 \xi_e H_0^{(1)}(b\xi_1) B_{10}(\xi_e)] \xi_e^2 \xi_1; \\ B_{km}(\xi_e) = J_k(b\xi_e) H_m^{(1)}(a\xi_e) - J_m(a\xi_e) H_k^{(1)}(b\xi_e).$$

Находя из системы (5) — (8) коэффициент

$$F = \hat{j}_z(\zeta) \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$$

и подставляя его в (3), записываем

$$\vec{A}_z(r, \zeta) = \hat{j}_z(\zeta) \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} J_0(r\xi_1), \quad r < a. \quad (10)$$

Учитывая, что на поверхности идеального проводника касательная составляющая вектора \vec{E} равна нулю везде, кроме источника

$$E_z(a, z) = -V_0^\circ \delta(z),$$

и используя (4), получаем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) A_z(a, z) = -ikV_0^\circ \delta(z), \quad (11)$$

общее решение которого имеет вид

$$A_z(a, z) = C \cos kz + C_1 \sin kz - \frac{i}{2} V_0^\circ \sin k|z| \quad (12)$$

или с учетом четности $A_z(a, z)$, вытекающей из симметрии системы, а также выражения (10),

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \hat{j}_z(\zeta) \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} J_0(a\xi_1) e^{-i\zeta z} d\zeta = C \cos kz - \frac{i}{2} V_0^e \sin k|z|, \quad |z| < h. \quad (13)$$

Здесь S — контур интегрирования, идущий вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$ с обходом возможных полюсов подынтегральной функции по полуокружностям малого радиуса.

Так как

$$\hat{j}_z(\zeta) = \int_{-h}^h j_z(z) e^{i\zeta z} dz,$$

из (13) имеем интегральное уравнение

$$\int_{-h}^h j_z(x) K(z-x) dx = C \cos kz - \frac{i}{2} V_0^e \sin k|z| \quad (14)$$

с разностным ядром

$$K(z-x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} J_0(a\xi_1) e^{-i\zeta(z-x)} d\zeta. \quad (15)$$

Отметим, что (14) сходно с соответствующим уравнением, полученным в указанной монографии более сложным, но менее обоснованным путем. Однако, если там образ Фурье ядра интегрального уравнения возрастает с ростом аргумента ζ , то в (15) он стремится к нулю при $\zeta \rightarrow \pm\infty$.

Исследование ядра интегрального уравнения. Используя в (14) замену переменных $x = h\xi$, $z = h\zeta$, определяем

$$\int_{-1}^1 I_z(\xi) K(\zeta - \xi) d\xi = C \cos \kappa\zeta - \frac{i}{2} V_0^e \sin \kappa|\zeta|. \quad (16)$$

Здесь

$$I_z(\xi) = h j_z(h\xi), \quad \kappa = hk; \quad K(u) = \int_{S_+} \frac{N(w)}{D(w)} \cos wu dw, \quad (17)$$

где S_+ — то же, что и S , но изменяющееся от 0 до $+\infty$,

$$\begin{aligned} N(w) &= e^{\zeta_1 \zeta_e} H_0^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{10}(\zeta_e) - \zeta_e^2 H_1^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{00}(\zeta_e); \\ D(w) &= \zeta_1 \{ \zeta_e^2 H_0^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{11}(\zeta_e) - e^{\zeta_1 \zeta_e} H_1^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{01}(\zeta_e) - \\ &\quad - N(w) J_1(\alpha \zeta_1) / J_0(\alpha \zeta_1) \}; \\ \beta &= b/h, \quad \alpha = a/h, \quad \zeta_1 = \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}, \quad \zeta_e = \sqrt{\kappa^2 + \omega^2}; \\ B_{km}(\zeta_e) &= Y_k(\beta \zeta_e) J_m(\alpha \zeta_e) - Y_m(\alpha \zeta_e) J_k(\beta \zeta_e); \end{aligned}$$

$Y_k(\zeta)$ — функция Неймана.

Знаменатель подынтегрального выражения в (17) при $\omega = \kappa$ обращается в нуль, т. е. точка $\omega = \kappa$ для дроби $N(\omega)/D(\omega)$ является полюсом. Для исследования его кратности выпишем асимптотики функций Бесселя при $\omega \rightarrow \kappa$. Так как здесь $\zeta_1 = \sqrt{\kappa^2 - \omega^2} \rightarrow 0$, а $\zeta_e \rightarrow \kappa \sqrt{\varepsilon - 1}$, то

$$H_0^{(1)}(\beta \zeta_1) = i \frac{2}{\pi} \ln \zeta_1 + O(1),$$

$$H_1^{(1)}(\beta \zeta_1) = -i \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta \zeta_1} + O(\zeta_1 \ln \zeta_1);$$

$$J_1(\alpha \zeta_1) = \frac{\alpha}{2} \zeta_1 + O(\zeta_1^3), \quad J_0(\alpha \zeta_1) = 1 + O(\zeta_1^2).$$

Следовательно,

$$\frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\kappa \sqrt{\varepsilon - 1} B_{00}}{\zeta_1^2 \left[\varepsilon B_{01} - \frac{\alpha}{2} \kappa \sqrt{\varepsilon - 1} B_{00} \right]} [1 + O(\zeta_1 \ln \zeta_1)],$$

где $B_{km} = B_{km}(\kappa \sqrt{\varepsilon - 1})$.

