International Science Group

ISG-KONF.COM

XI INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE "PROBLEMS OF THE DEVELOPMENT OF SCIENCE AND THE VIEW OF SOCIETY"

Graz, Austria

March 21 - 24, 2023

ISBN 979-8-88896-521-4

DOI 10.46299/ISG.2023.1.11

PROBLEMS OF THE DEVELOPMENT OF SCIENCE AND THE VIEW OF SOCIETY

Proceedings of the XI International Scientific and Practical Conference

Graz, Austria
March 21 – 24, 2023

UDC 01.1

The 11th International scientific and practical conference "Problems of the development of science and the view of society" (March 21 – 24, 2023) Graz, Austria. International Science Group. 2023. 435 p.

ISBN – 979-8-88896-521-4
DOI – 10.46299/ISG.2023.1.11

TABLE OF CONTENTS

ЗАГАЛЬНА НЕОДНОРІДНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КОЛА

Шпількін Андрій Романович,
студент групи КУІБ-20-1
Харківський національний університет радіоелектроніки

Стогній Надія Петрівна
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики
Харківський національний університет радіоелектроніки

Інтерес до вивчення моделей фізики математичними методами постійно зростає. Це пояснюється тим, що вони дозволяють дослідити кількісні характеристики фізичних явищ і розрахувати із заданим ступенемточності хід реальних процесів, надають можливість глибокого проникнення до самої суті фізичних явищ, виявлення схованих закономірностей, передбачення нових ефектів [1-2].

У підручниках та збірниках задач із математичної фізики приділяється багато уваги розв'язуванню однорідних задач параболічного типу [3-5]. Але якщо взяти до уваги, що однорідні задачі – це частинний випадок неоднорідних, то не може не зацікавити питання розв'язування саме неоднорідних задач параболічного типу. Тут ми стикаємося з проблемою, що висвітлення цього питання здійснюється досить фрагментарно та відповідний матеріал не систематизовано до вигляду, придатного для використання на практиці.

Для розв'язання задачі про розповсюдження температури у колі зручно використати полярну систему координат.

Поставка задачі. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) + F(r,\theta,t) \qquad (1)$$

в області $D(0 < r < R, 0 \le \theta \le 2\pi, t > 0),$ який задовольняє початковій умові

$$u(r,\theta,t)\big|_{t=0} = f(r,\theta), \qquad (2)$$

загальній граничній умові загального вигляду:

$$\left[\alpha\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r} + \beta u(r,\theta,t)\right]_{r=R} = \varphi(\theta,t), \qquad (3)$$

та умові періодичності

$$u(r,\theta+2\pi,t) = u(r,\theta,t). \qquad (4)$$

Розв’язок поставленої задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур’є-Діні-Бесселя:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\lambda_{nm}r)\left[A_{nm}(t)\cos n\theta+B_{nm}(t)\sin n\theta\right],$$

$$u(r,\theta+2\pi,t)=u(r,\theta,t), \tag{5}$$

де λ_{nm} – власні числа загальної однорідної граничної задачі, $A_{nm}(t), B_{nm}(t)$ – невідомі коефіцієнти Фур’є функції $u(r,\theta,t)$:

$$A_{0m}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,\theta,t)J_0(\lambda_{0m}r)r\,dr\,d\theta, \tag{6}$$

$$A_{nm}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,\theta,t)J_{nm}(\lambda_{nm}r)\cos n\theta\, r\,dr\,d\theta, \tag{7}$$

$$B_{nm}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,\theta,t)J_{nm}(\lambda_{nm}r)\sin n\theta\, r\,dr\,d\theta. \tag{8}$$

Диференціюючи функцію $A_{nm}(t)$ і підставляючи замість $\frac{\partial u}{\partial t}$ її значення з рівняння (1), будемо мати

$$A'_{nm}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{a^2}F(r,\theta,t)\right]J_{nm}(\lambda_{nm}r)\cos n\theta\, r\,dr\,d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\,d\theta\int_0^R\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]J_{nm}(\lambda_{nm}r)\,dr+$$

$$+\frac{a^2}{\pi}\int_0^R\frac{1}{r}J_n(\lambda_{nm}r)\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cos n\theta\,d\theta\,dr+P_{nm}(t), \tag{9}$$

