

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Пархоменку Владиславу Геннадійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Метод двобічних наближень знаходження радіально-симетричних розв'язків еліптичних крайових задач з гетеротонними степеневими нелінійностями

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи нелінійне еліптичне рівняння $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$, розглядуване у шарі $|x| < R$, з крайовими умовами

$u|_{|x|=R} = 0$ чи $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \alpha u|_{|x|=R} = 0$, де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до сфери $|x| = R$.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 84 с., 21 табл., 24 рис., 2 дод., 16 джерел.

ГЕТЕРОТОННИЙ ОПЕРАТОР, ДВОБІЧНІ НАБЛИЖЕННЯ, ДОДАТНИЙ РАДІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА, КРАЙОВА ЗАДАЧА, НЕЛІНІЙНЕ ЕЛІПТИЧНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ПСЕВДОУВІГНУТИЙ ОПЕРАТОР, СИЛЬНО ІНВАРІАНТНИЙ КОНУСНИЙ ВІДРІЗОК, ФУНКЦІЯ ГРІНА.

Об'єкт дослідження – нелінійні крайові задачі для еліптичних диференціальних рівнянь.

Мета роботи – отримання з двосторонньою оцінкою похибки додатного радіально-симетричного розв'язку першої та третьої крайових задач для рівняння $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$.

Метод дослідження – двобічні ітераційні методи чисельного аналізу нелінійних крайових задач для еліптичних рівнянь, що базуються на теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах.

Робота присвячена дослідженню можливості побудови двобічних наближень до єдиного додатного радіально-симетричного розв'язку нелінійного еліптичного рівняння $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ за перших та третіх крайових умов, а також аналізу залежності отриманого наближеного розв'язку від параметрів λ , μ , p та q . Отримано умови існування єдиного додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Отримано розв'язки розглянутих крайових задач за допомогою побудованого методу двобічних наближень. Результати наведено у табличній та графічній формах.

ABSTRACT

Introductory note: 84 pages, 21 tables, 24 figures, 2 appendixes, 16 sources.

BOUNDARY VALUE PROBLEM, GREEN'S FUNCTION, HAMMERSTEIN INTEGRAL EQUATION, HETEROTONIC OPERATOR, NONLINEAR ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATION, POSITIVE SOLUTION, PSEUDO-CONCAVE OPERATOR, RADIAL-SYMMETRIC SOLUTION, STRONGLY INVARIANT SEGMENT, TWO-SIDED APPROXIMATIONS.

Object of research – nonlinear boundary value problems for elliptic differential equations.

Purpose of work – to receive positive radial-symmetric solution of the first and the third boundary value problems for equation $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ with two-sided error estimation.

Methods of research – two-sided iterative methods of numerical analysis of nonlinear boundary-value problems for elliptic equations, which are based on the theory of nonlinear operators in partially ordered spaces.

The work is devoted to the study of the possibility of constructing two-sided approximations to unique positive radial-symmetric solution of nonlinear elliptic equation $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ with the first and the third boundary conditions and analysis of dependency of obtained approximate solution on parameters λ , μ , p and q . Conditions for the existence of a unique positive solution and conditions for two-sided convergence to successive approximations were defined. Solutions of pending boundary-value problems were obtained with the constructed method of two-sided approximations. Results are given in tables and illustrated on graphics.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	10
1.1.4 Інформаційна модель системи	14
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач	16
1.2.1 Модель аналізу проблеми	16
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	17
1.2.3 Модель вирішення проблеми	20
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	21
1.3.1 Змістовна постановка задачі	21
1.3.2 Формальна постановка задачі	26
1.4 Постановка задач дослідження	27
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	29
2.1 Основні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах	29
2.2 Метод двобічних наближень розв'язання нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором	34
2.3 Застосування методу двобічних наближень до знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових	

	7
задач	39
2.4 Алгоритм застосування метода двобічних наближень	54
3 Програмна реалізація	55
3.1 Mathematica 10 як система символної математики.....	55
3.2 Опис програми.....	56
4 Результати обчислювального експерименту	57
5 Аналіз можливих застосувань	63
Висновки	64
Перелік джерел посилання	65
Додаток А Лістинг програми	67
Додаток Б Результати обчислень.....	71

ВСТУП

Математичне моделювання процесів нелінійної теплопровідності приводить до необхідності розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \mathbf{x} \in \Omega.$$

Для випадку, коли Ω – куля радіуса R у \mathbb{R}^3 , зазвичай ставиться задача знаходження радіально-симетричного (тобто залежного лише від $r = |\mathbf{x}|$) розв'язку вказаного рівняння. При цьому ми приходимо до задачі розв'язання крайової задачі для нелінійного звичайного диференціального рівняння.

Точні розв'язки крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь можна отримати лише у деяких поодиноких випадках, тому для розв'язання таких задач зазвичай використовуються чисельні методи. Серед них можна виділити, зокрема, сіткові, варіаційні та ітераційні методи [1]. Ітераційні методи є найбільш привабливими з точки зору зручності обчислювальної реалізації та завдяки наявності властивості самовиправності. Особливе місце серед ітераційних методів належить двобічним методам.

Методи двобічних наближень є універсальним інструментом як при дослідженні питань існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і для фактичного їх знаходження. При цьому двобічні наближення дозволяють отримати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Двобічні ітераційні методи, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [9, 11], до розв'язання крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь були застосовані, наприклад, у роботах [2, 4-7, 14-15], але задачі знаходження радіально-симетричних розв'язків в них не розглядалися. Отже, тема атестаційної роботи є актуальною.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНИХ РАДІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Нелінійні крайові задачі для еліптичних диференціальних рівнянь».

Предмет аналізу – «Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу нелінійних крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь».

Точка зору: дослідник.

Ціль: отримання чисельних розв'язків нелінійних крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь з двосторонньою оцінкою похибки та залежності наближених розв'язків від параметрів крайових задач.

Модель типу «чорний ящик» відображає взаємодію системи із зовнішнім середовищем. На вхід подаються фактори, що впливають на систему зовні, на виході одержуємо її цільові продукти. При цьому інформація про зміст відсутня, розглядаються лише межі системи. В свою чергу, межа підкреслює цілісність системи, її автономність від зовнішнього середовища і взаємодію між системою і середовищем [3, 10].

Побудова моделі «чорного ящика» не є тривіальною задачею, оскільки на питання про те, скільки і які саме входи та виходи варто додавати до моделі, відповідь не є простою і завжди однозначною. У нашій задачі входом є еліптичне диференціальне рівняння з крайовими умовами (першого або третього типів), а також значення параметрів. На виході системи отримується залежність розв'язку від параметрів (рис. 1.1).

1.1.2 Морфологічний опис системи

Суттю морфологічного опису системи є опис зовнішнього середовища, його наведено на рис. 1.2. Зовнішнє середовище є сукупністю всіх об'єктів, які не містяться в системі, однак взаємодіють із нею.

Зовнішнє середовище системи «Знаходження додатного радіально-симетричного розв'язку крайової задачі» складають наступні об'єкти: дослідник, обчислювальна техніка, теорія чисельних методів, теорія нелінійних операторів.

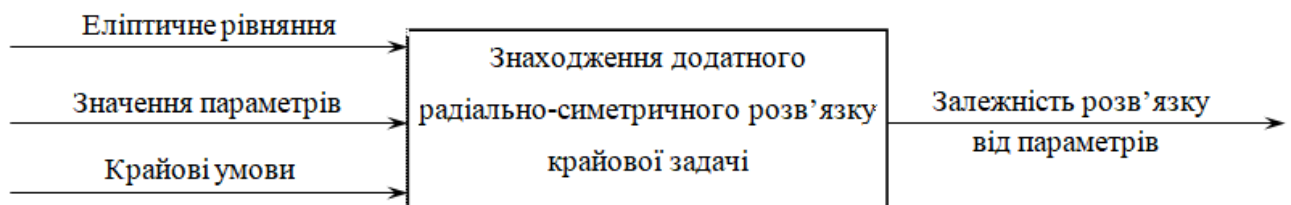


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

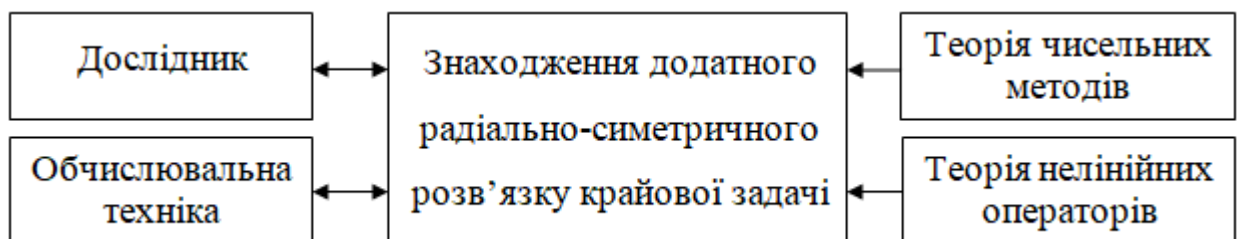


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

1.1.3 Функціональна модель системи

Одним із способів побудови функціональної моделі системи є метод IDEF0-діаграм. Цей метод допомагає визначити вимоги та функції системи для її подальшої розробки. IDEF0 також використовується для аналізу вже існуючої системи з метою аналізу виконуваних нею функцій та механізмів, за допомогою яких вони виконуються. На діаграмі процес зображають як набір елементів, між

якими спостерігається певна взаємодія. Окрім того, ілюструються ресурси, які споживаються системою для виконання кожної з функцій [3]. В конкретній задачі на вхід подається диференціальне рівняння із крайовими умовами та значеннями параметрів; у якості керуючих засобів виступають теорія чисельних методів, теорія математичної фізики, теорія нелінійних операторів; до механізмів відносять дослідника та програмне забезпечення; на виході одержуємо залежність розв'язку від значень параметрів.

На першій діаграмі в ієрархії проілюстровано загальний опис системи та її взаємодія з навколишнім середовищем. Це так звана контекстна IDEF0-діаграма. Ця діаграма показує, як система функціонує в цілому (рис. 1.3). Наступним етапом є декомпозиція діаграми на окремі великі фрагменти. Далі здійснюється декомпозиція кожного великого фрагмента на дрібніші. Цей процес продовжується, поки не буде досягнуто необхідного рівня деталізації опису. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Знаходження додатного радіально-симетричного розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі». Декомпозиція контекстної діаграми (рис. 1.4) демонструє основні функції системи та їх деталізацію за рівнями (рис. 1.5).

Для надання аналітикам можливості описати ситуацію, коли процеси виконуються в певній послідовності, а також описати об'єкти, які спільно беруть участь в одному процесі [10], доречно застосувати метод IDEF3-діаграм. Модель в нотації IDEF3 може містити два типи діаграм: діаграму опису послідовності етапів процесу (Process Flow Description Diagram, PFDD) та діаграму мережі трансформацій стану об'єкта (Object State Transition Network, OSTN). Перша діаграма (рис. 1.6) в ієрархії складається з наступних блоків: «Звести до звичайного диференціального рівняння», «Одержати еквівалентне інтегральне рівняння», «Розв'язати інтегральне рівняння», «Дослідити залежність розв'язку від параметрів». Другу модель IDEF3 (рис. 1.7) складають блоки «Побудувати гетеротонний інтегральний оператор», «Знайти сильно інваріантний конусний відрізок», «Побудувати послідовності верхніх та нижніх наближень», «Розв'язати рівняння методом двобічних наближень».

