

УДК 623.373.072.9

## РЕШЕНИЕ УКОРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СИНХРОНИЗИРОВАННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

В. В. РАПИН

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
Украина, Харьков, 61166, пр-т Науки, 14*

**Аннотация.** В статье рассмотрены автогенераторы, синхронизированные на основном тоне, и в режиме деления частоты. Предложены обобщенная модель синхронизированного автогенератора с использованием линейной полиномиальной аппроксимации нелинейной характеристики его усилительного элемента, и новый метод исследования, основанный на особенностях функционирования автогенератора в режиме синхронизации. Эти особенности заключаются в том, что амплитуду колебаний можно считать установившейся при любом мгновенном значении сдвига фазы, а также в уменьшении кривизны фазовой характеристики автогенератора с возрастанием амплитуды сигнала синхронизации в определенных пределах. При разработке нового метода использовались метод линейной аппроксимации укороченных уравнений синхронизированного автогенератора и метод малого параметра. Новый метод нечувствителен к виду нелинейных членов и позволяет получать аналитические решения укороченных уравнений, имеющих различные нелинейные члены, зависящие от режима работы. Он обладает малой погрешностью и существенно упрощает исследование синхронизированных автогенераторов и их систем. Экспериментальная проверка подтвердила его высокую эффективность.

**Ключевые слова:** синхронизированный автогенератор; особенности работы; нелинейный анализ; метод линейной аппроксимации; метод малого параметра

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Синхронизированные автогенераторы и их системы выполняют разнообразные функции и широко используются на практике. Классические одноконтурные  $LC$  автогенераторы рассматриваются многими исследователями как узлы сетей, представляющих модели объектов в виде графа при изучении биологических систем или нейронных сетей, а также при разработке устройств распознавания изображений и речи. В связи с этим проведены исследования разнообразных систем автогенераторов при различных условиях [1–4].

Связанные системы автогенераторов также используются для формирования диаграммы направленности микроволновых антенн в

цифровых системах связи [5, 6]. Связанные автогенераторы на диодах Ганна применяются в системах связи в качестве малошумящих когерентных радиоприемных устройств активных передающих антенн и т. д. [7–11].

Широкое применение в радиолокаторах, радиолокационных взрывателях, измерительной аппаратуре, охранных устройствах находят также автодины [12].

Синхронизированные автогенераторы в режиме деления частоты часто встречаются в синтезаторах частоты систем связи. Получивший распространение дифференциальный автогенератор имеет специфическую принципиальную схему, но фактически представляет собой два связанных идентичных одноконтурных  $LC$

DOI: [10.20535/S0021347019060037](https://doi.org/10.20535/S0021347019060037)

© В. В. Рапин, 2019

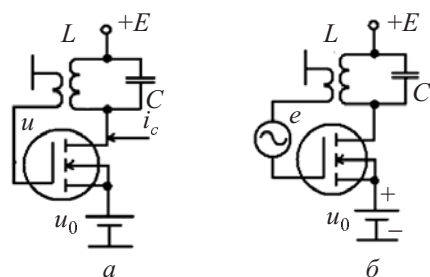


Рис. 1. Синхронизированные автогенераторы.

автогенератора [13]. Таким образом, нелинейный анализ синхронизированного дифференциального автогенератора сводится к анализу одноконтурного LC автогенератора [14].

Несмотря на различие принципиальных схем, вышеупомянутые автогенераторы описываются уравнением Ван дер Поля, и унаследовали все проблемы, свойственные процессу исследования одноконтурного LC автогенератора.

Метод усреднения, как известно, является предпочтительным при исследовании таких систем, но приводит к нелинейным дифференциальным укороченным уравнениям, которые не имеют достаточно точного аналитического метода решения, хотя попытки разработать такой метод, неоднократно предпринимались. Это привело к использованию численных методов и появлению иных, простых, нестрогих методов, рассчитанных на получение доступных для них характеристик, которые не всегда удовлетворяют требованиям практики, что обусловило переход в ряде случаев к слишком упрощенным математическим моделям [15] и к пропуску ряда важных аспектов работы автогенератора [13].

Задача создания аналитического метода решения укороченных уравнений не получила удовлетворительного разрешения из-за ее сложности, а также по причине того, что особенности функционирования автогенератора в режиме синхронизации не учитывались.

Таким образом, целью статьи является разработка аналитического метода решения укороченных уравнений на основе метода малого па-

раметра, и учет особенностей функционирования автогенератора в режиме синхронизации.

## 2. МОДЕЛЬ СИНХРОНИЗИРОВАННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

Рассмотрим наиболее широко используемые автогенераторы, синхронизированные на основном тоне, и в режиме деления частоты (рис. 1). Для автогенератора, синхронизированного на основном тоне (рис. 1а), сигналом синхронизации является ток  $i_c = I_c \cos(\omega_c t + \varphi_c)$ . Для делителя частоты (рис. 1б), сигнал синхронизации — это напряжение  $e = E \cos(\omega_c t + \varphi_c)$ . Модели автогенераторов получены при традиционных упрощающих предположениях: добротность контура автогенератора  $Q$  велика, смещение  $u_0$  фиксированное, транзистор является безынерционным элементом с большим входным сопротивлением. Его нелинейная характеристика аппроксимируется полиномом четвертой степени

$$i = a_0 + a_1 u_y + a_2 u_y^2 + a_3 u_y^3 + a_4 u_y^4,$$

где  $u_y$  управляющее напряжение.

