УДК 519.7

А.Н. ГВОЗДИНСКИЙ, А.А. КУЛИКОВА

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Рассматривается задача составления расписания в системах управления объектами транспортного типа, в частности, воздушного транспорта, с учетом различных факторов, характеризующих эту систему. Также рассматриваются проблемы составления математических моделей в таких задачах и применение симплекс-метода с искусственным базисом.

1. Введение

В настоящее время в системах массового обслуживания особое место занимают задачи транспортного типа, среди которых – системы управления городским транспортом, железнодорожным, водным и воздушным. В каждой из этих систем есть свои особенности и специфика, однако общим для них является проблема математического моделирования и методы решения задач указанных типов с использованием современных математических и вычислительных средств.

Авиаперевозки – динамично развивающаяся отрасль мирового транспорта. Изменяется не только авиационная техника, но и методы, способы, модели авиационного бизнеса.

Актуальность данной задачи состоит в оптимизации маршрутов и оптимальном выборе используемых на них типов транспортных средств из доступных в парке с учетом текущих грузо- и пассажиропотоков. Вследствие использования данной системы возможно уменьшение топливных, трудовых, прочих амортизационных затрат, требующихся на перевозку единицы груза, что не только сокращает расходы, но и дает возможность расширения деятельности перевозчиков без серьезных капиталовложений, а также благоприятно влияет на конкурентоспособность компании.

2. Цель исследования, описание объекта исследования, постановка задачи, составление математической модели

Целью данного исследования является анализ методов создания математических моделей и вычислительных алгоритмов для решения задачи составления расписания в системах управления объектами транспортного типа.

Описание объекта исследования. Различные типы самолетов гражданской авиации, например, такие как АН-74, ЯК-42, ТУ-154, А-300, Боинг-747 отличаются друг от друга такими показателями, как грузоподъемность, вместимость, себестоимость рейса, количество самолетов данного типа т.п. Каждый самолет, который выполняет соответствующий рейс на авиалинии, перевозит пассажиров и груз. Во время рейса он тратит некоторое количество ресурсов (топливо, смазочные материалы), которые составляют в стоимостном виде себестоимость рейса. Последняя зависит от типа самолета, который выполняет этот рейс. Поскольку тарифная плата не зависит от типа самолета, то прибыль авиакомпании зависит от назначения самолетов и авиалинии.

Задача исследования заключается в рассмотрении экстремальной задачи распределения самолетов между воздушными линиями при условии выполнения запланированных показателей перевозок при минимальной общей стоимости перевозок.

Составление математической модели. Для построения математической модели введем такие условные обозначения. Число самолетов j-го типа – n_j, количество типов самолетов – $j=\overline{1,n}$, количество авиалиний: $i=\overline{1,m}$, где i – номер авиалинии. Вместимость самолета j-го типа обозначим как R_j, а грузоподъемность – V_j , C_{ij} – себестоимость эксплуатации самолета j-го типа на i-й линии, а S_{ij} – максимальное количество рейсов, совершаемых самолетом j-го типа на i-й авиалинии. Введем также коэффициент исправности самолета j-го типа - k_j , a_i – план перевозок пассажиров по i-й авиалинии за единицу времени, d_i – план перевозок грузов. Искомая переменная X_{ij} – количество самолетов j-го типа, которые должны быть назначены на i-ю авиалинию.

Тогда модель распределения самолетов по авиалиниям будет иметь следующий вид. Функция цели (минимальная суммарная месячная стоимость эксплуатации самолетов):

$$F(\overline{X})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}S_{ij} \longrightarrow \min .$$

Определим ограничения, присутствующие в условии задачи. Ограничение по перевозке пассажиров: $\sum_{j=1}^{n} S_{ij}R_jX_{ij} \ge a_i$, $i=\overline{1,m}$.Ограничение по перевозке грузов: $\sum_{j=1}^{n} S_{ij}V_jX_{ij} \ge d_i$, $i=\overline{1,m}$.