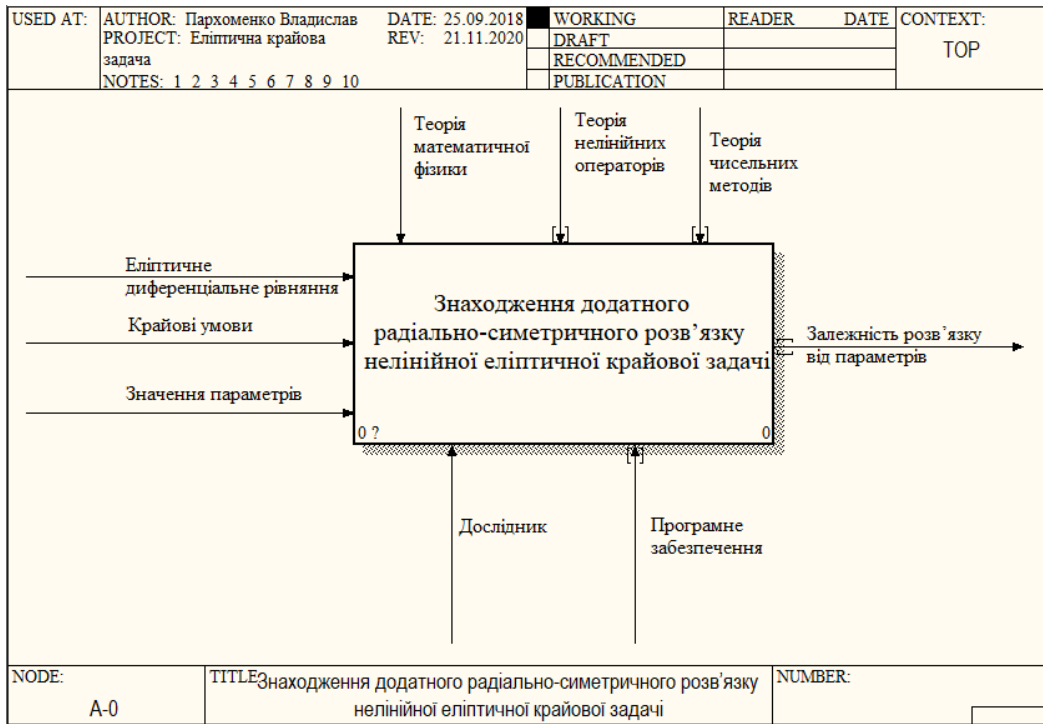


Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

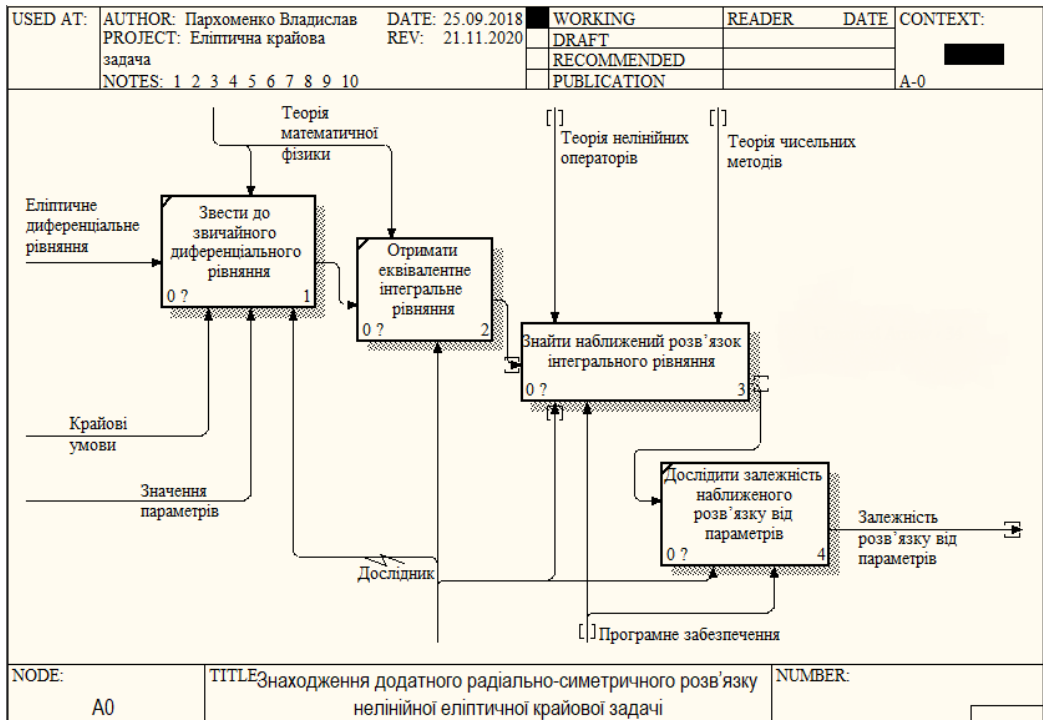


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Знаходження додатного радіально-симетричного розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі»: рівень А0

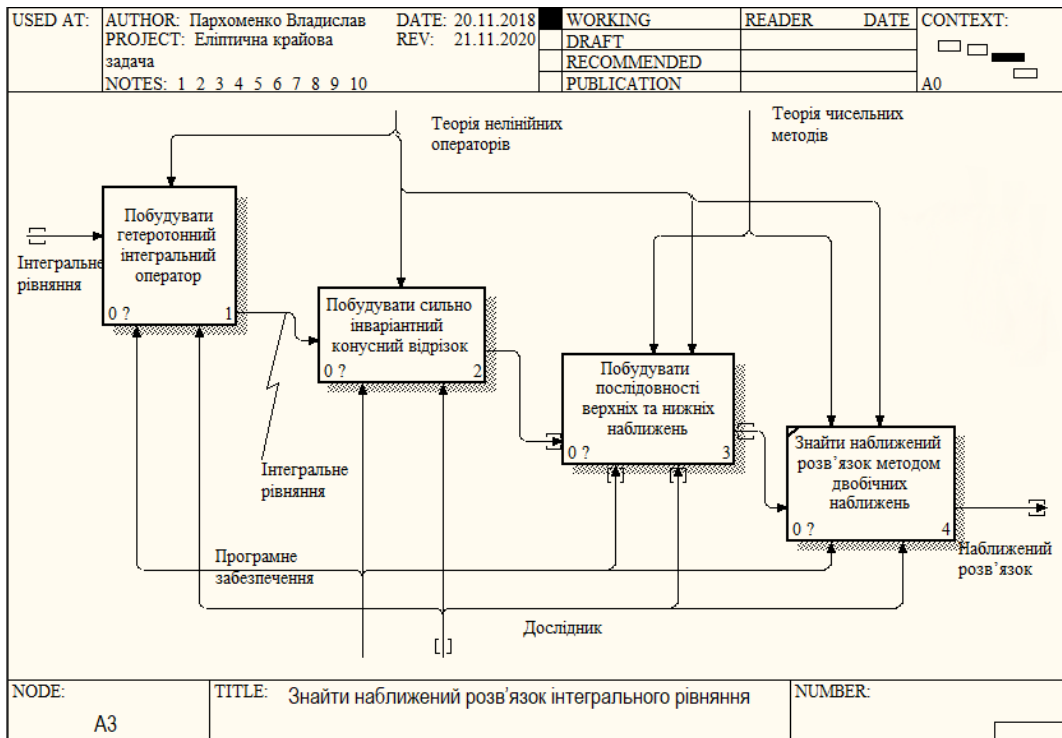


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Знайти наближений розв'язок інтегрального рівняння»: рівень A1

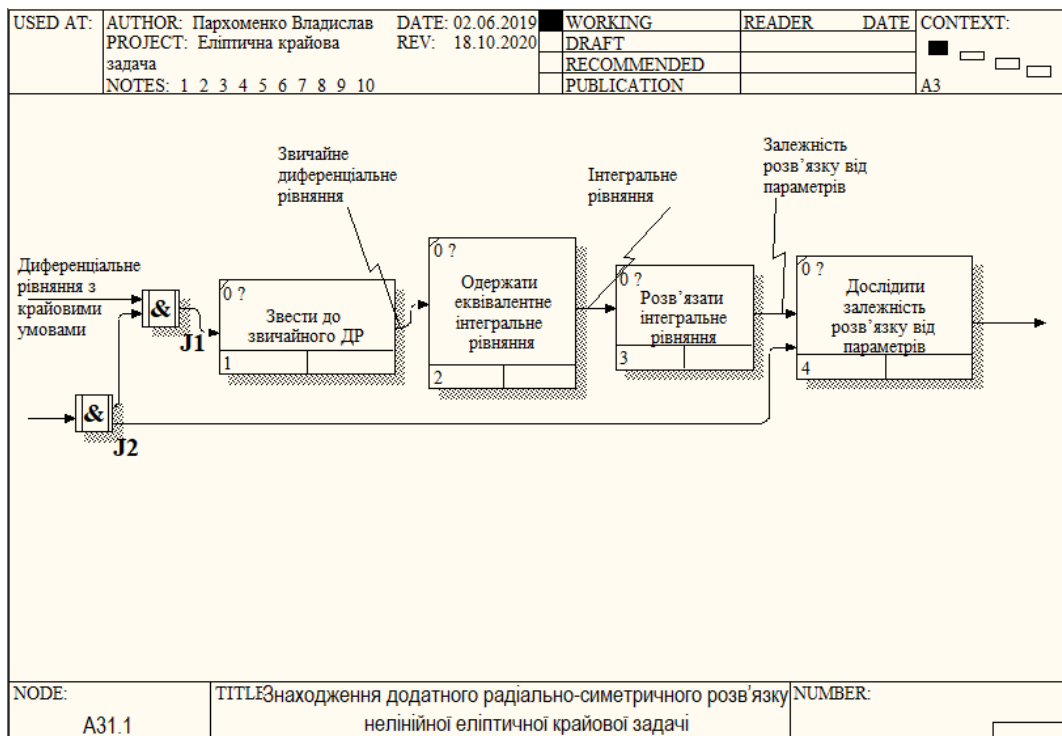


Рисунок 1.6 – Опис роботи «Знаходження додатного радіально-симетричного розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

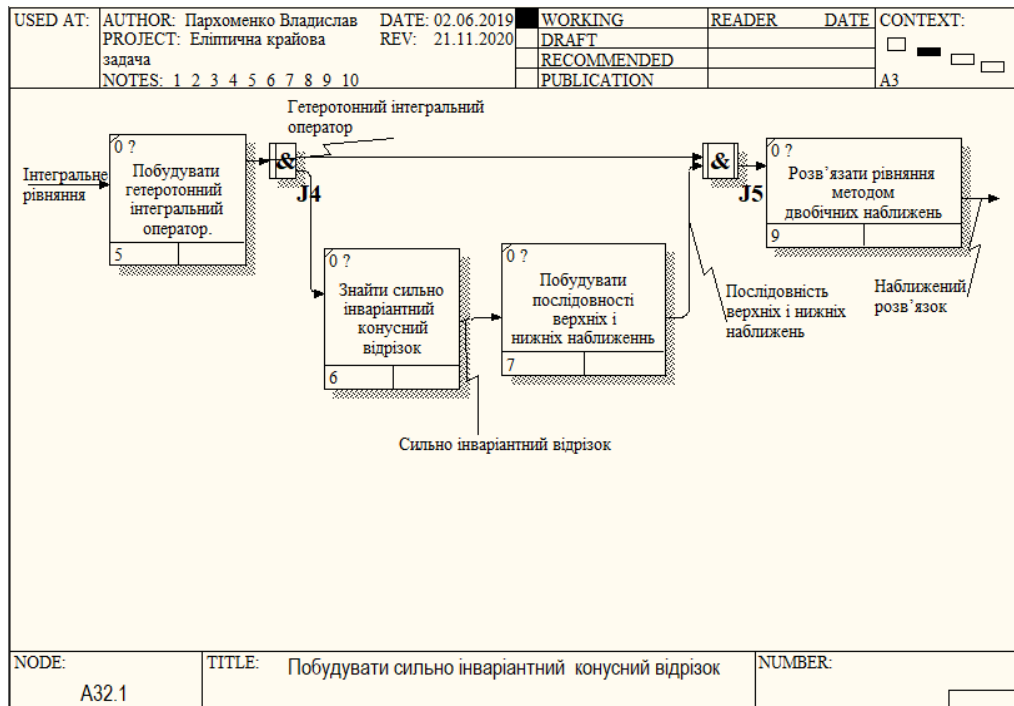


Рисунок 1.7 – Опис роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння»: рівень A1 (в нотації IDEF3)

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель системи є відображенням зв'язків між елементами системи у вигляді структур даних. Ця модель акцентує увагу дослідника на склад та взаємозв'язки потоків даних.

Для побудови інформаційної моделі системи використовують діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD). Вони є зручним засобом опису документообігу та обробки інформації. Як і IDEF0, DFD також є модельною системою. На цих діаграмах досліджувана система зображується у вигляді мережі пов'язаних між собою робіт [10]. Вони можуть використовуватися як додаток до моделі IDEF0 з метою більш наочного відображення поточних операцій.

Інформаційна модель системи має вигляд вузлового дерева (рис. 1.8). Опис побудови послідовностей верхніх та нижніх наближень наведено на рис. 1.9. Головна мета DFD – показати, як кожний процес трансформує свої вхідні дані у вихідні, а також виявити зв'язки між цими процесами.

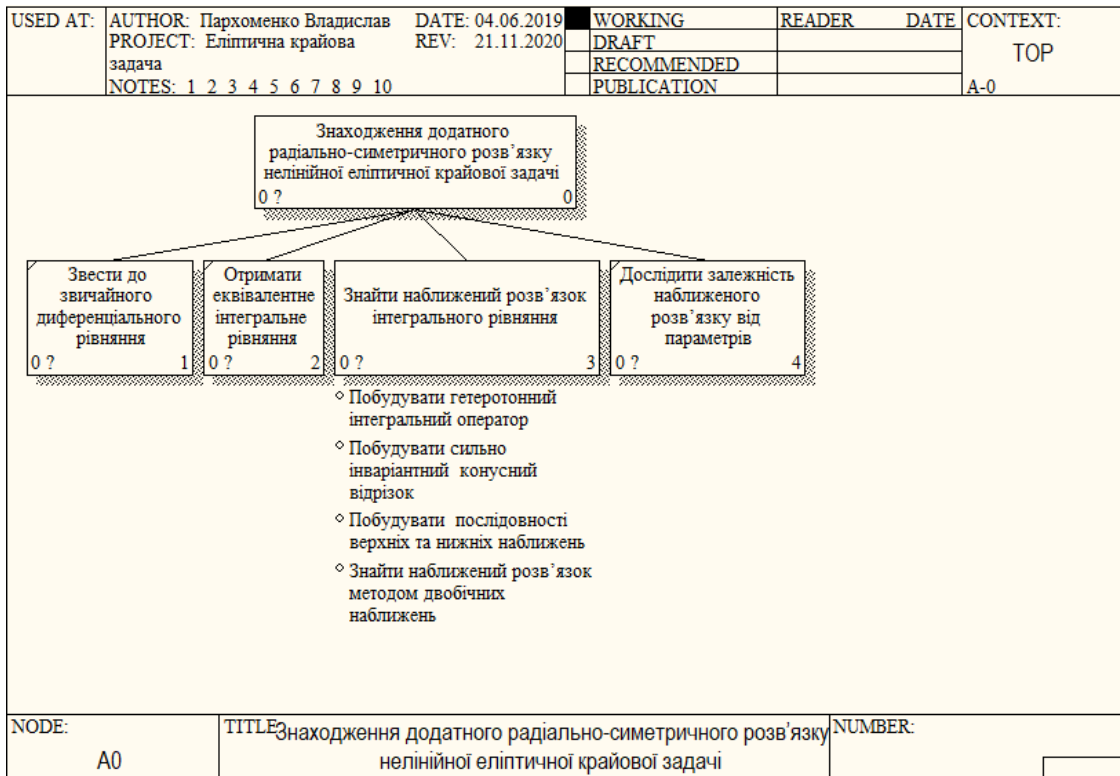


Рисунок 1.8 – Опис роботи «Дослідження нелінійних еліптичних крайових задач»: рівень A0 (у вигляді вузлового дерева)