### 2.1. Модель автогенератора, синхронизированного на основном тоне

В этом случае  $u_y = u + u_0$ , где  $u = A \cos(\omega_c t + \varphi)$  — напряжение на затворе транзистора. Используя законы Кирхгофа, дифференциальное уравнение автогенератора может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - 2\beta u - 3\gamma u^2 - 4\delta' u^3) \frac{du}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} u = \\ = R\delta K \frac{di_c}{d\tau}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tau = \omega_c t$ ,  $\varepsilon = \delta\alpha$  — малый параметр,  $\alpha = KR\alpha_0 - 1$ ,  $\alpha'_0 = -\alpha_0 + 1/(KR)$ ,  $\beta = \beta_0 / \alpha'_0$ ,  $\gamma = \gamma_0 / \alpha'_0$ ,  $\delta' = \delta_0 / \alpha'_0$ ,  $\alpha'_0 = -\alpha_0 + 1/(KR)$ ,  $\alpha_0 = a_1 + 2a_2 u_0 + 3a_3 u_0^2 + 4a_4 u_0^3$ ,  $\beta_0 = a_2 + 3a_3 u_0 + 6a_4 u_0^2$ ,  $\gamma_0 = a_3 + 4a_4 u_0$ ,

$\delta_0 = a_4$ ,  $\delta = 1/Q$ ,  $\omega_0$  — резонансная частота контура,  $R$  — резонансное сопротивление контура,  $K = M/L$  — коэффициент положительной обратной связи,  $L$  и  $M$  — индуктивность контура и взаимная индуктивность.

Пусть  $|d\varphi_c/dt| \ll 1$ ,  $\omega_c \approx \omega_0$  и  $I_c = \text{const}$ . Выражение  $u = A \cos(\omega_c t + \varphi)$  это решение уравнения (1), где  $A$  и  $\varphi$  медленно меняющиеся функции времени. Тогда моделью автогенератора являются укороченные уравнения, полученные из уравнения (1) методом усреднения:

$$\frac{dA}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{3}{4} \gamma A^3 - A \right) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{KRI_c}{\alpha} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{KRI_c}{\alpha A} \sin(\theta^0) = - \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}.$$

Далее эти уравнения будут использоваться в более удобной безразмерной форме:

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} (y^2 - 1)y = \frac{\varepsilon}{2} B_{1(y)} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)} \sin(\theta^0) = - \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}, \quad (2)$$

где  $y = A/A_0$  — безразмерная амплитуда,  $A$  и  $A_0 = \sqrt{4/(3\gamma)}$  — амплитуды сигналов автогенератора, работающего в режиме синхронизации, и автономном режиме соответственно,  $\theta^0 = \varphi - \varphi_c$ ,  $B = I_c/I_0$ ,  $B_{1(y)} = B/\alpha > 0$ ,  $B_{2(y)} = B/(\alpha y) > 0$ ,  $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega_c - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ ,  $I_0 = A_0/(KR)$ .

## 2.2. Модель делителя частоты

Теперь  $u_y = u + e + u_0$ , где  $u$  — сигнал автогенератора на затворе транзистора. Соотношение между частотой сигнала синхронизации и частотой сигнала автогенератора в стационарном режиме имеет вид

$$\omega_\Gamma = \omega_c / n,$$

где  $n$  — малые целые положительные числа.

По аналогии с предыдущим случаем, получаем дифференциальное уравнение автогенератора в режиме деления частоты:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{KR}{\alpha} \frac{\omega_0}{\omega_\Gamma} \frac{du}{d\tau} \left( \frac{u}{KR} - i \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega_\Gamma^2} u = 0, \quad (3)$$

где  $\tau = \omega_\Gamma t$ ,  $i$  — ток усилительного элемента.

Выражение  $u = A \cos(\omega_\Gamma t + \varphi)$  является решением уравнения (3), где  $A$  и  $\varphi$  — медленно меняющиеся функции времени.

Подставляя решение в (3) и используя метод усреднения, получаем укороченные уравнения, которые являются моделью автогенератора в режиме деления частоты:

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left[ y^3 - \left( 1 - \frac{2E^2}{A_0^2} \right) y \right] = \frac{\varepsilon}{2} B_{1(y)} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + n \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)} \sin(\theta^0) = -n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}, \quad (4)$$

где  $y = A/A_0$ ,  $2E^2 < A_0^2$ ,  $\theta^0 = n\varphi - \varphi_c$  — фазовый сдвиг,  $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega_c/n - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ .

При делении частоты на 2,  $n = 2$ , тогда получаем:

$$B_{1(y)} = -(B_1 + B_2 y^2) y,$$

$$B_{2(y)} = -(B_1 + B_2 y^2 / 2),$$

где

$$B_1 = E(3\delta_0 E^2 / 2 + \beta_0) / \alpha'_0,$$

$$B_2 = 2\delta_0 A_0^2 E / \alpha'_0, \quad \theta^0 = 2\varphi - \varphi_c,$$

$$\Delta\omega/\omega_0 = (\omega_c/2 - \omega_0)/\omega_0.$$

При делении частоты на 3,  $n = 3$ , и имеем:

$$B_{1(y)} = -B_1 y^2, \quad B_{2(y)} = -B_1 y,$$

где

$$B_1 = E / A_0, \quad \theta^0 = 3\varphi - \varphi_c,$$

$$\Delta\omega / \omega_0 = (\omega_c / 3 - \omega_0) / \omega_0.$$

Полученные укороченные уравнения (2) и (4) являются нелинейными дифференциальными уравнениями с нелинейными членами, зависящими от режима работы автогенератора.