Хотя самолет перевозит и пассажиров и груз одновременно, ограничения по выполнению перевозок для пассажиров и для груза можно рассматривать отдельно, так как вместительность и грузоподъемность самолета независимы друг от друга. Также в качестве ограничений выступают ограничения на количество самолетов каждого типа, которые имеются у авиакомпании, и ограничение неотрицательности искомых переменных. Учитывая тот факт, что некоторые самолеты могут иметь неисправности, эти ограничения имеют следующий вид.

Ограничение по количеству действующих самолетов: $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \le k_jn_j$, $j=\overline{1,n}$.

Условие неотрицательности и целочисленности: $X_{ij} \ge 0$, $X_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

3. Применение симплекс метода с искусственным базисом для решения поставленной задачи

Данная задача является задачей линейного программирования, для решения которой применяется симплекс-метод с искусственным базисом, который является наиболее известным и широко применяемым на практике методом решения общей задачи линейного программирования. Этот алгоритм достаточно эффективен, однако имеет экспоненциальную сложность, причина которой заключается в комбинаторном характере симплекс-метода, последовательно перебирающего вершины многогранника допустимых решений при поиске оптимального решения.

Общая идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) для решения задач линейного программирования заключается в следующих принципах.

1. Умение находить начальный опорный план.
2. Наличие признака оптимальности опорного плана.
3. Умение переходить к нехудшему опорному плану.

Пусть ЗЛП представлена системой ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ b_i \geq 0\ \ (i=1,...,m).$$

Ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательной правой части $(b_i \geq 0)$ левая часть ограничений содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения равенства – с коэффициентом, равным нулю.

Пусть система ограничений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ \ b_i \geq 0\ (i=1,...,m).$$

Сведем задачу к каноническому виду. Для этого прибавим к левым частям неравенств дополнительные переменные $x_{n+1} \geq 0\ \ (i=1,..,m)$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i, \qquad b_i \geq 0 \qquad (i=1,..,m),$$

которая имеет предпочтительный вид: $x_0 = (0;\underbrace{0;...;0;}_{n}\underbrace{b_1;b_2;...;b_m}_{m})$.

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+1} = 0\ \ \ (i=1,..,m)$.

Пусть далее система ограничений имеет вид: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ b_i \geq 0\ \ (i=1,..,m)$.

Сведём её к эквивалентной вычитанием дополнительных переменных $x_{n+1} \geq 0$ $(i=1,..,m)$ из левых частей неравенств системы. Получим систему:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i,\ \ b_i \geq 0\ \ \ (i=1,...,m).$$

Однако теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+1} входят в левую часть (при $b_i \geq 0$) с коэффициентами, равными –1, поэтому базисный план $x_0 = (\underbrace{0;...;0;}_{n}-b_1;-b_2;...;-b_m)$ не является допустимым. В этом случае вводится так называемый искусственный базис. К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные ω_i. В целевую функцию переменные ω_i вводят с коэффициентом M в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом М – для задачи на максимум, где М – большое положительное число. Полученная задача называется М-задачей, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Пусть исходная ЗЛП имеет вид: $F(\overline{X})=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \longrightarrow \min$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $b_i \ge 0$ $(i=1,..,m)$, $x_j \ge 0$ $(j=1,..,n)$,

причём ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной. М-задача запишется так:

$$\max(\min)\overline{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+)\sum_{i=1}^{m} M\omega_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+\omega_i=b_i, \qquad (i=1,..,m)$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,n}), \omega_i \ge 0, \ (i=1,..,m).$$

Задача имеет предпочтительный план. Её начальный опорный план имеет вид: $x_0=(0;\underbrace{0;...;0;}_{n}\underbrace{b_1;b_2;...;b_m}_{m})$.