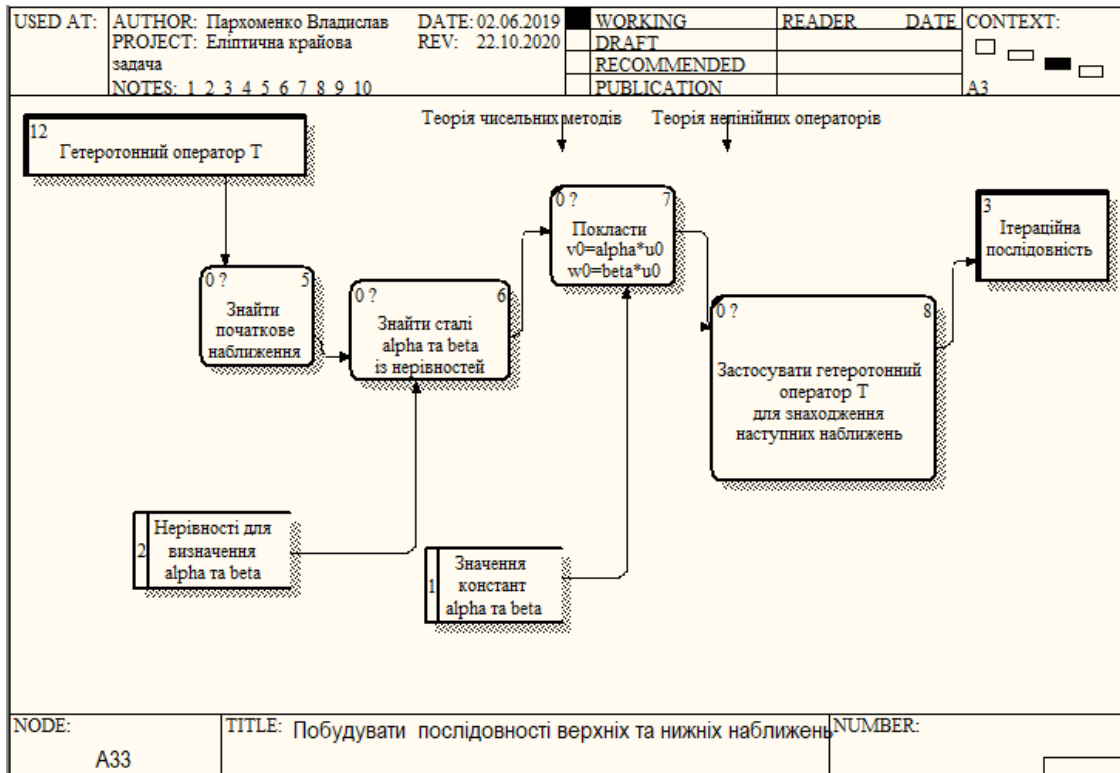


Рисунок 1.9 – Опис роботи «Побудувати послідовності верхніх та нижніх наближень»: рівень A3 (в нотації DFD)

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач

1.2.1 Кваліметрична модель аналізу проблеми

У процесі вибору методу розв'язання крайової задачі розглядаються три альтернативи: сіткові методи, метод лінеаризації, метод двобічних наближень. У кожного з цих методів є свої переваги та недоліки. При застосуванні сіткових методів область, у якій розглядається нелінійна крайова задача, замінюється скінченною кількістю точок (сіткою) і у кожній з цих точок диференціальне рівняння задачі замінюється нелінійним рівнянням. Отже, відбувається заміна з деякою похибкою на деяке наближення як області, так і диференціального рівняння. Крім того, метод сіток не має зручної оцінки похибки. Методи лінеаризації замінюють нелінійну крайову задачу послідовністю лінійних крайових задач, кожна з яких може бути розв'язана якимось чисельним методом. Для цих методів теж постає проблема зручної оцінки похибки наближення на кожній ітерації. У зв'язку з цим актуальним є розробка методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач, тобто таких, які не тільки дозволяють з'ясувати питання існування розв'язку, але й пропонують алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить двобічним ітераційним методам, які дозволяють оцінити невідомий розв'язок знизу та зверху, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Оберемо метод, яким буде розв'язуватися задача.

Розв'язок оцінюється за наступними критеріями:

- критерій 1 (K1): швидкість збіжності;
- критерій 2 (K2): зручність оцінки похибки;
- критерій 3 (K3): отримує наближений розв'язок у вигляді формули;
- критерій 4 (K4): час роботи програми;
- критерій 5 (K5): точність розв'язку.

Обиратимемо з множини альтернатив:

- альтернатива 1 (A1): сіткові методи;
- альтернатива 2 (A2): метод двобічних наближень;
- альтернатива 3 (A3): метод лінеаризації.

Ієрархічна модель проблеми вибору за умов багатокритеріальності має вигляд, зображений на рисунку 1.10.

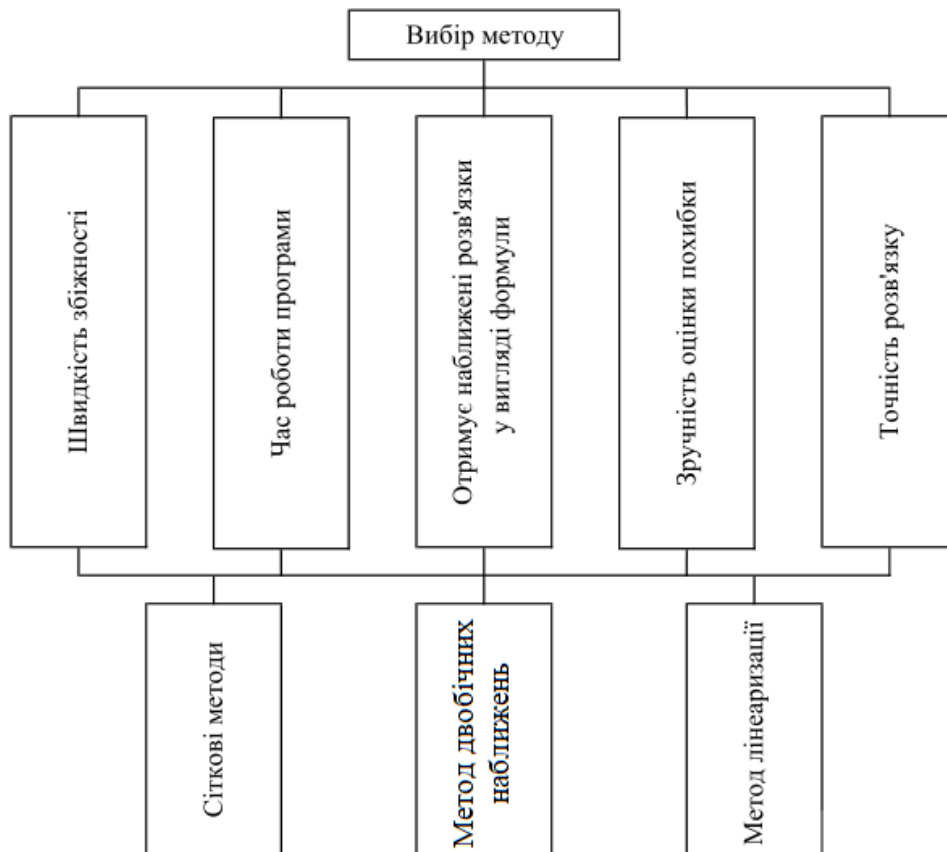


Рисунок 1.10 – Ієрархічна модель аналізу проблеми

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу необхідно побудувати матриці попарних порівнянь критеріїв, а також альтернатив за кожним з критеріїв. Матриця попарних порівнянь критеріїв та розрахунки за нею наведено у табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	K1	K2	K3	K4	K5	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
K1	1	4	7	8	4	3,890	0,500	0,886
K2	$\frac{1}{4}$	1	9	8	5	2,450	0,310	1,721
K3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{2}$	3	0,470	0,060	1,178
K4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2	1	2	0,500	0,064	1,191
K5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0,440	0,056	0,795
Усього						7,750		5,680

Для таблиці 1.1 індекс узгодженості $CI = \frac{5,68 - 5}{5 - 1} = 0,17$, випадковий

індекс $RI = 0,58$, відносна узгодженість $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,17}{0,58} = 0,15$.

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

K1	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0,400	0,090	0,824
A2	5	1	7	3,270	0,730	0,991
A3	3	$\frac{1}{7}$	1	0,750	0,169	1,418
Усього				4,420		3,190

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

К2	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	2	0,870	0,270	1,073
A2	3	1	4	2,280	0,700	0,990
A3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0,066	0,020	0,955
Усього				3,216		3,010

Для прийняття рішення про використання методу необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив. Оцінивши їх щодо кожного з критеріїв, отримаємо дані, які представлені в таблицях 1.2 – 1.6. Випадковий індекс для матриць третього порядку дорівнює $RI = 0,58$.

Для таблиці 1.2 маємо $CI = 0,09$, $RI = 0,1$. Для таблиці 1.3 маємо $CI = 0,005$, $RI = 0,008$. Для таблиці 1.4 маємо $CI = 0,0855$, $RI = 0,086$. Для таблиці 1.5 маємо $CI = 0,043$, $RI = 0,074$. Для таблиці 1.6 маємо $CI = 0,0429$, $RI = 0,0739$.

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

К3	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	3	$\frac{1}{6}$	0,874	0,187	1,354
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{7}$	0,329	0,070	0,845
A3	6	7	1	3,476	0,743	0,973
Усього				4,679		3,171

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

К4	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значимості
A1	1	$\frac{1}{3}$	4	1,010	0,280	1,189
A2	3	1	5	2,466	0,627	0,961
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	0,368	0,094	0,936
Усього				4,250		3,086

Таблиця 1.6 – Порівняння за п'ятим критерієм

К5	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	4	1,101	0,28	1,1887
A2	3	1	5	2,466	0,627	0,9609
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	0,368	0,094	0,9362
Усього				3,935		3,086

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити остаточні розрахунки та зробити висновок. У таблиці 1.7 наведені результати, які дозволяють нам сказати, що кращою для нас буде друга альтернатива, а саме – метод двобічних наближень.

Таблиця 1.7 – Остаточні розрахунки

K A	K1	K2	K3	K4	K5	Узагальнені пріоритети
A1	0,500	0,090	0,270	0,187	0,280	0,361
A2	0,310	0,730	0,700	0,070	0,627	0,406
A3	0,060	0,169	0,020	0,743	0,094	0,233

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Розглянемо тверде тіло Ω , температура якого в точці \mathbf{x} в момент часу t визначається функцією $u(\mathbf{x}, t)$ [8]. За умов, що різні частини тіла мають різну температуру, в тілі тепло здійснюватиме рух від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Візьмемо поверхню $S = \partial\Omega$, яка обмежує тіло, і оберемо на ній малий елемент ΔS . В теорії теплопровідності вважають, що кількість тепла ΔQ , яке проходить через елемент ΔS за час Δt , пропорційна $\Delta t \Delta S$ і нормальній похідній $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$, тобто

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Delta S \Delta t = -k \Delta S \Delta t \operatorname{grad}_{\mathbf{n}} u, \quad (1.1)$$

де $k > 0$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності;

\mathbf{n} – нормаль до елемента поверхні ΔS у напрямку руху тепла.

Вважатимемо, що тіло є ізотропним відносно теплопровідності. Це означає, що коефіцієнт внутрішньої теплопровідності k залежить лише від точки \mathbf{x} тіла і не залежить від напрямку нормалі до поверхні S у цій точці.

Позначимо через q тепловий потік, тобто кількість тепла, яке проходить через одиницю площі за одиницю часу. Тоді (1.1) можна записати у вигляді

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}. \quad (1.2)$$

Розглянемо зміну кількості тепла в тілі Ω за проміжок часу (t_1, t_2) . Можна помітити, що через поверхню S за проміжок часу (t_1, t_2) , відповідно до формули (1.1), входить кількість тепла, яка дорівнює

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (1.3)$$

де \mathbf{n} – внутрішня нормаль до поверхні S .

Розглянемо елемент тіла $\Delta\Omega$. Для того, щоб температура цього тіла змінилася на величину Δu за проміжок часу Δt , необхідно витратити кількість тепла

$$\Delta Q_2 = [u(\mathbf{x}, t + \Delta t) - u(\mathbf{x}, t)] \gamma(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \Delta\Omega,$$

де $\rho(\mathbf{x})$ – щільність речовини;

$\gamma(\mathbf{x})$ – теплоємність речовини.

Таким чином, кількість тепла, необхідна для зміни температури тіла Ω на $\Delta u = u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1)$, дорівнює

$$Q_2 = \int_{\Omega} [u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1)] \gamma \rho d\mathbf{x}$$

або

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \int_{\Omega} \gamma \rho d\mathbf{x},$$

оскільки

$$u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Зробимо наступне припущення: всередині розглядуваного тіла присутні джерела тепла. Позначимо через $F(\mathbf{x}, t)$ щільність (кількість поглинутого або виділеного тепла за одиницю часу) теплових джерел. Тоді кількість тепла, яке поглинуто або виділено в тілі Ω за проміжок часу (t_1, t_2) , дорівнюватиме

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Складемо тепер рівняння балансу тепла для тіла Ω . Очевидно, що $Q_2 = Q_1 + Q_3$, тобто

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Тепер застосуємо формулу Остроградського до другого інтегралу. Одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left[\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - F(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x} = 0.$$

Вираз під інтегралом є неперервною функцією, а тіло Ω і проміжок часу (t_1, t_2) довільні, З цього випливає, що для будь-якої точки \mathbf{x} розглядуваного тіла і для будь-якого моменту часу t має виконуватися рівність

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(\mathbf{x}, t). \quad (1.4)$$

У розгорнутій формі (1.4) набуватиме наступного вигляду

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + F(\mathbf{x}, t).$$

Це рівняння називається рівнянням теплопровідності неоднорідного ізотропного тіла.