Знаки коэффициентов  $B_{1(y)}$  и  $B_{2(y)}$  также зависят от режима работы автогенератора. Неравенства  $B_{1(y)} > 0$  и  $B_{2(y)} > 0$  означают, что колебания устойчивы в окрестности точки  $\Delta\omega / \omega_0 = 0$ ,  $\theta^0 = 0$  и укороченные уравнения можно решать непосредственно. В противном случае устойчивые колебания имеют фиксированный сдвиг фазы, и требуется замена переменной  $\theta^0 = \theta^1 + \pi$ .

Укороченные уравнения описывают амплитуду и фазу колебаний с точностью до величин порядка квадрата малого параметра.

Чтобы объединить процесс исследования автогенераторов, работающих в разных режимах, вводится обобщенная модель:

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} [y^3 - Uy] = \frac{\varepsilon}{2} B_{1(y)} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + n \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)} \sin(\theta^0) = -n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}, \quad (5)$$

где  $U = 1 - 2E^2 / A_0^2$ . Для автогенератора, синхронизированного на основном тоне, имеем  $U = 1$ ,  $n = 1$ .

### 3. ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ АВТОГЕНЕРАТОРА В РЕЖИМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ

#### 3.1. Первая особенность синхронизированного автогенератора

Ранее отмечено, что для автогенератора, синхронизированного на основном тоне, амплитуду колебаний можно считать установившейся при любом мгновенном значении сдви-

га фазы, т. е. в укороченных уравнениях производной  $dy / d\tau$  можно пренебречь [16]. Но это не доказано. Целью этого раздела является доказательство справедливости данного утверждения для автогенераторов, синхронизированных не только на основном тоне, но и работающих в режиме деления частоты. Для этого преобразуем систему (5).

Допустим  $B_{1(y)} > 0$ ,  $B_{2(y)} > 0$ , и  $\varphi_c = \text{const}$ . Введем новую переменную  $\Delta$ , являющуюся достаточно малой переменной составляющей безразмерной амплитуды колебаний  $y$ :

$$y = y_0(1 - \Delta),$$

где  $y_0$  — максимальное значение амплитуды, которое определяется из первого уравнения системы (5) при  $\theta^0 = 0$  и  $dy / d\tau = 0$ . Нелинейные члены системы (5) заменяются отрезками рядов Маклорена:

$$y^3 - Uy \approx (y_0^3 - Uy_0) - (3y_0^3 - Uy_0)\Delta,$$

$$\cos(\theta^0) \approx 1 - (\theta^0)^2 / 2, \quad \sin(k\theta^0) \approx \theta^0,$$

$$B_{1(\Delta)} \approx B_{10} + B_{11}\Delta, \quad B_{2(\Delta)} \approx B_{20} + B_{21}\Delta,$$

где  $B_{10}, B_{11}, B_{20}, B_{21}$  являются функциями  $y_0$ .

Затем, переходя к новой переменной  $\Delta$  и пренебрегая малыми членами, приходим к линеаризованным уравнениям:

$$\frac{d\Delta}{d\tau} + b\Delta = \frac{\varsigma}{2} (\theta^0)^2,$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \xi(\theta^0) = -n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right), \quad (6)$$

где  $\theta_{(0)}^0 = q$  и  $\Delta_{(0)} = p \ll 1$  начальные условия,

$$b = \frac{\varepsilon}{2} (3y_0^2 - U) > 0,$$

$$\varsigma = \frac{\varepsilon}{2} \frac{B_{10}}{y_0} > 0, \quad \xi = n \frac{\varepsilon}{2} B_{20} > 0.$$

Решение фазового уравнения системы (6) имеет вид:

$$\theta_{(\tau)}^0 = (c + q) \exp(-\xi\tau) - c,$$

где  $c = \frac{1}{\xi} n \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

Первое уравнение этой системы также легко решается:

$$\Delta_{(\tau)} = p \exp(-b\tau) + \frac{\xi}{2} \left[ (c + q)^2 \times \right. \\ \times \frac{\exp(-b\tau) - \exp(-2\xi\tau)}{2\xi - b} - 2c(c + q) \times \\ \left. \times \frac{\exp(-b\tau) - \exp(-\xi\tau)}{\xi - b} + \frac{c^2}{-b} (\exp(-b\tau) - 1) \right].$$

Членами  $\xi$  и  $2\xi$  в знаменателях дробей можно пренебречь, если  $b \gg 2\xi$ , т.е.  $2\xi / b \ll 1$ . Тогда,

$$\Delta_{a(\tau)} \approx \frac{\xi}{2b} [(c + q)^2 \exp(-2\xi\tau) - 2c(c + q) \times \\ \times \exp(-\xi\tau) + c^2 - q^2 \exp(-b\tau)] + p \exp(-b\tau).$$

После несложных преобразований это выражение принимает вид:

$$\Delta_{a(\tau)} \approx \frac{\xi}{2b} [(\theta_{(\tau)}^0)^2 - q^2 \exp(-b\tau)] + p \exp(-b\tau). \quad (7)$$

Очевидно, что после короткого начального промежутка времени членами, содержащими параметры  $p$  и  $q$ , можно пренебречь. В таком случае приходим к выражению

$$\Delta_{a(\tau)} \approx \frac{\xi}{2b} (\theta_{(\tau)}^0)^2. \quad (8)$$

Это соотношение может быть получено из первого уравнения системы (6), если  $d\Delta / d\tau = 0$ , т.е.  $dy / d\tau = 0$ . Из (8) следует, что амплитуда ко-

лебаний в динамике может быть представлена своим стационарным значением при любом мгновенном значении сдвига фазы, т.е. производной  $dy / d\tau$  можно пренебречь в укороченных уравнениях по истечении короткого начального промежутка времени, если  $b \gg 2\xi$ .