Таким образом, для дроби, находящейся под интегралом (17), точка $\omega = \kappa$ — простой полюс, поэтому интеграл по верхней полуокружности малого радиуса δ с центром в точке $\omega = \kappa$ можно легко найти:

$$\oint_{\zeta_\delta^+} \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \cos \omega u \, d\omega = -\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \cos \omega u \right\}_{\omega=\kappa} =$$

$$= -\pi i \lim_{\omega \rightarrow \kappa} \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \cos \omega u (\omega - \kappa) = \pi i \frac{\sqrt{\varepsilon - 1} B_{00} \cos \kappa u}{2\varepsilon B_{01} - \alpha \kappa \sqrt{\varepsilon - 1} B_{00}}.$$

Воспользовавшись асимптотикой для модифицированных функций Бесселя, через которые выражаются функции $N(\omega)$ и $D(\omega)$ при больших значениях аргумента ω , запишем

$$N(\omega) = i \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{1}{\pi^2 \beta} \left\{ \frac{\zeta_e + e \zeta_1}{\sqrt{\zeta_1}} e^{-\beta(\zeta_1 - \zeta_e) - \alpha \zeta_e} + \right.$$

$$\left. + \frac{e \zeta_1 - \zeta_e}{\sqrt{\zeta_1}} e^{-\beta \zeta_1 - (\beta - \alpha) \zeta_e} \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{8\alpha \zeta_e}\right) \right],$$

$$D(\omega) = \zeta_1 i \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{1}{\pi^2 \beta} \left\{ \left[\varepsilon^2 \frac{\zeta_1^{3/2}}{\zeta_e} + 2\varepsilon \sqrt{\zeta_1} + \frac{\zeta_e}{\sqrt{\zeta_1}} \right] \times \right.$$

$$\times e^{-\beta(\zeta_1 - \zeta_e) - \alpha \zeta_e} + \left[-\varepsilon^2 \frac{\zeta_1^{3/2}}{\zeta_e} + 2\varepsilon \sqrt{\zeta_1} - \frac{\zeta_e}{\sqrt{\zeta_1}} \right] \times$$

$$\left. \times e^{-\beta \zeta_1 - (\beta - \alpha) \zeta_e} \right\} [1 + O(1/8\alpha \zeta_e)].$$

Если ω настолько большое, что $\zeta_1 \approx \zeta_e \approx \omega$, то из приведенных выражений сразу следует асимптотика

$$\frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{1}{\varepsilon + 1} \frac{1}{\omega} \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega} + e^{-(\beta - \alpha)\omega}\right) \right].$$

Других особых точек, как показало аналитическое и численное исследование, подынтегральная функция, определяемая соотношением $N(w)/D(w)$, не имеет. Численно-аналитическое исследование проводилось в предположении, что $\kappa \ll 1$, $\varepsilon \gg 1$, $\kappa\varepsilon = O(1)$. Это не только приемлемо, но и необходимо для некоторых экспериментальных исследований. Тогда

$$\pi K(u) = \left(\oint_{C_\kappa} + \int_{2\kappa}^{\kappa\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\kappa\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{N(w)}{D(w)} \cos wu \, dw. \quad (18)$$

Первый интеграл в (18) — чисто мнимая величина, три остальных — вещественные, причем существенный вклад дает только последний интеграл при малых значениях u :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{N(w)}{D(w)} \cos wu \, dw &= \frac{1}{\varepsilon+1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos wu}{w} \, dw + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon+1} \left[\ln \frac{1}{\varepsilon|u|} - \gamma - \int_0^{\varepsilon|u|} \frac{\cos t - 1}{t} \, dt \right] + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

Здесь γ — постоянная Эйлера, а интеграл в квадратных скобках при малых $\varepsilon|u|$ ведет себя, как $O(\varepsilon^2|u|^2)$, поэтому основной вклад дает $\ln(1/\varepsilon|u|)$.

Численный расчет при $\varepsilon = 1600$, $\kappa\sqrt{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$ показал, что интегралы

$$\int_{2\kappa}^{\kappa\sqrt{\varepsilon}} = O(1/100), \quad \int_{\kappa\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon} = O(1/1000).$$

Решение интегрального уравнения для тока. Отметим вначале, что ядро интегрального уравнения (14) является разностным и имеет слабую особенность при совпадении аргументов, поэтому численное решение его не составляет большой трудности и может быть проведено с помощью ряда известных методов. Нам выбран приближенный, но достаточно эффективный подход, использованный в монографии Р. Кинга и Т. Смита, приводящий к аналитическому выражению достаточно простого вида.

Если воспользоваться острым пиком $K(\zeta - \xi)$ вблизи $\zeta = \xi$ и предположить, что $K(u) \approx K\delta(u)$, то из выражения для образа Фурье

$$K(w) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) e^{i w u} \, du$$

очевидно, что

$$K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) \, du = K \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \, du = K = \frac{N(0)}{D(0)}.$$

Следовательно, из (16) получаем

$$I_z(\zeta) \tilde{K}(0) = C \cos \kappa \zeta - \frac{i}{2} V_0^e \sin \kappa |\zeta|, \quad |\zeta| < 1.$$

Постоянную C можно вычислить, если положить $\zeta = 1$. Тогда $I_z(1) = h j_z(h) = 0$ и, таким образом,

$$C = \frac{i}{2} V_0^e \frac{\sin \kappa}{\cos \kappa},$$

значит,

$$I_z(\zeta) = \frac{i}{2} V_0^e \frac{\sin \kappa (1 - |\zeta|)}{\cos \kappa} \frac{D(0)}{N(0)}, \quad |\zeta| < 1,$$

является аналитическим решением интегрального уравнения (16).

Итак, рассмотрен подход к изучению тока в изолированной антенне конечной длины, позволяющий получить интегральное уравнение с разностным ядром, которое имеет слабую особенность. Проведено аналитическое и численное исследование ядра и получено аналитическое выражение для тока в антенне.

Поступила в редколлегию 12.07.87