Якщо тіло однорідне, то γ , ρ та k – сталі і рівняння (1.4) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(\mathbf{x}, t), \quad (1.5)$$

$$\text{де } a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}};$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{F(\mathbf{x}, t)}{\gamma\rho}.$$

Для знаходження температури всередині тіла у будь-який момент часу, одного рівняння (1.4) недостатньо. З фізичних міркувань випливає, що розподіл температури всередині тіла (початкова умова) та тепловий режим на межі $\partial\Omega$ тіла (крайова умова) мають бути відомими.

Існують різні способи завдання крайових умов:

а) у кожній точці межі $\partial\Omega$ задано температуру:

$$u|_{\partial\Omega} = \psi_1(t), \quad (1.6)$$

де $\psi_1(t)$ – відома функція часу t ;

б) на межі $\partial\Omega$ задано тепловий потік:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \psi_2(t), \quad (1.7)$$

де $\psi_2(t)$ – відома функція, яка виражається через заданий тепловий потік;

в) на межі $\partial\Omega$ відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu \right|_{\partial\Omega} = \psi_3(t), \quad (1.8)$$

де $h = \frac{H}{k}$;

H – коефіцієнт теплообміну;

$\psi_3(t)$ – задана функція часу t , залежна від температури навколишнього середовища.

Зокрема, якщо на поверхні тіла температура зберігає нульове значення або відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури, то матимемо відповідно крайові умови

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Початкова умова ставиться так:

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Тепер зробимо припущення, що температура у кожній точці \mathbf{x} всередині тіла встановилась, тобто вона незмінна з плином часу. Тоді $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ і рівняння (1.5) запишеться у вигляді

$$-\Delta u = \frac{1}{a^2} f(\mathbf{x}), \quad (1.10)$$

де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа.

Таким чином, рівнянню (1.10) задовольняє температура $u(\mathbf{x})$, яка встановилась в однорідному тілі. Для визначення $u(\mathbf{x})$ тепер не задається початковий розподіл температури (початкова умова), а достатньо задати одну крайову умову, яка не залежить від часу.

При розгляданні нелінійних стаціонарних процесів теплопровідності, щільність джерел може нелінійно залежати від температури, тобто мати вигляд $f(\mathbf{x}, u)$.

1.3.2 Формальна постановка задачі

У кулі $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$ розглядатимемо рівняння нелінійної стаціонарної теплопровідності

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.11)$$

з двома типами крайових умов:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.13)$$

Одним з типових випадків залежності функції щільності теплових джерел від температури є степенева залежність вигляду $f(\mathbf{x}, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ ($p > 0$, $q > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$). Ця нелінійність характеризується тим, що є лінійною комбінацією двох типів нелінійностей, перша з яких монотонно зростає, а друга – монотонно спадає зі зростанням u . Нелінійність такого типу називатимемо гетеротонною.

Ставиться задача знаходження додатного радіально-симетричного (тобто залежного лише від $r = |\mathbf{x}|$) розв'язку крайових задач (1.11), (1.12) та (1.11), (1.13) для $f(\mathbf{x}, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$.

1.4 Постановка задач дослідження

Проведений системний аналіз предметної області показав, що найбільш ефективними з точки зору обчислювальної реалізації методами розв'язання нелінійних еліптичних крайових задач є ітераційні методи з двобічним характером збіжності. У той же час ці методи у застосуванні до знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних крайових задач з гетеротонними нелінійностями не застосовувалися.

Метою роботи є застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач (1.11), (1.12) та (1.11), (1.13) у випадку степеневої нелінійності гетеротонного типу в правій частині.

Для досягнення поставленої мети треба виконати наступні етапи:

- провести системний аналіз предметної області;
- ознайомитися з методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах та з методом двобічних наближень розв’язання нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором;
 - розробити алгоритм чисельного розв’язання розглядуваної задачі на основі використання методу двобічних наближень;
 - виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в системі комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 11;
 - провести обчислювальний експеримент для тестових задач.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Основні відомості з теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах

Наведемо основні відомості з теорії напівупорядкованих банахових просторів [11].

Нехай \mathcal{U} – дійсний банахів простір, θ – нульовий елемент простору \mathcal{U} .

Означення 2.1. Відрізком $[u, v]$, що з'єднує точки u та v банахового простору \mathcal{U} , називається сукупність елементів з \mathcal{U} вигляду $tv + (1-t)u$, де $0 \leq t \leq 1$.

Означення 2.2. Множина M – підмножина банахового простору \mathcal{U} – називається опуклою, якщо разом з кожними своїми двома точками вона повністю містить і відрізок, що їх з'єднує.

Означення 2.3. Променем, що проходить через точку $u \in \mathcal{U}$ ($u \neq \theta$), називається сукупність елементів з \mathcal{U} вигляду tu , де $t \geq 0$.

Означення 2.4. Замкнута опукла множина $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ називається конусом, якщо разом з кожною точкою u вона містить промінь, що проходить через u , та якщо з $u, -u \in \mathcal{K}$ випливає, що $u = \theta$.

Отже, для конуса \mathcal{K} виконується:

- 1) якщо $u \in \mathcal{K}$ і $u \neq \theta$, то $\alpha u \in \mathcal{K}$ для будь-якого $\alpha \geq 0$;
- 2) якщо $u \in \mathcal{K}$ і $u \neq \theta$, то $-u \notin \mathcal{K}$.

В $C(\bar{\Omega})$ (простір неперервних в $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ функцій) прикладом конуса є множина невід'ємних функцій

$$\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\},$$

(множину $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ вважаємо обмеженою).

Конуси з невід'ємними елементами природно виникають при розв'язанні

прикладних задач: невід'ємні функції можуть описувати, наприклад, чисельність популяції, концентрацію речовини тощо.

Означення 2.5. Простір \mathcal{U} називається напівупорядкованим, якщо для деяких пар елементів $u, v \in \mathcal{U}$ визначено бінарне відношення \leq таке, що:

- а) із $u \leq v$ випливає, що $\alpha u \leq \alpha v$ при $\alpha \geq 0$ і $\alpha v \leq \alpha u$ при $\alpha < 0$;
- б) із $u \leq v$ і $u \geq v$ випливає, що $u = v$;
- в) із $u_1 \leq v_1$ і $u_2 \leq v_2$ випливає, що $u_1 + u_2 \leq v_1 + v_2$;
- г) із $u \leq v$ і $v \leq w$ випливає, що $u \leq w$.

Напівупорядкованість в банаховому просторі \mathcal{U} може бути введена за допомогою конуса \mathcal{K} .

Означення 2.6. Для $u, v \in \mathcal{U}$ пишуть $u \leq v$, якщо $u - v \in \mathcal{K}$.

Виконання умов а) – г) перевіряється безпосередньо на підставі визначення конуса. Крім того, з замкнутості конуса \mathcal{K} випливає можливість переходу до границі в нерівностях:

д) якщо $\|u_n - u\| \rightarrow 0$, $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ та $u_n \leq v_n$ при всіх $n = 1, 2, \dots$, то $u \leq v$.

Напівупорядкованість, що вводиться конусами \mathcal{K}_+ , має простий сенс: так, напівупорядковування простору $C(\bar{\Omega})$ за допомогою конуса \mathcal{K}_+ означає, що

$$u \leq v := u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Домовимося також про наступні позначення:

писатимемо $u \bar{\leq} v$, якщо $u - v \notin \mathcal{K}$;

писатимемо $u < v$, якщо $u \leq v$ и $u \neq v$.

Аналогічно вводяться позначення $u \geq v$, $u \bar{\geq} v$, $u > v$.

Означення 2.7. Елементи $u \geq \theta$, тобто елементи $u \in \mathcal{K}$, називаються до-

датними.

Означення 2.8. Конусним відрізком $\langle v, w \rangle$ в напівупорядкованому за допомогою конуса \mathcal{K} просторі \mathcal{U} називатимемо множину вигляду

$$\langle v, w \rangle := \{u \in \mathcal{U} : v \leq u \leq w\}.$$

Отже, якщо $u \in \langle v, w \rangle$, то

$$u - v \in \mathcal{K} \text{ та } w - u \in \mathcal{K}.$$

Означення 2.9. Конус \mathcal{K} називається нормальним, якщо існує таке число $N(\mathcal{K}) > 0$, що з $\theta \leq u \leq v$ випливає, що

$$\|u\| \leq N(\mathcal{K})\|v\|.$$

Стала $N(\mathcal{K})$ називається константою нормальності конуса; якщо $N(\mathcal{K}) = 1$, то конус \mathcal{K} називають гострим і кажуть, що норма монотонна.

Конус \mathcal{K}_+ у просторі $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть, гострим).

Той факт, що простір \mathcal{U} напівупорядковано деяким конусом \mathcal{K} , може ефективно використовуватися при вивченні оператора T , що діє в \mathcal{U} , лише в тому випадку, коли T має ті чи інші властивості, що пов'язані з напівупорядкованістю. Розглянемо означення основних типів операторів, які використовуються в подальшому.

Означення 2.10. Оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ називається додатним, якщо він залишає інваріантним (перетворює в себе) конус \mathcal{K} .

Іншими словами, оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ є додатним, якщо $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, тобто $T(u) \in \mathcal{K}$ при будь-якому $u \in \mathcal{K}$. Також умову додатності оператора T можна записати у вигляді:

із $u \geq \theta$ випливає, що $T(u) \geq \theta$.

Важливий підклас додатних операторів утворюють так звані u_0 -додатні оператори, які визначаються так. Нехай зафіксований деякий ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$. Позначимо через $K(u_0)$ множину тих елементів $u \in \mathcal{K}$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що

$$\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0.$$

Означення 2.11. Додатний оператор T , який переводить ненульові елементи конуса \mathcal{K} в $K(u_0)$, називається u_0 -додатним оператором, тобто для будь-якого ненульового $u \in \mathcal{K}$ знайдуться такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що

$$\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0.$$

Означення багатьох різновидів операторів, що діють в напівупорядкованому просторі, так чи інакше пов'язані з властивістю монотонності.

Означення 2.12. Оператор T , що діє в \mathcal{U} , називається монотонним (ізонним), якщо з $u, v \in \mathcal{U}$, $u \geq v$ випливає $T(u) \geq T(v)$

Означення 2.13. Оператор T , що діє в \mathcal{U} , називається антимонотонним (антитонним), якщо з $u, v \in \mathcal{U}$, $u \geq v$ випливає $T(u) \leq T(v)$.

Дамо означення ще одного досить загального класу операторів, пов'язаного з властивістю своєрідної узагальненої монотонності.

Означення 2.14. Оператор T , що діє в \mathcal{U} , називається гетеротонним, якщо він допускає діагональне подання $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, причому супутній оператор \hat{T} визначений на $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ і $\hat{T}(v, w)$ монотонно зростає за v та спадає за w , тобто:

а) із $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$, $v_1 \geq v_2$ випливає $\hat{T}(v_1, w) \geq \hat{T}(v_2, w)$;

б) із $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$, $w_1 \geq w_2$ випливає $\hat{T}(v, w_1) \leq \hat{T}(v, w_2)$.

Вибір супутнього оператора $\hat{T}(v, w)$ завжди неоднозначний: наприклад, якщо $\hat{T}(v, w)$ супутній оператор для T , то супутнім буде також оператор $\hat{T}(v, w) + v - w$. При розв'язанні конкретних задач з цієї свободи вибору можна отримувати певні вигоди. Проте, коли мова йде про гетеротонний оператор T , завжди мається на увазі, що супутній йому оператор \hat{T} уже конкретно вказано (фіксований).

Наступна серія різновидів операторів, що діють в просторі з конусом, пов'язана з характером росту (зміни) значення оператора по відношенню до тих чи інших класів збільшень аргументу. Найбільш важливі (за кількістю застосувань) типи операторів визначаються зростанням значень оператора уздовж променів, що лежать в конусі \mathcal{K} .

Означення 2.15. Додатний гетеротонний оператор називається псевдоувігнутиим, якщо $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких ненульових $v, w \in \mathcal{K}$ і для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w), \quad (2.1)$$

причому в (2.1) неможлива рівність.

Отже, для псевдоувігнутого оператора T існує такий ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$, що виконуються наступні умови:

а) для будь-яких $v, w \in \mathcal{K}$ ($v \neq \theta, w \neq \theta$) справедливі нерівності

$$\alpha u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta u_0,$$

де $\alpha = \alpha(v, w) > 0$, $\beta = \beta(v, w) > 0$;

б) для кожних таких $v, w \in K(u_0)$, що $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$, $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ ($\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$, $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$, $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$), виконуються нерівності

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w), \quad \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \neq \tau \hat{T}(v, w),$$

де $\tau \in (0, 1)$.

Означення 2.16. Псевдоувігнутий оператор T називається u_0 -псевдоувігнутим, якщо для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$ можна вказати таке $\eta = \eta(v, w, \tau) > 0$, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau[1 + \eta(v, w, \tau)]\hat{T}(v, w).$$

2.2 Метод двобічних наближень розв'язання нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором

Розглядатимемо рівняння

$$u = T(u) \tag{2.2}$$

з додатним нелінійним оператором T , що діє в банаховому просторі \mathcal{U} , напівпорядкованому конусом \mathcal{K} . Нас цікавитимуть умови, за яких це рівняння матиме в конусі \mathcal{K} принаймні один ненульовий розв'язок u^* . Такий розв'язок $u^* \geq \theta$, $u^* \neq \theta$, і називатимемо додатним розв'язком рівняння (2.2). У разі, коли $T(\theta) = \theta$ мова буде йти про інший, відмінний від θ , розв'язок в конусі \mathcal{K} .

Розглянемо спочатку питання існування нерухомої точки у гетеротонного оператора [9, 11].

Нехай гетеротонний оператор T діє в банаховому просторі, напівупорядкованому конусом \mathcal{K} .