С физической точки зрения система уравнений (6) описывает устройство, состоящее из последовательно соединенных первого фильтра низких частот (ФНЧ) с верхней граничной частотой  $\Omega_\theta = \xi$ , устройства возведения в квадрат, и второго ФНЧ с верхней граничной частотой  $\Omega_\Delta = b$ . Входным сигналом, является сигнал на входе первого фильтра  $n\Delta\omega / \omega_0$ . Если максимальная частота выходного сигнала первого фильтра  $\Omega_1 = \xi$ , тогда из-за влияния устройства возведения в квадрат, которое является безинерционным и только увеличивает частоту входного сигнала в два раза, максимальная частота входного сигнала второго фильтра  $\Omega_2 = 2\xi$ .

Допустим  $\Omega_2 \ll \Omega_\Delta$ , т.е.  $b \gg 2\xi$ . Тогда второе неравенство можно записать в виде  $\Omega_\Delta \gg 2\Omega_\theta$ . Это означает, что первый ФНЧ имеет полосу пропускания гораздо более узкую, чем второй. Таким образом, для второго ФНЧ его верхняя граничная частота гораздо больше максимальной частоты его входного сигнала, и для этого сигнала он представляет безинерционный четырехполосник. Тогда его функционирование может быть описано не дифференциальным уравнением, а алгебраическим. По этой причине в дифференциальном уравнении, описывающем работу второго ФНЧ, оказалось возможным пренебречь производной  $d\Delta / d\tau$ .

Однако полученное соотношение  $b \gg 2\xi$  на практике оказалось слишком жестким, что подтверждается экспериментом. Таким образом, система уравнений (5) может быть представлена следующим образом:

$$y^3 - Uy = B_{1(y)} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + n \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)} \sin(\theta^0) = -n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}. \quad (9)$$

Эта система более проста чем исходная, но все еще остается достаточно сложной, чтобы ее возможно было решить.

### 3.2. Вторая особенность синхронизированного автогенератора

Допустим  $B_{1(y)} > 0$  и  $B_{2(y)} > 0$ . Тогда система (9) может быть представлена в форме:

$$y^3 - Uy = B_{1(y)} \cos(\theta^0),$$

$$\theta^0 = \arcsin[-(\Delta\omega/\omega_0)_n B_E / B_{(y)}], \quad (10)$$

где  $(\Delta\omega/\omega_0)_n = \left[ n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) + \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \frac{d\theta^0}{d\tau} \right] / B_E$  —

нормированная эквивалентная расстройка,  $-1 \leq (\Delta\omega/\omega_0)_n \leq 1$ ,  $B_E = B_{(y_E)}$  — значение параметра  $B_{(y)}$  на конце полосы синхронизации,  $B_{(y)} = n \frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)}$ .

Система (10) описывает фазовую характеристику синхронизированного автогенератора  $\theta^0 = F((\Delta\omega/\omega_0)_n)$ . Особенность этой характеристики состоит в уменьшении ее кривизны и приближении к функции, которая очень близка к линейной, с увеличением амплитуды сигнала синхронизации от малых до достаточно больших значений. Однако, если перейти некоторый предел, то фазовая характеристика изменит кривизну на противоположную.

Таким образом, аппроксимация фазовой характеристики линейной функцией наиболее целесообразна и позволяет совместить малую погрешность и простоту реализации.

### 4. МЕТОД ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Этот метод предложен для автогенератора, синхронизированного на основном тоне [16]. Цель данного раздела показать, что метод может быть использован и в случае режима де-

ления частоты. В большинстве случаев сдвиг фазы колебаний является информационным параметром синхронизированного автогенератора. В связи с этим дальнейшее рассмотрение направлено на определение этого параметра.

Фазовая характеристика аппроксимируется линейной функцией:

$$\theta_a^0 = - \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n \frac{B_E}{B_0} / (1 - \Delta_s), \quad (11)$$

где  $B_0 = B_{(y_0)}$ .