Если некоторые из уравнений имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

Если в оптимальном плане М-задачи все искусственные переменные $\omega_i=0$ $(i=1,..,m)$, то план $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи:

$$\overline{x}=(x_1;x_2;...;x_n;\omega_1;\omega_2;...;\omega_m).$$

Для того чтобы решить задачу с ограничениями, не имеющими предпочтительного вида, вводят искусственный базис и решают расширенную М-задачу, которая имеет начальный опорный план $\overline{x_0}=(\underbrace{0;0;...;0;}_{n}b_1;b_2;...;b_m)$.

Решение исходной задачи симплексным методом путем введения искусственных переменных ω_i называется симплексным методом с искусственным базисом.

Если в результате применения симплексного метода к расширенной задаче получен оптимальный план, в котором все искусственные переменные $\omega_i^*=0$, то его первые n компоненты дают оптимальный план исходной задачи.

Теорема. *Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т.е. ее условия несовместны.*

Признаки оптимальности. Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки Δ_i $(j=\overline{1,n})$ неотрицательны, то такой план оптимален. Если исходная задача решается на минимум и для некоторого опорного плана все оценки Δ_i $(j=\overline{1,n})$ неположительные, то такой план оптимален.

Была разработана программа, куда были введены исходные данные: целевая функция и соответствующие ограничения. Исходная симплекс – таблица приведена ниже.

Исходя из вычисленных оценок $\Delta_j=C_b \times P_j - C_j$, в которых содержатся положительные, делается вывод, что данный опорный план не является оптимальным. Номер ведущего столбца вычисляется из соотношения $\operatorname{argmax}\{\Delta_j\}$, так как рассматривается задача на минимизацию. Номер ведущей строки выбирается как $\operatorname{argmax}\{\Theta_i\}, \Theta_i=\min\left\{\frac{P_0[i]}{P_k[i]}\right\}$.

Дальнейшее решение предполагает использование итераций симплекс-метода для нахождения оптимального плана перевозок (рис.1).

№	B	Ci/Cj	X0=P0	1	2	3	4	5
				350	480	282	440	260
1	P27	M	2,8499999046	480	352	492	800	600
2	P28	M	3,5	0	0	0	0	0
3	P29	M	3	0	0	0	0	0
4	P30	M	80	10	8	18	40	16
5	P31	M	75	0	0	0	0	0
6	P32	M	80	0	0	0	0	0
7	P22	0	7,0019998550	1	0	0	0	0
8	P23	0	14,010000228	0	1	0	0	0
9	P24	0	12	0	0	1	0	0
10	P25	0	5,0040001869	0	0	0	1	0
11	P26	0	7	0	0	0	0	1
12	Fj=		244,35000610	490M 0	360M 0	510M 0	840M 0	616M 0
13	dj=			490M -350	360M -480	510M -282	840M -440	616M -260

Рис. 1. Исходная симплекс-таблица

На седьмом шаге искусственные переменные выведены из базиса, нахождение оптимального плана продолжается согласно алгоритму симплекс-метода до получения оптимального плана. Основная задача исследования заключалась в рациональном распределении самолетов по воздушным авиалиниями, при котором обеспечивается минимум суммарных затрат, в результате проектирования разработанная программа представила следующий результат: $X^* = (0,0;0,2;0;0;\ 0;\ 0;\ 1.004,1.87;0,0,0,2,0..0)$.

Соответствующее ему значение целевой функции: $F(X^*) = 2238.40$.

В соответствии с задачей полученные данные округляются в сторону большего целого числа: $X^* = (0,0;0,2;0;0;\ 0;\ 0;\ 2,2;0,0,0,2,0..0)$, $F(X^*) = 2584$ дес. млн ден. ед.

В оптимальном плане было получено количество самолетов j-го типа, которые должны быть назначены на i-ю авиалинию (рис.2).

Согласно начальным данным, для минимизации общей стоимости перевозок 2 самолета типа А-300 должны быть назначены на первую авиалинию, 2 самолета типа А-300 – на вторую авиалинию, 2 самолета типа Боинг-747 – на вторую авиалинию, 2 самолета типа А-300 – на третью авиалинию (рис.2).