Означення 2.17. Конусний відрізок $\langle v, w \rangle$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , якщо виконуються нерівності

$$\hat{T}(v, w) \geq v, \quad \hat{T}(v, w) \leq w.$$

Очевидно, що з сильної інваріантності конусного відрізка $\langle v, w \rangle$ випливає звичайна інваріантність, тобто $T(\langle v, w \rangle) \subset \langle v, w \rangle$.

Для подальших викладок введемо наступну систему рівнянь:

$$\hat{T}(v, w) = v, \quad \hat{T}(v, w) = w. \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. Нехай $\langle v_0, w_0 \rangle$ – конусний відрізок, сильно інваріантний для гетеротонного оператора T та система (2.3) на цьому відрізку не має таких розв'язків, що $v \neq w$. Тоді для існування на $\langle v_0, w_0 \rangle$ у оператора T хоча б однієї нерухомої точки u^* достатньо, щоб конус \mathcal{K} був нормальним, а оператор \hat{T} – цілком неперервним.

Відзначимо, що виконання умов теореми не гарантує єдиність нерухомої точки у оператора T на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$.

Розглянемо тепер умови, яким потрібно підпорядкувати оператор T , щоб додатній розв'язок рівняння $u = T(u)$ був єдиним.

Розглянемо ітераційний процес

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

який починається в точці (v_0, w_0) , тобто $v^{(0)} = v_0$, $w^{(0)} = w_0$.

Зауважимо, що для гетеротонного оператора T з нерівностей $v_1 \leq v_2 \leq w_2 \leq w_1$ впливає нерівність

$$\hat{T}(v_1, w_1) \leq \hat{T}(v_2, w_2).$$

Дійсно, за означенням гетеротонного оператора маємо

$$\hat{T}(v_1, w_1) \leq \hat{T}(v_2, w_1) \leq \hat{T}(v_2, w_2).$$

З урахуванням сильної інваріантності конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ і гетеротонності оператора T , для якого оператор \hat{T} є супутнім, маємо

$$\begin{aligned} v_0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} = \hat{T}(v^{(0)}, w^{(0)}) = \hat{T}(v_0, w_0) \leq \\ &\leq \hat{T}(w_0, v_0) = \hat{T}(w^{(0)}, v^{(0)}) = w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0, \end{aligned}$$

тобто

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

Далі, продовжуючи ітерації, одержуємо

$$\begin{aligned} v^{(1)} = \hat{T}(v^{(0)}, w^{(0)}) &\leq \hat{T}(v^{(1)}, w^{(1)}) = v^{(2)} \leq \\ &\leq w^{(2)} = \hat{T}(w^{(1)}, v^{(1)}) \leq \hat{T}(w^{(0)}, v^{(0)}) = w^{(1)}, \end{aligned}$$

тобто

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq v^{(2)} \leq w^{(2)} \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

Продовжуючи за індукцією, одержимо ланцюг нерівностей

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}. \quad (2.5)$$

Розглянемо оператор $\tilde{T} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, який парі елементів (v, w) ставить у відповідність пару $(\hat{T}(v, w), \hat{T}(w, v))$. Введемо далі напівупорядкованість в $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ за правилом: $(v', w') \succ (v, w)$, якщо $v' \geq v$, $w' \leq w$. Можна вважати, що напівупорядкованість, визначена знаком \succ , вводиться за допомогою конуса $\tilde{\mathcal{K}} = \{(v, w) \mid v \in \mathcal{K}, -w \in \mathcal{K}\}$. Нехай конус \mathcal{K} є нормальним, а оператор \hat{T} – цілком неперервним. Тоді нормальний і конус $\tilde{\mathcal{K}}$, а цілком неперервний і оператор \tilde{T} .

Інваріантний для оператора \tilde{T} конусний відрізок $\langle (v_0, w_0), (w_0, v_0) \rangle$ у просторі $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ є обмеженою множиною, яку цілком неперервний оператор \tilde{T} перетворює на компактну (в силу її замкненості) множину $\langle (v^{(1)}, w^{(1)}), (w^{(1)}, v^{(1)}) \rangle$. У термінах напівупорядкованості \prec ланцюг нерівностей (2.5) запишеться у вигляді

$$(w^{(0)}, v^{(0)}) \prec (w^{(1)}, v^{(1)}) \prec \dots \prec (w^{(k)}, v^{(k)}) \prec \dots \quad (2.6)$$

Тоді послідовність (2.6) містить збіжну підпослідовність. З іншого боку з нормальності конуса $\tilde{\mathcal{K}}$ і нерівностей (2.6) випливає, що границі всіх збіжних підпослідовностей монотонної послідовності співпадають. Звідси і випливає, що $v^{(k)} \rightarrow v^*$, $w^{(k)} \rightarrow w^*$ за нормою простору \mathcal{U} , причому $v^* \leq w^*$.

Отже, має місце така теорема.

Теорема 2.2. Нехай конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ є сильно інваріантним

для гетеротонного оператора T і конус \mathcal{K} є нормальним, а оператор \hat{T} – цілком неперервним. Тоді ітераційний процес (2.4), який починається зі значень $v^{(0)} = v_0$, $w^{(0)} = w_0$ збігається, тобто $v^{(k)} \rightarrow v^*$, $w^{(k)} \rightarrow w^*$, причому

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

З цієї теореми випливає, що для будь-якого $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$ та будь-якого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$v^{(k)} \leq T(u) \leq w^{(k)}$$

і якщо T має нерухому точку u^* , то $u^* \in \langle v^*, w^* \rangle$.

Якщо оператор \tilde{T} неперервний, то переходячи у (2.4) при $k \rightarrow \infty$, одержимо, що v^* , w^* є розв'язком системи (2.3). Значить, якщо (у доповненні до припущень теореми 2.2) на $\langle v_0, w_0 \rangle$ розв'язок системи (2.3) єдиний, то $v^* = w^*$ і оператор T має на $\langle v_0, w_0 \rangle$ єдину нерухому точку $u^* := v^* = w^*$, до якої збігаються послідовні ітерації $T^k(u)$ за будь-якого $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$. Однак для побудови розв'язку рівняння $u = T(u)$ в цьому випадку зручно застосовувати ітераційний процес (2.4), оскільки виконуватимуться нерівності

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}. \quad (2.7)$$

Нерівності (2.7) як раз і характеризують ітераційний процес (2.3) як метод двобічних наближень: на кожній ітерації точний розв'язок u^* рівняння $u = T(u)$ розміщується точно між нижнім $v^{(k)}$ та верхнім $w^{(k)}$ наближеннями.

Таким чином, справедлива наступна теорема [11].

Теорема 2.3. Нехай виконано умови теореми 2.2. Окрім того, нехай опе-

ратор \tilde{T} неперервний і на $\langle v_0, w_0 \rangle$ система (2.2) має єдиний розв'язок, причому $v^* = w^*$. Тоді ітераційний процес (2.3), який починається зі значень $v^{(0)} = v_0$, $w^{(0)} = w_0$, двобічно збігається до єдиної нерухомої точки u^* оператора T .

Якщо за наближений розв'язок рівняння $u = T(u)$ на k -й ітерації брати $u^{(k)} = \frac{v^{(k)} + w^{(k)}}{2}$, то, оскільки $v^{(k)} \leq u^{(k)} \leq w^{(k)}$ та $v^{(k)} \leq u^* \leq w^{(k)}$, буде мати місце оцінка

$$\|u^{(k)} - u^*\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.$$

Звідси випливає, що ітерації слід проводити до виконання нерівності $\|w^{(k)} - v^{(k)}\| < 2\varepsilon$ і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^* \approx u^{(k)}$.

2.3 Застосування методу двобічних наближень до знаходження радіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач

Розглянемо у одиничній кулі $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$ нелінійне еліптичне диференціальне рівняння вигляду (1.11) із правою частиною $f(\mathbf{x}, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ ($\lambda > 0$, $\mu > 0$, $p > 0$, $q > 0$), тобто рівняння

$$-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.8)$$

У сферичній системи координат, яка вводиться за формулами

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x_3 = r \cos \theta,$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, r \geq 0,$$

оператор Лапласа матиме вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Оскільки ми припускаємо, що розв'язок має радіальну симетрію, тобто його значення в точці залежить лише від відстані цієї точки від початку координат. З цього випливає, що функція u залежить тільки від змінної $r = |\mathbf{x}|$, де $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Тоді рівняння (2.7) стає звичайним диференціальним рівнянням:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = \lambda u^p + \mu u^{-q},$$

або

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = r^2 (\lambda u^p + \mu u^{-q}), \quad (2.9)$$

де $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – відстань від точки до початку координат.

Крайові умови (1.12), (1.13), що були задані на сфері $|\mathbf{x}| = 1$, відповідно призводять до наступних крайових умов для функції $u = u(r)$ при $r = 1$:

$$\begin{aligned}u(1) &= 0, \\u'(1) + hu(1) &= 0.\end{aligned}$$

Точка $r = 0$ є особливою точкою диференціального рівняння (2.8), тому для функції $u = u(r)$ при $r = 0$ треба поставити умову обмеженості:

$$|u(0)| < +\infty.$$

Отже, проблема знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків рівняння (1.11) за крайових умов (1.12) чи (1.13) зводиться відповідно до наступних двох крайових задач:

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = r^2 (\lambda u^p + \mu u^{-q}), \quad r \in (0,1), \quad (2.10)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(1) = 0. \quad (2.11)$$

i

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = r^2 (\lambda u^p + \mu u^{-q}), \quad r \in (0,1), \quad (2.12)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u'(1) + hu(1) = 0. \quad (2.13)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння $-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$ має вигляд

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Умова обмеженості $|u(0)| < +\infty$ буде виконана, якщо обрати $C_1 = 0$,

$C_2 = 1$, тобто умові при $r = 0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_1(r) = 1$.

Крайовій умові $u(1) = 0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_2(r) = \frac{1-r}{r}$, а крайовій умові $u'(1) + hu(1) = 0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_2(r) = \frac{h-hr+r}{r}$. Визначники Вронського цих пар функцій відповідно дорівнюють

$$|W(r)| = \begin{vmatrix} u_1(r) & u_2(r) \\ u_1'(r) & u_2'(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1-r}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{r^2},$$

$$|W(r)| = \begin{vmatrix} u_1(r) & u_2(r) \\ u_1'(r) & u_2'(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h-hr+r}{r} \\ 0 & -\frac{h}{r^2} \end{vmatrix} = -\frac{h}{r^2}.$$

Тоді функції Гріна крайових задач (2.10), (2.11) і (2.12), (2.13) матимуть вигляд

$$G(r, s) = - \begin{cases} \frac{u_1(r)u_2(s)}{s^2 |W(s)|}, & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{u_1(s)u_2(r)}{s^2 |W(s)|}, & s < r \leq 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-s}{s}, & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{1-r}{r}, & s < r \leq 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$G(r, s) = - \begin{cases} \frac{u_1(r)u_2(s)}{s^2 |W(s)|}, & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{u_1(s)u_2(r)}{s^2 |W(s)|}, & s < r \leq 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{h-hs+s}{hs}, & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{h-hr+r}{hr}, & s < r \leq 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Тоді кожна з задач (2.10), (2.11) і (2.12), (2.13) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 Q(r, s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds, \quad (2.16)$$

де $Q(r, s) = s^2 G(r, s)$.

Узагальненим розв'язком крайової задачі (2.10), (2.11) чи (2.12), (2.13) називатимемо функцію $u^* \in C[0, 1]$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (2.16). У цьому сенсі і розумітимемо еквівалентність крайових задач (2.10), (2.11) чи (2.12), (2.13) та інтегрального рівняння (2.16).

З рівнянням (2.16) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C[0, 1]$ за правилом

$$T(u)(r) = \int_0^1 Q(r, s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds. \quad (2.17)$$

Тоді рівняння (2.16) запишеться у вигляді $u = T(u)$. Це рівняння розглядатимемо у банаховому просторі $C[0, 1]$ напівупорядкованному конусом \mathcal{K}_+ невід'ємних у $C[0, 1]$ функцій.

Вивчимо властивості оператора T .

Очевидно, що функції $Q(r, s) = s^2 G(r, s)$ для кожної з функцій Гріна (2.14), (2.15) неперервні та невід'ємні при $r, s \in [0, 1]$.

Оскільки $Q(r, s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] \geq 0$ для всіх $p, q > 0$ і $r, s \in [0, 1]$, то $T(u) \geq \theta$ для всіх $u \geq \theta$, а отже, оператор T є додатним.

Дослідимо оператор T на гетеротонність. Функція $f(r, u)$ дозволяє діагональне подання $f(r, u) = \hat{f}(r, u, u)$, де $\hat{f}(r, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$ неперервна за сукупністю змінних r, v, w , монотонно зростає за v та монотонно спадає за w . Отже, оператор (2.17) є гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(r) = \int_0^1 Q(r, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] ds.$$

Очевидно, що оператори T і \hat{T} цілком неперервні.

Нехай $u_0(r) = \int_0^1 Q(r, s) ds$. Для функції Гріна (2.14) $u_0(r) = \frac{1-r^2}{6}$, а для

функції Гріна (2.15) $u_0(r) = \frac{2+h(1-r^2)}{6h}$.

У випадку функції Гріна вигляду (2.14) має місце оцінка

$$\varphi(s)u_0(r) \leq Q(r, s) \leq \psi(s)u_0(r), \quad (2.18)$$

де $\varphi(s) = \min \left\{ \frac{6s(1-s)}{1+s}, 3s^2 \right\}$, $\psi(s) = \frac{6s}{1+s}$ – неперервні та невід’ємні при

$s \in [0, 1]$ функції, а у випадку функції Гріна вигляду (2.15) має місце оцінка

$$\varphi(s)u_0(r) \leq Q(r, s) \leq \psi(s)u_0(r), \quad (2.19)$$

де $\varphi(s) = \frac{6s^3}{2+h}$, $\psi(s) = \frac{6s(h-hs+s)}{2+h(1-s^2)}$ – неперервні та невід’ємні при $s \in [0, 1]$

функції.