Параметр  $\Delta_s$  определяется из условия минимизации погрешности аппроксимации фазовой характеристики в рабочем диапазоне

$$-(\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)} \leq (\Delta\omega/\omega_0)_n \leq (\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)},$$

при  $|(\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)}| < 1$ . Погрешность в центре рабочего диапазона определяется выражением:

$$\begin{aligned} \delta\theta^{(1)} &= \frac{\theta_a^0 - \theta^0}{\theta^0} = \\ &= \lim_{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow 0} \left\{ \left[ - \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n \frac{B_E}{B_0} \frac{1}{1 - \Delta_s} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \arcsin \left( \left( - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n \frac{B_E}{B_{(y)}} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[ \arcsin \left( \left( - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n \frac{B_E}{B_{(y)}} \right) \right]^{-1} \right\} = 1 / (1 - \Delta_s) - 1 > 0. \end{aligned}$$

Погрешность на любом из концов рабочего диапазона:

$$\delta\theta^{(2)} = \frac{(\theta_a^0)^{(2)} - (\theta^0)^{(2)}}{(\theta^0)^{(2)}} =$$

$$\left\{ - \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n^{(2)} \frac{B_E}{B_0} \frac{1}{1 - \Delta_s} - \arcsin \left( \left( - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n^{(2)} \frac{B_E}{B_{(y)}} \right) \right\}$$

$$\times \left[ \arcsin \left( \left( -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n^{(2)} \frac{B_E}{B_{(y)}} \right) \right]^{-1} =$$

$$= \left[ -\left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n^{(2)} \frac{B_E}{B_0} \frac{1}{1-\Delta_s} \right] / (\theta^0)^{(2)} - 1 < 0,$$

где  $(\theta^0)^{(2)}$  и  $(\theta_a^0)^{(2)}$  — значения фазового сдвига на конце рабочего диапазона.

Из равенства  $\delta\theta^{(1)} = -\delta\theta^{(2)}$  получаем:

$$\Delta_s = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{B_E (\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)}}{B_0 (\theta^0)^{(2)}} \right]. \quad (12)$$

Пусть  $(\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)} \rightarrow 0$ . Принимая во внимание систему (10), имеем

$$\Delta_s = \lim \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\frac{B_E (\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)}}{B_0}}{\arcsin \left( -\left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_n^{(2)} \frac{B_E}{B_{(y)}} \right)} \right] \right\} = 0.$$

Для  $(\Delta\omega/\omega_0)_n^{(2)} = 1$  и  $(\theta^0)^{(2)} = -\pi/2$  получаем:

$$\Delta_s = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{B_E}{B_0} \frac{1}{(-\pi/2)} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_E}{B_0} \frac{2}{\pi} \right].$$

Для очень малых сигналов синхронизации  $B_E \approx B_0$  и крутизна фазовой характеристики максимальна. В этом случае  $\Delta_s \approx 0,181$ , что является максимальным значением параметра. Таким образом, значения параметра  $\Delta_s$  находятся в пределах  $0 < \Delta_s \leq 0,181$ .

Теперь все члены уравнения (11) известны. Подставляя выражение для  $(\Delta\omega/\omega_0)_n$  в (11), получаем:

$$\frac{d\theta_a^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} n(1-\Delta_s) B_{2(y_0)} \theta_a^0 = -n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}, \quad (13)$$

где  $\theta_{a(0)}^0 = \theta_{(0)}^0 = q$  — начальное условие.

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами аппроксимирует систему нелинейных дифференциальных уравнений (5) по сдвигу фазы. Оно легко решается но не учитывает нелинейные эффекты. Чтобы исправить этот недостаток необходимо иметь выражения для коррекции.

### 5. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Этот метод предполагает введение малого параметра в уравнения (9) и использование известного метода малого параметра. Допустим  $B_{1(y)} > 0$  и  $B_{2(y)} > 0$ . Вначале система (9) упрощается путем использования выше упомянутых переменных  $\Delta$  и сегментов ряда Маклорена для нелинейных функций:

$$y^3 - Uy \approx (y_0^3 - Uy_0) - (3y_0^3 - Uy_0)\Delta + 3y_0^3\Delta^2,$$

$$\cos(\theta^0) \approx 1 - (\theta^0)^2 / 2 + (\theta^0)^4 / 4!,$$

$$B_{1(\Delta)} \approx B_{10} + B_{11}\Delta, \quad \sin(\theta^0) \approx \theta^0 - (\theta^0)^3 / 3!,$$

$$B_{2(\Delta)} \approx B_{20} + B_{21}\Delta,$$

$$B_{10} = B_{1(y_0)}, \quad B_{20} = B_{2(y_0)}.$$

Выражение

$$\left( n \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \frac{d\theta^0}{d\tau} \right) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i - \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i \right]$$

вводится в фазовое уравнение системы (9), где  $\nu = \mu$ . Символ  $\mu$  будет использован как малый параметр, а  $\nu$  — как вспомогательный.

Пренебрегая малыми членами, имеем систему (9) в виде

$$\begin{aligned}
 (3y_0^3 - Uy_0)\Delta &= B_{10} \frac{(\theta^0)^2}{2} - B_{10} \frac{(\theta^0)^4}{4!} - \\
 &- B_{11}\Delta \left( 1 - \frac{(\theta^0)^2}{2} + \frac{(\theta^0)^4}{4!} \right) + 3y_0^3 \Delta^2, \\
 \frac{\varepsilon}{2} n B_{20}(\theta^0) &= \left[ n \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \frac{d\theta^0}{d\tau} \right] + \\
 &+ \frac{\varepsilon}{2} n \left[ B_{20} \frac{(\theta^0)^3}{3!} - B_{21}\Delta(\theta^0) \right] + \\
 &+ \left( n \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \frac{d\theta^0}{d\tau} \right) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i - \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i \right]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Далее малые нелинейные члены в (14) изолируются, умножаются на  $\mu$  и делятся на  $\nu$ . Окончательно получаем уравнения в более удобной форме:

$$\begin{aligned}
 (3y_0^3 - Uy_0)\Delta &= B_{10} \frac{(\theta^0)^2}{2} - \mu \left\{ \frac{B_{10} (\theta^0)^4}{\nu 4!} + \right. \\
 &+ \left. \frac{B_{11}}{\nu} \Delta \left( 1 - \frac{(\theta^0)^2}{2} + \frac{(\theta^0)^4}{4!} \right) - 3 \frac{y_0^3}{\nu} \Delta^2 \right\}, \\
 \frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} n B_{20}(1-\nu)\theta^0 &= -n \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \\
 + \mu(1-\nu) \left\{ \left[ n \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{d\varphi_c}{d\tau} + \frac{d\theta^0}{d\tau} \right] \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{i-1} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\varepsilon}{2} \frac{n}{\nu} \left[ B_{20} \frac{(\theta^0)^3}{3!} - B_{21}\Delta(\theta^0) \right] \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Решение этих уравнений ищем в виде рядов

$$\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \Delta_i,$$

$$\theta^0 = n\varphi - \varphi_c = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \theta_i, \quad (16)$$

где  $\theta_i = n\varphi_i - \varphi_{ci}$ ,  $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi_i$ ,  $\varphi_c = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi_{ci}$ ,

$$\theta_{0(0)} = \theta_{(0)}^0, \Delta_{0(0)} = \Delta_{(0)}.$$

Для  $i \geq 1$ ,  $\theta_{i(0)} = 0$ ,  $\Delta_{i(0)} = 0$ . Используем два члена ряда для  $\theta^0$  и один для  $\Delta$  (т.е.  $\Delta = \Delta_0$ ), если это не связано с исследованием сходимости.

В большинстве случаев  $\varphi_c$  представлено единым выражением, тогда  $\varphi_{c0(0)} = \varphi_{c(0)}$ ,  $\theta_{0(\tau)} = n\varphi_0 - \varphi_c$  и  $\varphi_{ci(0)} = 0$  для  $i \geq 1$ . Подставляя ряды в (15) и оставляя члены, не содержащие параметр  $\mu$ , получаем уравнения первого приближения:

$$\Delta_0 = \frac{B_{10}}{2y_0(3y_0^2 - U)} (\theta_0)^2,$$

$$\frac{d\theta_0}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} n(1-\nu)B_{20}\theta_0 = -n \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{d\varphi_c}{d\tau}, \quad (17)$$

где  $B_{20} = B_{2(y_0)}$ , а  $\theta_{0(0)} = q$  — начальное условие.

Выбирая члены, содержащие малый параметр в первой степени во втором уравнении системы (15), получаем уравнение для поправки к сдвигу фазы:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_1}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2} n(1-\nu)B_{20}\theta_1 &= -(1-\nu)n \frac{\varepsilon}{2} \times \\
 &\times \left\{ (1-\nu)B_{20}\theta_0 - \frac{B_{20}(\theta_0)^3 / 3! - B_{21}\Delta_0\theta_0}{\nu} \right\}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где  $\theta_{1(0)} = 0$  — начальное условие.

Этой коррекции достаточно для учета нелинейных эффектов. В таком случае  $\theta^0 \approx \theta_0 + \mu\theta_1$ . Амплитуда колебаний определяется с помощью выражения  $y = y_0(1 - \Delta_0)$ , погрешность которого достаточно мала.

Фазовое уравнение системы (17) идентично уравнению (13), т. е.  $\theta_{0(\tau)} = \theta_{a(\tau)}^0$ , и является линейной аппроксимацией укороченных уравнений (5) по фазовому сдвигу, а параметр  $\nu$  может быть определен из (12),  $\mu = \nu = \Delta_s$ . Таким образом, метод линейной аппроксимации позволяет получить результаты, которые являются первым приближением в комбинированном методе малого параметра.

### 6. НЕВЯЗКА

Сходимость ряда, представляющего решение укороченных уравнений для основного информационного параметра — сдвига фазы колебаний автогенератора, исследуем для автогенератора, синхронизированного на основном тоне. Оценка производится посредством вычисления невязки для системы (2) и исследования ее изменений в полосе синхронизации для решений с различным количеством поправок.

Рассмотрим стационарный режим. Исходные уравнения в этом случае принимают вид:

$$y^3 - y = B_{1(y)} \cos(\theta^0),$$

$$\frac{\varepsilon}{2} B_{2(y)} \sin(\theta^0) = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right).$$

Соотношение для оценки невязки находим из второго уравнения этой системы:

$$\delta_i = \sin(\theta^{(i)}) + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_n \frac{B_{2(y_E)}}{B_{2(y_{(\Delta^{(i)})})}}, \quad (19)$$

где  $\theta^{(i)}$  и  $y_{(\Delta^{(i)})} = y_0(1 - \Delta^{(i)})$  являются приближенными решениями, имеющими различное количество поправок.