№	B	Ci/Cj	X0=P0	1	2	3	4	5
				350	480	282	440	260
1	P4	440	1,9999998807	0,2500000298	0,2000000029	0,4500000178	1	0,4000000059
2	P10	360	1,8699992895	0,3125000298	0,25	0,5625	0	0,5
3	P14	192	1,9999998807	0	0	0	0	0
4	P16	0	1597,1499023	-280	-192	-132	0	-280
5	P17	0	1159,9000244	-56,25000381	-44,99999618	-101,25	0	-89,99999237
6	P18	0	1597	0	0	0	0	0
7	P22	0	7,0019998550	1	0	0	0	0
8	P23	0	14,010000228	0	1	0	0	0
9	P24	0	12	0	0	1	0	0
10	P9	300	1,0040005445	-0,250000029	-0,200000002	-0,450000017	0	-0,400000005
11	P26	0	5,1300005912	-0,312500029	-0,25	-0,5625	0	0,5
12	Fj=		0M 2238,399	0M 147,5000	0M 118	0M 265,5	0M 440	0M 236
13	dj=			0M -202,499	0M -362	0M -16,5	0M 0	0M -24

Рис. 2. Конечный результат работы программы

4. Выводы

В работе исследованы и предложены методы разработки математических моделей и вычислительных алгоритмов для решения задач составления расписания в системах управления объектами транспортного типа, особое внимание уделено оптимизационным методам поиска наилучших решений. На конкретных примерах (воздушный транспорт) исследуемые методы опробированы и была доказана их эффективность, также рассмотрены вопросы использования методов для применения в различных системах управления объектами транспортного типа.

Научная новизна. Исследовано применение одного из самых универсальных методов решения задач линейного программирования – симплекс-метода с искусственным базисом – в системах управления воздушным транспортом для составления расписания полетов.

Практическое значение. Численное оптимальное решение позволяет детально проанализировать распределение финансовых затрат на перевозки авиакомпаниями, а также составить расписание полетов. При известных ценах на билеты и тарифах перевозки грузов возможно построение аналогичной математической модели, оптимизация которой позволит максимизировать прибыль авиакомпании. Возможность использования данной системы позволяет уменьшить топливные, трудовые, прочие амортизационных затраты, требующиеся на перевозку единицы груза, что не только сокращает расходы, но и дает возможность расширения деятельности перевозчиков без серьезных капиталовложений, а также благоприятно влияет на конкурентоспособность компании.

Список литературы: **1.** *Сакович В.А.* Исследование операций (детерминированные методы и модели). Мн.: Высш. шк., 1985. 256с. **2.** *Гвоздинський А.М., Якімова Н.А., Губін В.О.* Методи оптимізації в системах прийняття рішень: Навч. посібник. Харків: ХНУРЕ, 2006. 324с. **3.** *Таха, Хемди А*. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с. **4.** *Бондаренко М. Ф., Гвоздинський А. М.* Оптимізаційні задачі в системах прийняття рішень. Харків: ХТУРЕ, 1998. 216с. **5.** *Гвоздинський А.М.* Оптимізаційні задачі в організаційному управлінні. У 3-х ч. Харків, ХТУРЕ , 1997. **6.** *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. 3-е изд., переработанное и дополненное. К.: Высш. шк., 1988. 552 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2010

Гвоздинский Анатолий Николаевич, канд. техн. наук, профессор кафедры искусственного интеллекта ХНУРЭ. Научные интересы: оптимизация процедур принятия решений в сложных системах управления. Адрес: Украина, 61166, Харьков, ул. Акад. Ляпунова, 7, кв. 9, тел. 702-38-23.

Куликова Анна Александровна, студентка кафедры искусственного интеллекта ХНУРЭ. Научные интересы: интеллектуальный анализ данных, машинное обучение. Адрес: Украина, 61204, Харьков, ул. Ахсарова, 17, кв. 383.