З нерівностей (2.18), (2.19) випливає, що для будь-якої $u \in C[0, 1]$ має місце нерівність:

$$\alpha u_0(r) \leq \int_0^1 Q(r, s)u(s) ds \leq \beta u_0(r),$$

де $\alpha = \alpha(u) = \int_0^1 \varphi(s)u(s)ds$, $\beta = \beta(u) = \int_0^1 \psi(s)u(s)ds$.

Отже, лінійний оператор $\int_0^1 Q(r,s)u(s)ds \in u_0$ -обмеженим.

Дослідимо оператор T вигляду (2.17) на псевдоувігнутість та u_0 -псевдоувігнутість з функцією $u_0(r) = \frac{1}{6}(1-r^2)$ для випадку крайових умов (2.11) і функцією $u_0(r) = \frac{2+h(1-r^2)}{6h}$ для випадку крайових умов (2.13). Для оператора T із супровідним оператором \hat{T} має виконуватися умова: для будь-яких додатних v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\lambda\tau^p v^p + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q} > \tau[\lambda v^p + \mu w^{-q}]. \quad (2.20)$$

Для будь-якої $u \in C[0,1]$ має місце нерівність

$$\alpha u_0(r) \leq \int_0^1 Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds \leq \beta u_0(r), \quad (2.21)$$

де $\alpha = \int_0^1 \varphi(s)Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds$, $\beta = \int_0^1 \psi(s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds$, тобто

$T(u) \in K(u_0)$, для будь-яких $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$.

Нехай $v, w \in K(u_0)$. Це означає, що існують такі $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$, $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$, $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$, такі, що $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$, $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$. ($\alpha_1 = \alpha_1(u) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(u) > 0$). Розглянемо при $\tau \in (0, 1)$ нерівність $\hat{T} \left(\tau v, \frac{1}{\tau} w \right) > \tau \hat{T}(v, w)$. Оскільки

$$\begin{aligned}
\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) &= \int_0^1 Q(r, s) \left(\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q}(s) \right) ds - \\
&\quad - \tau \int_0^1 Q(r, s) [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] ds = \\
&= \int_0^1 Q(r, s) \left[\left(\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q}(s) \right) - \tau [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] \right] ds,
\end{aligned}$$

то з нерівності (2.20) і умови неперервності функції $\lambda v^p + \mu w^{-q}$ випливає, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \geq \theta, \text{ причому } \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \neq \theta.$$

Отже, за умови $p, q \in (0, 1)$ оператор T є псевдоувігнутим.

Доведемо, що за умови $p, q \in (0, 1)$ оператор T також буде і u_0 -псевдоувігнутим.

З нерівностей (2.20) і (2.21) випливає, що для будь-яких $r \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
&\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) = \\
&= \int_0^1 Q(r, s) \left[\left(\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q}(s) \right) - \tau (\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)) \right] ds \geq \alpha_1 u_0(r),
\end{aligned}$$

$$\text{де } \alpha_1 = \int_0^1 \varphi(s) \left[\left(\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q}(s) \right) - \tau (\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)) \right] ds > 0.$$

Тоді

$$\int_0^1 Q(r, s) \left(\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q}(s) \right) ds \geq \tau \int_0^1 Q(r, s) [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] ds + \alpha_1 u_0(r).$$

Знову скористаємося нерівністю (2.21). Звідси одержимо, що будь-яких $r \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & \tau \int_0^1 Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds + \alpha_1 u_0(r) \geq \\ & \geq \tau \int_0^1 Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds + \frac{\alpha_1}{\beta} \int_0^1 Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds \geq \\ & \geq \tau \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta\tau}\right) \int_0^1 Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds. \end{aligned}$$

Тоді за будь-яких $r \in [0,1]$ справджується нерівність

$$\int_0^1 Q(r,s) \left(\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \frac{1}{\tau^{-q}} w^{-q}(s) \right) ds \geq \tau \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta\tau}\right) \int_0^1 Q(r,s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds,$$

тобто $\hat{T} \left(\tau v, \frac{1}{\tau} w \right) \geq \tau(1 + \eta) \hat{T}(v, w)$ для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0,1)$, де

$$\eta = \eta(v, w, \tau) = \frac{\alpha_1}{\beta\tau} > 0.$$

Отже, оператор $T \in u_0$ -псевдоувігнутиим.

Лема 2.1. Оператор T , що діє за правилом (2.17), розглядуваний для кожної з крайових задач (2.10), (2.11) і (2.12), (2.13), має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є гетеротонним оператором при $p, q > 0$;

в) є u_0 -псевдоувігнутиим при $p, q \in (0,1)$, де $u_0(r) = \frac{1}{6}(1 - r^2)$ для задачі

(2.9), (2.10) і $u_0(r) = \frac{2 + h(1 - r^2)}{6h}$ для задачі (2.11), (2.12).

Оскільки оператор T перетворює конус \mathcal{K}_+ в $K(u_0)$, то кінці сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ для оператора T шукатимемо у вигляді

$$v_0 = \alpha u_0, \quad w_0 = \beta u_0.$$

Тоді умови, що визначають кінці сильно інваріантного конусного відрізка, призводять до таких нерівностей для визначення сталих α і β ($0 < \alpha < \beta$):

$$\alpha u_0(r) \leq \int_0^1 Q(r, s) [\lambda \alpha^p u_0^p(s) + \mu \beta^{-q} u_0^{-q}(s)] ds \quad \text{для всіх } r \in [0, 1], \quad (2.22)$$

$$\beta u_0(r) \geq \int_0^1 Q(r, s) [\lambda \beta^p u_0^p(s) + \mu \alpha^{-q} u_0^{-q}(s)] ds \quad \text{для всіх } r \in [0, 1]. \quad (2.23)$$

Нерівності (2.22), (2.23) можуть бути зведені до вигляду

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q \leq \mu m_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q \leq \mu M_2, \quad (2.24)$$

де

$$m_1 = \min_{r \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(r, s) u_0^p(s)}{u_0(r)} ds, \quad M_1 = \max_{r \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(r, s) u_0^p(s)}{u_0(r)} ds,$$

$$m_2 = \min_{r \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(r, s) u_0^{-q}(s)}{u_0(r)} ds, \quad M_2 = \max_{r \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(r, s) u_0^{-q}(s)}{u_0(r)} ds.$$

Для крайової задачі (2.10), (2.11) нами було знайдено, що

$$m_1 = \frac{3^{1-p}}{2^{2+p}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)}, \quad M_1 = \frac{3^{1-p}}{2^{1+p}} \left(\frac{2}{1+p} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)} \right),$$

$$m_2 = \frac{3^{1+q}}{2^{2-q}} \cdot \left(\frac{2}{q-1} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right), \quad M_2 = \frac{3^{1+q}}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)},$$

а для крайової задачі (2.12), (2.13)

$$m_1 = \frac{3^{1-p} \left\{ (2+h)^{p+2} F\left(-\frac{1}{2}, -p, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right) - 2^{2+p}(1+h+hp) \right\}}{2^p h^{2+p} (1+2p)(3+2p)},$$

$$M_1 = \frac{2 \cdot 3^{1-p} [h^2 - 4(1+p) - 4hp(1+p)]}{h^{2+p} (2+h)(1+p)(1+2p)(3+2p)} + \frac{3^{1-p} (2+h)^p}{2^p h^p (1+p)} -$$

$$- \frac{3^{1-p} 2^{1-p} (h-1)(2+h)^{p+1} F\left(-\frac{1}{2}, -p, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right)}{h^{2+p} (1+2p)(3+2p)},$$

$$m_2 = \frac{3^{1+q} \left\{ (2+h)^{q-2} F\left(-\frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right) + 2^{2-q}(qh-h-1) \right\}}{2^{-q} h^{2-q} (2q-1)(2q-3)},$$

$$M_2 = - \frac{2 \cdot 3^{1+q} [h^2 - 4(q-1)qh + 4(q-1)]}{h^{2-q} (2+h)(q-1)(2q-1)(2q-3)} - \frac{3^{1+q} (2+h)^{-q}}{2^{-q} h^{-q} (q-1)} -$$

$$- \frac{3^{1+q} \cdot 2^{1+q} (h-1)(2+h)^{q-3} F\left(-\frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right)}{h^{2-q} (2q-3)(2q-1)},$$

де $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ – гамма-функція Ейлера;

$F(a, b, c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)} \right] z^n$ – гіпергеометрична функція.

Зауважимо, що гіпергеометрична функція має інтегральне подання

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt.$$

Оскільки для більш швидкої збіжності двобічних ітерацій слід взяти найбільше значення α і найменше значення β , що задовольняють нерівності (2.24), то остаточно матимемо, що кінці $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$ сильно інваріантного конусного відрізка слід знаходити з системи рівнянь

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q = \mu m_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q = \mu M_2, \quad (2.25)$$

при цьому, очевидно, виконується умова $0 < \alpha < \beta$.

Для кожної з крайових задач (2.10), (2.11) і (2.12), (2.13) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(r) = \int_0^1 Q(r, s) [\lambda (v^{(n-1)}(s))^p + \mu (w^{(n-1)}(s))^{-q}] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

$$w^{(n)}(r) = \int_0^1 Q(r, s) [\lambda (w^{(n-1)}(s))^p + \mu (v^{(n-1)}(s))^{-q}] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.27)$$

$$v^{(0)}(r) = \alpha u_0(r), \quad w^{(0)}(r) = \beta u_0(r). \quad (2.28)$$

З огляду на властивості оператора T , можна зробити висновок, що ітераційний процес (2.26) – (2.28) двобічно збігається до єдиного у конусі \mathcal{K}_+ додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.10), (2.11) чи (2.12), (2.13). А саме мають місце такі твердження.

Теорема 2.4. Нехай $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$ – одинична куля у \mathbb{R}^3 . Крайова задача

$$\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

при $\lambda, \mu > 0$, $p, q \in (0; 1)$ має єдиний додатний радіально-симетричний розв'язок $u^*(r) = u^*(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$, до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(n)}(r) = \int_0^1 Q(r, s) [\lambda (v^{(n-1)}(s))^p + \mu (w^{(n-1)}(s))^{-q}] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

$$w^{(n)}(r) = \int_0^1 Q(r, s) [\lambda (w^{(n-1)}(s))^p + \mu (v^{(n-1)}(s))^{-q}] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

$$v^{(0)}(r) = \alpha u_0(r), \quad w^{(0)}(r) = \beta u_0(r), \quad (2.31)$$

де

$$Q(r, s) = \begin{cases} s(1-s), & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{s^2(1-r)}{r}, & s < r \leq 1, \end{cases}$$

$$u_0(r) = \frac{1}{6}(1-r^2),$$

а сталі α і β є розв'язком системи рівнянь

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q = \mu m_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q = \mu M_2, \quad (2.32)$$

причому

$$m_1 = \frac{3^{1-p}}{2^{2+p}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)}, \quad M_1 = \frac{3^{1-p}}{2^{1+p}} \left(\frac{2}{1+p} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+p\right)} \right), \quad (2.33)$$

$$m_2 = \frac{3^{1+q}}{2^{2-q}} \cdot \left(\frac{2}{q-1} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)} \right), \quad M_2 = \frac{3^{1+q}}{2^{2-q}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-q)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)}. \quad (2.34)$$

Теорема 2.5. Нехай $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$ – одинична куля у \mathbb{R}^3 . Крайова задача

$$\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

при $\lambda, \mu > 0$, $p, q \in (0; 1)$ має єдиний додатний радіально-симетричний розв'язок $u^*(r) = u^*(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$, до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою

$$v^{(n)}(r) = \int_0^1 Q(r, s) [\lambda (v^{(n-1)}(s))^p + \mu (v^{(n-1)}(s))^{-q}] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.35)$$

$$w^{(n)}(r) = \int_0^1 Q(r, s) [\lambda (w^{(n-1)}(s))^p + \mu (w^{(n-1)}(s))^{-q}] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.36)$$

$$v^{(0)}(r) = \alpha u_0(r), \quad w^{(0)}(r) = \beta u_0(r), \quad (2.37)$$

де

$$Q(r, s) = \begin{cases} \frac{s(h - hs + s)}{h}, & 0 \leq r \leq s, \\ \frac{s^2(h - hr + r)}{hr}, & s < r \leq 1, \end{cases}$$

$$u_0(r) = \frac{2 + h(1 - r^2)}{6h},$$

а сталі α і β є розв'язком системи рівнянь

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q = \mu m_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q = \mu M_2, \quad (2.38)$$

причому

$$m_1 = \frac{3^{1-p} \left\{ (2+h)^{p+2} F\left(-\frac{1}{2}, -p, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right) - 2^{2+p}(1+h+hp) \right\}}{2^p h^{2+p} (1+2p)(3+2p)},$$

$$M_1 = \frac{2 \cdot 3^{1-p} [h^2 - 4(1+p) - 4hp(1+p)]}{h^{2+p} (2+h)(1+p)(1+2p)(3+2p)} + \frac{3^{1-p} (2+h)^p}{2^p h^p (1+p)} -$$

$$- \frac{3^{1-p} 2^{1-p} (h-1)(2+h)^{p+1} F\left(-\frac{1}{2}, -p, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right)}{h^{2+p} (1+2p)(3+2p)}, \quad (2.39)$$

$$m_2 = \mu \frac{3^{1+q} \left\{ (2+h)^{q-2} F\left(-\frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right) + 2^{2-q}(qh - h - 1) \right\}}{2^{-q} h^{2-q} (2q-1)(2q-3)},$$

$$M_2 = -\mu \frac{2 \cdot 3^{1+q} [h^2 - 4(q-1)qh + 4(q-1)]}{h^{2-q} (2+h)(q-1)(2q-1)(2q-3)} - \mu \frac{3^{1+q} (2+h)^{-q}}{2^{-q} h^{-q} (q-1)} -$$

$$- \mu \frac{3^{1+q} \cdot 2^{1+q} (h-1)(2+h)^{q-3} F\left(-\frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}; \frac{h}{2+h}\right)}{h^{2-q} (2q-3)(2q-1)}. \quad (2.40)$$

Двобічна збіжність послідовних наближень (2.26) – (2.28) розуміється у сенсі виконання нерівностей

$$\alpha u_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = \beta u_0.$$

2.4 Алгоритм застосування методу двобічних наближень

Застосування методу двобічних наближень для знаходження додатного радіально-симетричного розв'язку крайової задачі (2.10), (2.11) чи (2.12), (2.13) полягає в наступному:

- а) знайти значення величин m_1, M_1, m_2, M_2 за формулами (2.33), (2.34) для задачі (2.10), (2.11) або за формулами (2.39), (2.40) для задачі (2.12), (2.13);
- б) знайти значення сталих α і β , розв'язавши систему рівнянь (2.25);
- в) задати точність $\varepsilon > 0$ і, застосовуючи ітераційну схему (2.26) – (2.28), побудувати послідовності нижніх $\{v^{(k)}\}$ та верхніх $\{w^{(k)}\}$ наближень;
- г) якщо $\|w^{(k)} - v^{(k)}\| < 2\varepsilon$, то записати наближений розв'язок задачі

$$u^{(k)} = \frac{w^{(k)} + v^{(k)}}{2},$$

при цьому $\|u^* - u^{(k)}\| < \varepsilon$, тобто з точністю ε

$$u^* \approx u^{(k)}.$$

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 11 як система символної математики

Символьні обчислення – це перетворення і робота з математичними рівностями і формулами як з послідовністю символів. В цьому їх принципова відмінність від чисельних розрахунків, які працюють з наближеними чисельними значеннями.