де

$$P_{nm}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R F(r,\theta,t)J_n(\lambda_{nm}r)\cos n\theta\, r\,dr\,d\theta. \tag{10}$$

Інтегруючи внутрішній інтеграл першого доданка у правій частині двічі за частинами за змінною r і враховуючи співвідношення

$$\alpha\lambda_{nm}J'_n(\lambda_{nm}R)+\beta J_n(\lambda_{nm}R)=0,$$

а також те, що внутрішній інтеграл другого доданка, в силу періодичності, прийме вигляд

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cos n\theta \, d\theta = -n^2 \int_0^{2\pi} u \cos n\theta \, d\theta,$$

одержимо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно $A_{nm}(t)$ вигляду:

$$A'_{nm}(t) + a^2 \lambda_{nm}^2(t) A_{nm}(t) + a^2 P_{nm}(t) + \frac{a^2 R}{\alpha} J_{nm}(\lambda_{nm} R) P_n(t), \qquad (11)$$

де

$$P_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, t) \cos n\theta \, d\theta. \qquad (12)$$

Початкову умову для рівняння (11) одержимо, покладаючи в (7) $t = 0$:

$$A_{nm}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \theta) J_{nm}(\lambda_{nm} r) \cos n\theta \, r \, dr \, d\theta. \qquad (13)$$

Розв'язок рівняння (11) з початковою умовою (13) має вигляд:

$$A_{nm}(t) = A_{nm}(0) \cdot \exp\left(-a^2 \lambda_{nm}^2 t\right) +$$
$$+ a^2 \int_0^t \exp\left(-a^2 \lambda_{nm}^2 (t - \tau)\right) \left[P_{nm}(\tau) + \frac{R}{\alpha} J_n(\lambda_{nm} R) P_n(\tau) \right] d\tau. \qquad (14)$$

Аналогічним чином знаходяться функції $A_{0m}(t)$ і $B_{nm}(t)$:

$$A_{0m}(t) = A_{0m}(0) \cdot \exp\left(-a^2 \lambda_{0m}^2 t\right) +$$
$$+ a^2 \int_0^t \exp\left(-a^2 \lambda_{0m}^2 (t - \tau)\right) \left[P_{0m}(\tau) + \frac{R}{\alpha} J_0(\lambda_{0m} R) P_0(\tau) \right] d\tau, \qquad (15)$$

де

$$A_{0m}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \theta) J_0(\lambda_{0m} r) r \, dr \, d\theta, \qquad (16)$$

$$P_{0m}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R F(r, \theta, t) J_0(\lambda_{0m} r) \, r \, dr \, d\theta, \qquad (17)$$

$$P_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, t) \, d\theta, \qquad (18)$$

$$B_{nm}(t) = B_{nm}(0) \cdot \exp\left(-a^2 \lambda_{nm}^2 t\right) +$$

$$+a^2\int_0^t \exp\left(-a^2\lambda_{nm}^2(t-\tau)\right)\left[Q_{nm}(\tau)+\frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)q_n(\tau)\right]d\tau\,. \quad (19)$$

Тут:

$$B_{nm}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\sin n\theta\, r\,dr\,d\theta, \quad (20)$$

$$Q_{nm}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R F(r,\theta,t)J_n(\lambda_{nm}r)\sin n\theta\, r\,dr\,d\theta, \quad (21)$$

$$q_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,t)\sin n\theta\,d\theta. \quad (22)$$

Таким чином, розв’язок неоднорідної задачі (1) – (4) задається формулою (5) з коефіцієнтами, які визначаються формулами (14), (15) і (19).

Так, ми відновили той ланцюг умовиводів, який схований за записом умови і отриманим результатом, розробили алгоритм розв'язування неоднорідної задачі теплопровідності для кола. Це дасть змогу узагальнити та систематизувати знання студентів із даної теми, спонукати їх виходити за рамки курсу «Диференціальні рівняння у частинних похідних», вести навчально-дослідницьку роботу.

Список літератури:

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 286 с.

2. Будак Б.М., Самарский А.А. Сборник задач по математической физике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 684 с.

3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

5. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1981. – 396 с.