Для оценки сходимости рассматриваются невязки, соответствующие решениям с различным количеством поправок. Приближенные решения получены посредством решения упрощенных укороченных уравнений, но невязки вычисляются для исходных укороченных

уравнений. Из системы (15) получаем упрощенные укороченные уравнения для стационарного режима, полагая производные равными нулю и  $n = U = 1$ :

$$(3y_0^3 - y_0)\Delta = B_{10} \frac{(\theta^0)^2}{2} - \mu \times$$

$$\left\{ \frac{B_{10}}{\nu} \frac{(\theta^0)^4}{4!} + \frac{B_{11}}{\nu} \Delta \left[ 1 - \frac{(\theta^0)^2}{2} + \frac{(\theta^0)^4}{4!} \right] - 3 \frac{y_0^3}{\nu} \Delta^2 \right\},$$

$$\frac{\varepsilon}{2} B_{20} (1 - \nu) \theta^0 = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) + \mu(1 - \nu) \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{i-1} + \frac{\varepsilon}{2\nu} \left[ B_{20} \frac{(\theta^0)^3}{3!} - B_{21} \Delta \theta^0 \right] \right\}.$$

Их решения ищем в виде:

$$\theta^0 = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3,$$

$$\Delta = \Delta_0 + \mu\Delta_1 + \mu^2\Delta_2 + \mu^3\Delta_3.$$

Используя комбинированный метод малого параметра, имеем:

$$\theta_0 = \frac{-2}{\varepsilon B_{20} (1 - \nu)} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right),$$

$$\Delta_0 = \frac{B_{10}}{3y_0^3 - y_0} \frac{(\theta_0)^2}{2},$$

$$\theta_1 = -(1 - \nu)\theta_0 + \frac{1}{B_{20}\nu} \left[ B_{20} \frac{(\theta_0)^3}{3!} - B_{21}\Delta_0\theta_0 \right],$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{3y_0^3 - y_0} \left\{ 3 \frac{y_0^3}{\nu} \Delta_0^2 + B_{10}\theta_0\theta_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{B_{10}}{\nu} \frac{(\theta_0)^4}{4!} - \frac{B_{11}}{\nu} \Delta_0 \left[ 1 - \frac{(\theta_0)^2}{2} + \frac{(\theta_0)^4}{4!} \right] \right\},$$

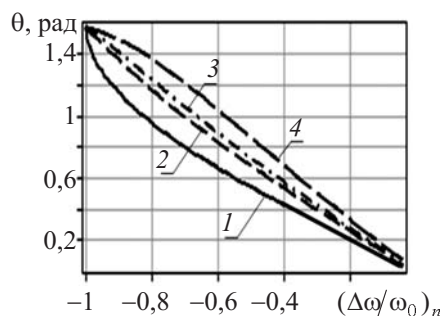


Рис. 2. Фазовая характеристика.

$$\theta_2 = -(1 - \nu)\theta_0 + \frac{1}{B_{20}\nu} \{B_{20}(\theta_0)^2\theta_1 / 2 - B_{21}(\Delta_0\theta_1 + \Delta_1\theta_0)\},$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{3y_0^3 - y_0} \left\{ 6 \frac{y_0^3}{\nu} \Delta_0 \Delta_1 + B_{10} \frac{2\theta_0\theta_2 + \theta_1^2}{2} - \frac{B_{11}}{\nu} \Delta_0 \left( \frac{\theta_0^3\theta_1}{6} - \theta_0\theta_1 \right) - \frac{B_{10}}{\nu} \frac{\theta_0^3\theta_1}{6} - \frac{B_{11}}{\nu} \Delta_1 \left[ 1 - \frac{(\theta_0)^2}{2} + \frac{(\theta_0)^4}{24} \right] \right\},$$

$$\theta_3 = -(1 - \Delta_s)\theta_0 + \frac{1}{B_{20}\nu} \{B_{20}[\theta_0^2\theta_2 + \theta_0\theta_1^2] / 2 - B_{21}(\Delta_0\theta_2 + \Delta_1\theta_1 + \Delta_2\theta_0)\},$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{3y_0^3 - y_0} \left\{ 3 \frac{y_0^3}{\nu} (2\Delta_0\Delta_2 + \Delta_1^2) + B_{10}(\theta_0\theta_3 + \theta_1\theta_2) - \frac{B_{10}}{\nu} \frac{\theta_0^2(2\theta_0\theta_2 + 3\theta_1^2)}{12} - \frac{B_{11}}{\nu} \Delta_2 \left( 1 - \frac{(\theta_0)^2}{2} + \frac{(\theta_0)^4}{4!} \right) - \frac{B_{11}}{\nu} \Delta_1 \left( \frac{\theta_0^3\theta_1}{2} - \theta_0\theta_1 \right) \right\}.$$

$$- \frac{B_{11}}{\nu} \Delta_0 \left[ \frac{\theta_0^2(2\theta_0\theta_2 + 3\theta_1^2)}{12} - \theta_0\theta_2 + \theta_1^2 \right] \}.$$

Тогда при  $\theta^{(0)} = \theta_0$ ,  $\Delta^{(0)} = \Delta_0$ ,  $\theta^{(1)} = \theta_0 + \mu\theta_1$ ,  $\Delta^{(1)} = \Delta_0 + \mu\Delta_1$ ,  $\theta^{(2)} = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2$ ,  $\Delta^{(2)} = \Delta_0 + \mu\Delta_1 + \mu^2\Delta_2$ , получаем:

$$\theta^{(3)} = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3,$$

$$\Delta^{(3)} = \Delta_0 + \mu\Delta_1 + \mu^2\Delta_2 + \mu^3\Delta_3. \quad (20)$$

Выражения для невязок сложны и анализируются численными методами в разделе 7.