Американська компанія Wolfram Research представляє нам систему комп'ютерної алгебри Mathematica. На сьогоднішній день продукт має широке застосування в наукових, інженерних, математичних та комп'ютерних областях. Даний програмний пакет надає можливості аналітичного обчислення границь, диференціювання та інтегрування функцій, розв'язання диференціальних рівнянь, здійснення інтегральних перетворень та ін. Окрім того, функціональність Mathematica дозволяє розв'язувати вказані вище задачі чисельно. Програмне забезпечення цієї системи написано на мовах програмування C, C++ та Java, а підтримується вона на таких операційних системах, як Windows, OS X та Linux.

Програми у системі Mathematica складаються за допомогою функціональної мови програмування Wolfram. Підтримується процедурне програмування, обумовлене використанням циклів та умовних операторів, а також реалізовано об'єктно-орієнтований підхід. Wolfram дозволяє здійснювати відкладені обчислення. Крім того, в системі Mathematica можна визначати власні правила роботи з тими чи іншими виразами. Документація мови доволі велика за обсягом, при цьому мова не стандартизована; у майбутньому планується проведення часткової стандартизації [16].

Окрім того, Mathematica забезпечує автоматичне генерування програмного коду мовою C та його компонування, а згенеровані програми можна використовувати автономно. Для створення, обробки та оптимізації C-коду підтримується використання SymbolicC. Програми можуть посилатися на зовнішні ди-

намічні бібліотеки, в тому числі підтримується інтеграція з CUDA та OpenCL.

Пакет Mathematica є найбільш розвиненою системою символьних і чисельних обчислень. Програми, написані за допомогою вбудованої в пакет мови програмування, короткі і мають високу ефективність. Тому для розв'язання поставлених задач серед інших середовищ розробки і систем комп'ютерної алгебри був обраний саме пакет Mathematica.

3.2 Опис програми

Програмна реалізація методу двобічних наближень була виконана у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 11.0.

Перший блок «Initialization» містить ініціалізацію всіх функцій, які використовуються у роботі методу. У першу чергу, це ядро інтегрального оператора T та права частина диференціального рівняння. Далі йдуть інші необхідні функції, а саме: функції для чисельного інтегрування та перше наближення. Окрім того, задаються всі параметри, що входять до задачі. Також створюються масиви для зберігання даних, одержуваних у процесі роботи методу.

У другому блоці «Algorithm» міститься реалізація алгоритму методу. В циклі будуються двосторонні наближення до розв'язку поставленої задачі.

Третій блок «Output» складають дані, отримані в результаті роботи методу. В цьому блоці вони виводяться й обробляються.

У четвертому блоці «Graphics» відображаються результати роботи методу у вигляді графіків: послідовності верхніх та нижніх наближень, наближений розв'язок задачі у вигляді поверхні та ліній рівня знайденої функції, а також функціональна залежність норм розв'язків від параметрів p , q , λ , μ з лініями рівня.

Код програми наведено в додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент було проведено для задач

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = r^2 (\lambda u^p + \mu u^{-q}), \quad r \in (0,1), \quad (4.1)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(1) = 0, \quad (4.2)$$

i

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = r^2 (\lambda u^p + \mu u^{-q}), \quad r \in (0,1), \quad (4.3)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u'(1) + hu(1) = 0. \quad (4.4)$$

Розглянемо задачу (4.1), (4.2) з параметрами $p = 0,7$, $q = 0,2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$. Збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 5 ітерацій. За формулами (2.33), (2.34) знайдено, що

$$m_1 = 0,142166, \quad M_1 = 0,21913, \quad m_2 = 1,56974, \quad M_2 = 1,8982.$$

З системи рівнянь (2.32) дістали

$$\alpha = 1,5448, \quad \beta = 2,1096.$$

На рис. 4.1 наведено графіки верхніх $w^{(n)}(r)$ (точкова лінія) та нижніх $v^{(n)}(r)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 4.2 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(5)}(r)$, а на рис. 4.3 – поверхні рівня функції $u^{(5)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$. В таблиці 4.1 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(r)$ при $r = 0,1i$,

$i = 0, 1, \dots, 10.$

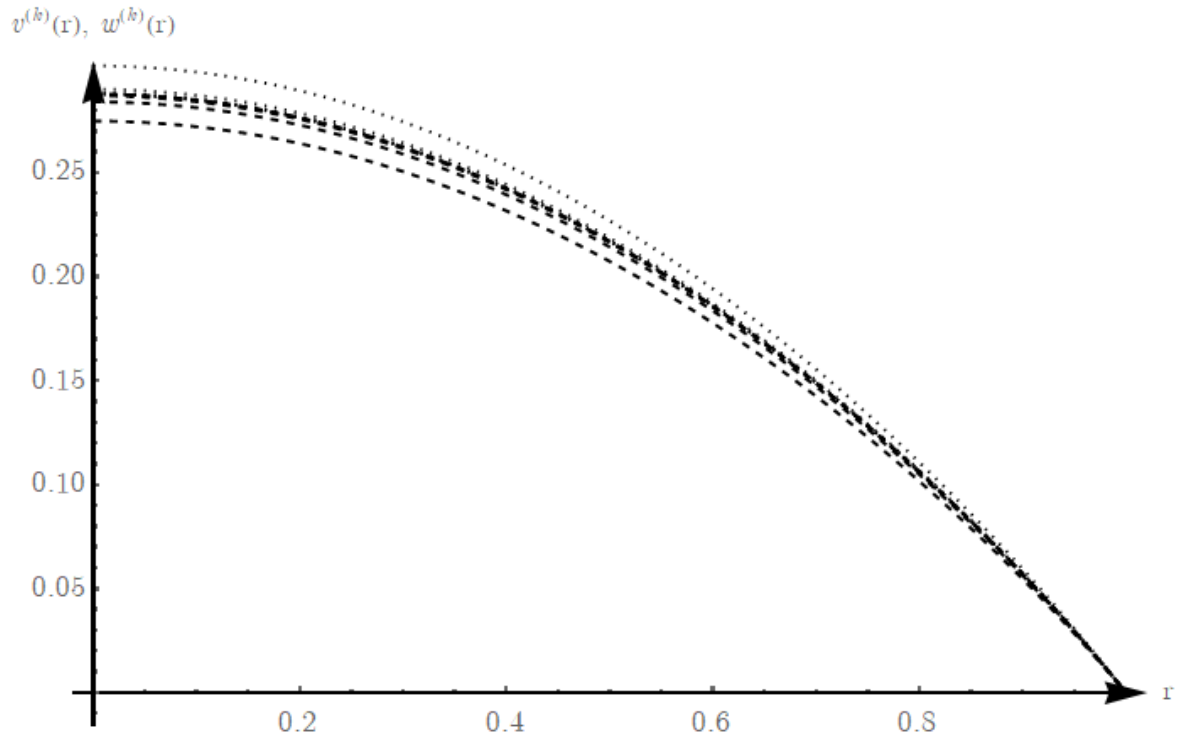


Рисунок 4.1 – Графіки $w^{(k)}(r)$ і $v^{(k)}(r)$, $k = \overline{0, 5}$

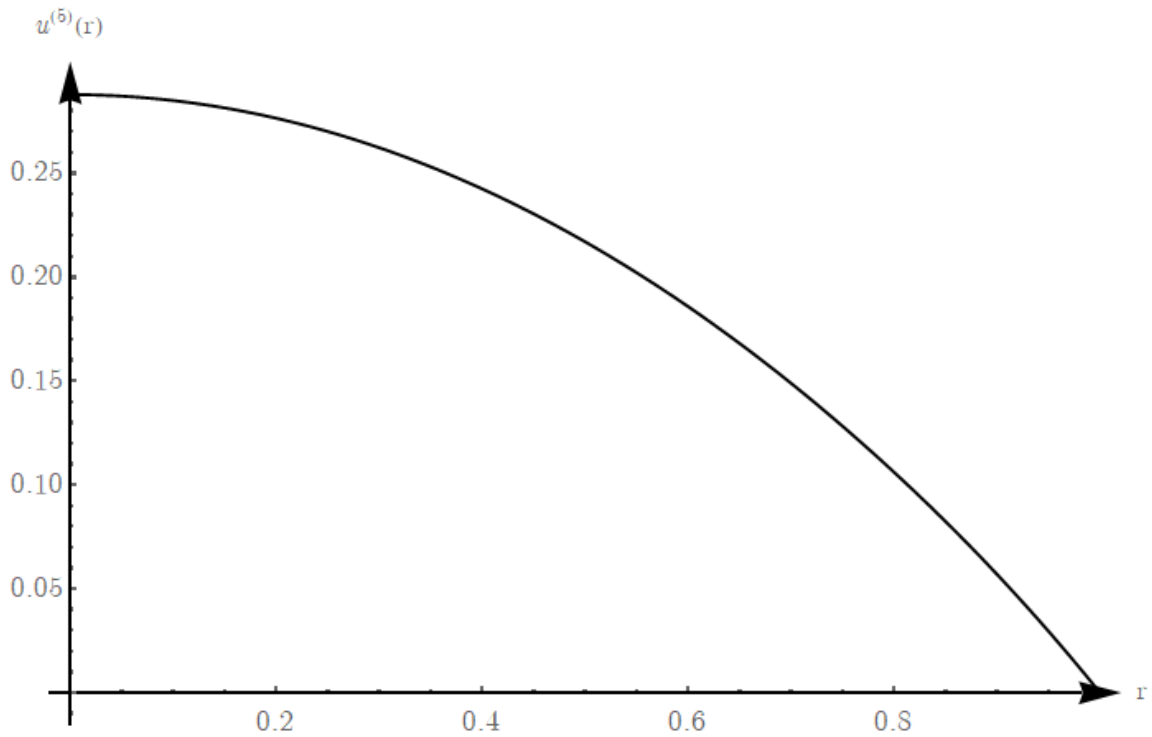


Рисунок 4.2 – Графік $u^{(5)}(r)$

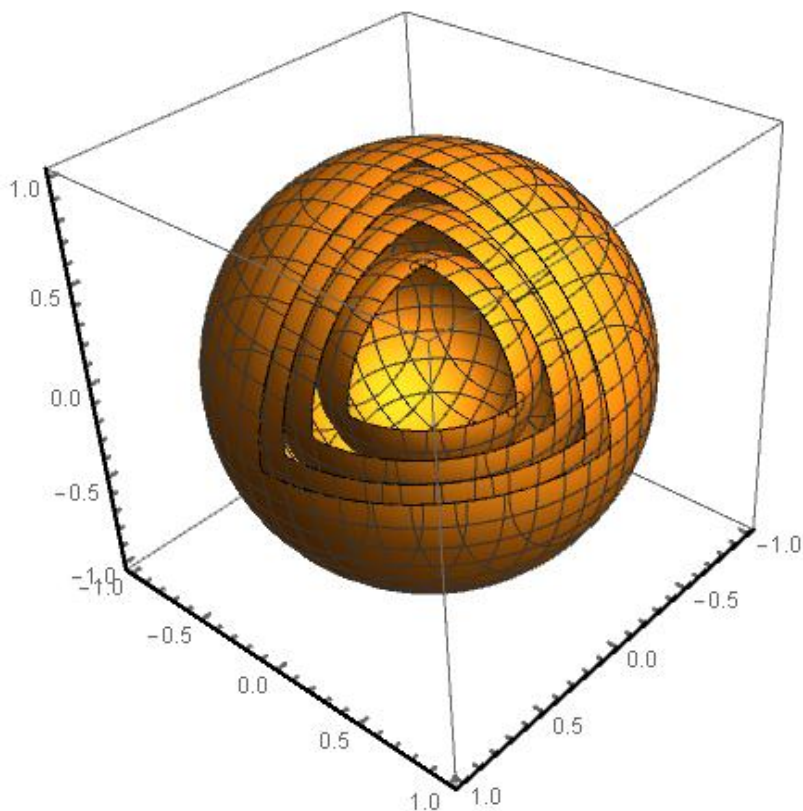


Рисунок 4.3 – Поверхні рівня функції $u^{(5)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$

Таблиця 4.1 – Значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(r)$ при $\lambda = 1$, $\mu = 1$,
 $p = 0,7$, $q = 0,2$

r	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(5)}(r)$	0,2878	0,2850	0,2765	0,2623	0,2425	0,2170
r	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$u^{(5)}(r)$	0,1859	0,1489	0,1061	0,0570	0,0000	

У додатку Б наведено значення величин α , β , кількості ітерацій N і норми $\|u^{(N)}\|$ наближеного розв'язку $u^{(N)}$ задачі (4.1), (4.2), що розглядається в одиничній кулі, при різних p , q , λ , та μ (таблиці Б.1 - Б.6). Лінії рівня норми розв'язку задачі (4.1), (4.2) в залежності від p та q за різних значень λ та μ зображено на рисунках Б.1 - Б.4.

Розглянемо задачу (4.3), (4.4) з параметрами $p = 0,7$, $q = 0,2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $h = 5$. Збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 5 ітерацій. За формулами (2.39), (2.40) знайдено, що

$$m_1 = 0,241283, M_1 = 0,285676, m_2 = 1,44244, M_2 = 1,44244.$$

З системи рівнянь (2.38) дістали

$$\alpha = 1,6192, \beta = 1,8097.$$

На рис. 4.4 наведено графіки верхніх $w^{(n)}(r)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(n)}(r)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 4.5 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(5)}(r)$, а на рис. 4.6 – поверхні рівня функції $u^{(5)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$. В таблиці 4.2 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(r)$ при $r = 0,1i$, $i = 0, 1, \dots, 10$.

Таблиця 4.2 – Значення наближеного розв'язку $u^{(5)}(r)$ при $\lambda = 1$, $\mu = 1$,
 $p = 0,7$, $q = 0,2$

r	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(5)}(r)$	0,3994	0,3965	0,3878	0,3735	0,3534	0,3276
r	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$u^{(5)}(r)$	0,2962	0,2592	0,2166	0,1683	0,1142	

У додатку Б наведено значення величин α , β , кількості ітерацій N і норми $\|u^{(N)}\|$ наближеного розв'язку $u^{(N)}$ задачі (4.3), (4.4), що розглядається в одиничній кулі, при різних p , q , λ , та μ (таблиці Б.7 - Б.12) та $h = 5$. Лінії рів-

ня норми розв'язку задачі (4.3), (4.4) в залежності від p та q за різних значень λ та μ зображено на рисунках Б.5 - Б.8.

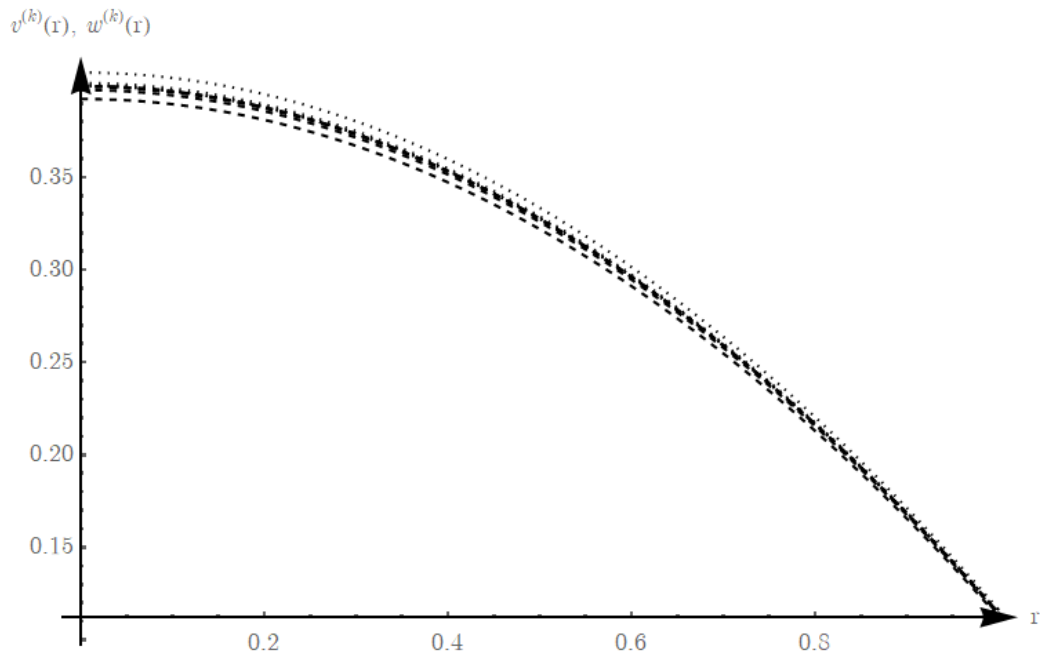


Рисунок 4.4 – Графіки $w^{(k)}(r)$ і $v^{(k)}(r)$, $k = \overline{0,5}$

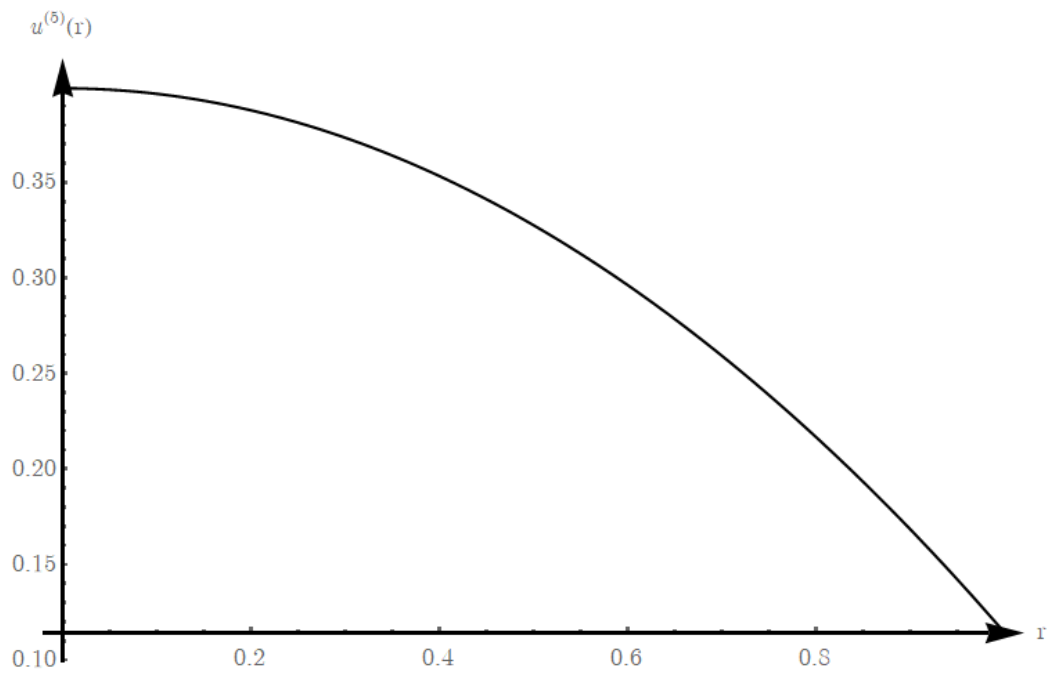


Рисунок 4.5 – Графік $u^{(5)}(r)$

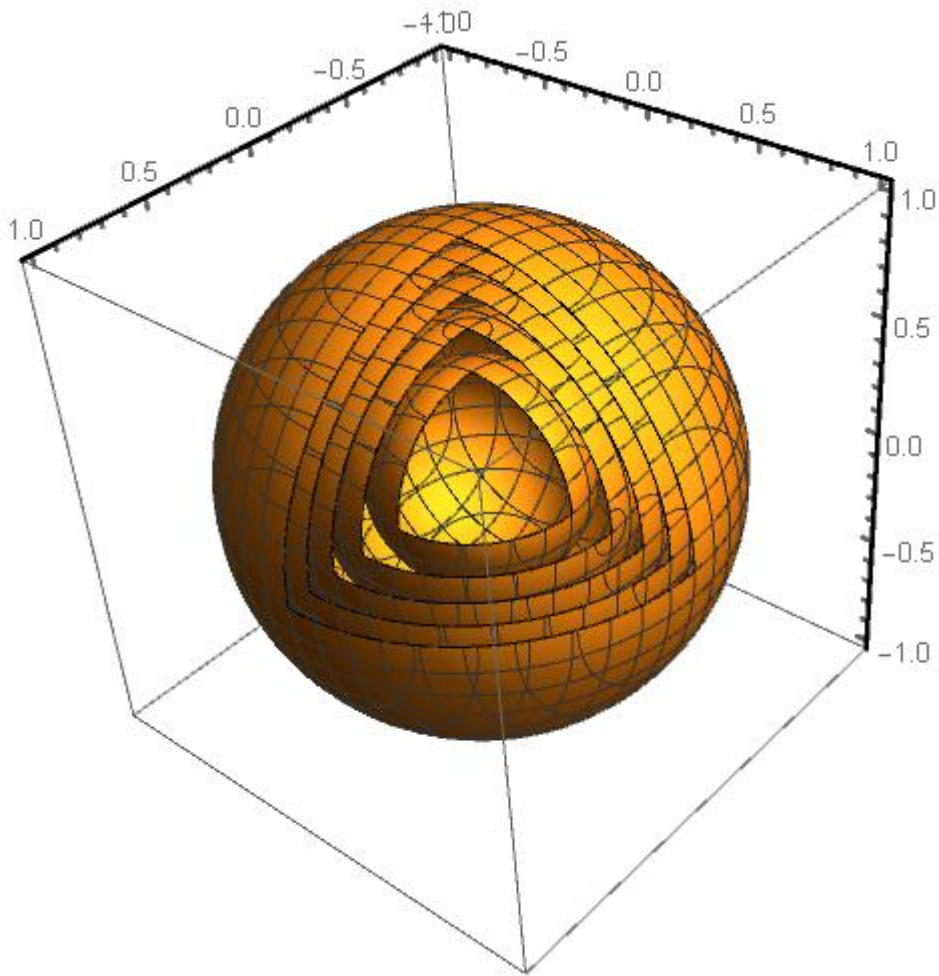


Рисунок 4.6 – Поверхні рівня функції $u^{(5)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$

Результати роботи було представлено на 23-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.) [12] та опубліковано у одній статті у науковому фаховому виданні України [13].

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Нелінійні задачі математичної фізики, зокрема, крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь часто виникають при розв'язанні методом математичного моделювання теоретичних та прикладних проблем у таких галузях, як у хімія, фізика плазми, теорія горіння тощо [8].

В атестаційній роботі було побудовано двобічні наближення до єдиного додатного радіально-симетричного розв'язку першої та третьої крайових задач для еліптичного рівняння з гетеротонною степеневою нелінійністю. Це рівняння має вигляд $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ та є математичною моделлю, наприклад, процесу нелінійної стаціонарної теплопровідності зі степеневою функцією потужності теплових джерел.

Розроблені алгоритми довели свою ефективність при розв'язанні тестових задач і можуть бути використані для дослідження крайових задач з різними комбінаціями типів крайових умов та нелінійностями інших типів. Крім того, результати роботи можна використати при побудові на основі методу прямих (метод Рунге) напівдискретних чисельних методів пошуку радіально-симетричного розв'язку квазілінійного рівняння теплопровідності.

Також отримані результати можна використати в освітньому процесі при вивченні студентами дисциплін «Рівняння математичної фізики», «Математичне моделювання», «Чисельні методи», «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь», а розроблений програмний продукт може знайти застосування в науково-дослідних установах та організаціях, які займаються дослідженням проблем хімічної кінетики, біології, теплопровідності, теорії горіння тощо.

ВИСНОВКИ

У атестаційній роботі було побудовано двобічні наближення до єдиного додатного радіально-симетричного розв'язку нелінійного еліптичного диференціального рівняння вигляду $-\Delta u = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ для першої та третьої крайових умов, а також проведено чисельний аналіз залежності отриманого розв'язку цих крайових задач від параметрів λ , μ , p та q , що входять у праву частину диференціального рівняння задач.

Методом функцій Гріна розглядувані першу та третю крайові задачі було зведено до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна. Це рівняння як рівняння з гетеротонним оператором було досліджено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах. Отримано умови існування єдиного додатного радіально-симетричного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. На основі отриманих результатів було розроблено алгоритм методу двобічних наближень, виконано його програмну реалізацію у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 11, за допомогою якої було отримано наближені розв'язки розглядуваних крайових задач та проаналізовано їх залежність від значень параметрів.

Розроблений програмний продукт можна використовувати для подальшого дослідження різних типів крайових задач та їх розв'язків, а також при розв'язанні прикладних задач, які виникають при дослідженні методом математичного моделювання нелінійних процесів різної природи. Також отримані результати можна розповсюдити на еліптичні рівняння з іншими операторами у їх лівій частині та нелінійностями у правій частині і використати при побудові на основі методу Роте напівдискретних методів чисельного аналізу нестационарних квазілінійних рівнянь.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики / под ред. Г.И. Марчука. Москва : Физматлит, 2002. 320 с.
2. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
3. Катренко А. В. Системний аналіз. Львів : “Новий світ – 2000”, 2011. 396 с.
4. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107 – 120.
5. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2013. № 1. С. 35 – 42.
6. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28 – 31.
7. Колосова С. В., Чалий А. В. Про двобічні наближення додатних розв’язків одного класу нелінійних крайових задач для еліптичних рівнянь // Доповіді НАН України. 1999. № 11. С. 28 – 30.
8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики : учеб. пос. для мех.-мат. фак. ун-тов. Москва : Высшая школа, 1970. 712 С.
9. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.
10. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс : учеб.

пос. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.

11. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.

12. Пархоменко В. Г. Метод двобічних наближень пошуку вісесиметричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями // 23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2019. С. 120–121.

13. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями // Радиоэлектроника и информатика. 2019. № 3 (86). С. 16-23.

14. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66.

15. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2018. № 3 (99). С. 78 – 91.

16. Самые последние функциональные возможности в системе Mathematica 12 URL : <https://www.wolfram.com/> (дата звернення 01.12.2020).