### 7. ПРОВЕРКА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Погрешность предложенного комбинированного метода малого параметра оценивается посредством сравнения решений укороченных уравнений, полученных аналитическим и численным методами. Экспериментальный автогенератор имел следующие параметры:  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ ,  $Q = 47$ ,  $K = 0,1$ ,  $R = 7,5$  кОм,  $u_0 = -0,7$  В. Рабочий диапазон составлял 90% полосы синхронизации,  $\varphi_c = \text{const}$ . Нелинейная характеристика усилительного элемента автогенератора аппроксимировалась полиномом четвертой степени  $i = 1,485u_y^4 + 2,617u_y^3 + 0,331u_y^2 + 0,051u_y + 1,038$  мА в диапазоне  $-1,3 < u_y < -0,1$  В.

Половина фазовой характеристики автогенератора, синхронизированного на основном тоне, показана на рис 2. Кривые 1, 2, 3 соответствуют увеличивающимся значениям амплитуды сигнала синхронизации, для которых параметр  $y_0$  равнялся 1,032; 1,31; и 1,4. Для очень большого сигнала синхронизации фазовая характеристика изменила кривизну (кривая 4). Очевидно, что кривизна фазовой характеристики уменьшается с увеличением амплитуды сигнала синхронизации от малых до довольно значительных величин. Таким образом, аппроксимация фазовой характеристики линейной функцией является

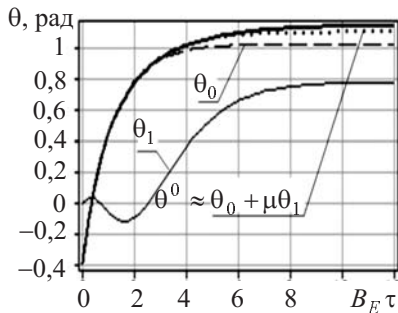


Рис. 3. Изменение фазового сдвига при малом сигнале синхронизации.

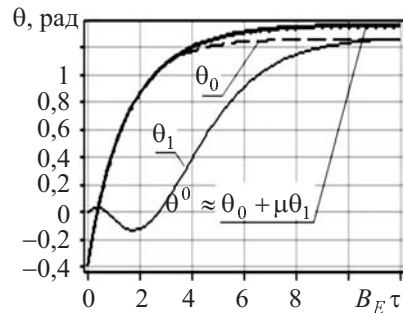


Рис. 4. Изменение фазового сдвига при большом сигнале синхронизации.

наиболее подходящей в этом диапазоне, и чем больше амплитуда сигнала синхронизации, тем меньше погрешность аппроксимации.

Полужирные линии на рис. 3, 4, 6 представляют численные решения системы (5). Кривые  $\theta_0$  представляют решение, полученное методом линейной аппроксимации, а кривой  $\theta_1$  показана поправка. При построении этих графиков параметр  $t_1 = B_E \tau$  использовался в качестве безразмерного времени.

### 7.1. Синхронизация на основном тоне

Для малого сигнала синхронизации значения исходных параметров выбраны следующими:  $I_c = 1$  мкА,  $y_0 = 1,032$ ,  $\theta_{(0)}^0 = -0,4$ . Изменение фазового сдвига при скачкообразном изменении частоты сигнала синхронизации представлено на рис. 3. В этом случае  $\nu = 0,0959$ ,  $2\xi / b = 0,0588$ . Максимальная погрешность метода линейной аппроксимации составила  $-10,5\%$ , поправка уменьшила ее до  $-4\%$ .

В случае большого сигнала синхронизации использовались следующие значения исходных параметров:  $I_c = 14$  мкА,  $y_0 = 1,31$ ,  $\theta_{(0)}^0 = -0,4$ , а изменение фазового сдвига также при скачкообразном изменении частоты сигнала синхронизации представлено на рис. 4. В этом случае  $\nu = 0,0663$ ,  $2\xi / b = 0,34$ , а максимальная погрешность метода линейной аппроксимации составила  $7\%$ , причем поправка уменьшила ее до  $1\%$ .

Очевидно, что увеличение амплитуды сигнала синхронизации привело к уменьшению

погрешности. Максимальная погрешность метода линейной аппроксимации уменьшилась на  $30\%$ , а за счет использования поправки общая погрешность уменьшилась в 4 раза. Следует отметить, что значение параметра  $2\xi / b = 0,34$ , что не является величиной гораздо меньшей единицы, но погрешность метода осталась малой. Это говорит о чрезмерно жестком ограничении, принятом ранее.

Погрешности для стационарного режима автогенератора, синхронизированного на основном тоне в полосе синхронизации в случае малой (сплошные линии), и большой (пунктирные линии) амплитуды сигнала синхронизации, изображены на рис. 5. Линии  $\delta\theta_0$  описывают изменение погрешности метода линейной аппроксимации, а линии  $\delta\theta^0$  показывают изменение погрешности комбинированного метода малого параметра. Нетрудно заметить, что использование только одной поправки позволяет получить малую погрешность, и чем больше амплитуда сигнала синхронизации, тем меньше погрешность.

### 7.2. Режим деления частоты

При исследовании делителя частоты на 2, значения исходных параметров выбраны следующими:  $E = 0,05$  В,  $u_0 = -0,7$ ,  $\varphi_c = \text{const}$ ,  $\Delta\omega / \omega_0 = -2,58 \times 10^{-4}$ ,  $\theta_{(0)}^0 = 0,2$ ,  $2\xi / b = 0,676$ ,  $\nu = 0,093$ . В этом случае  $B_{1(y)} < 0$ ,  $B_{2(y)} < 0$ , что говорит о необходимости перехода к новой переменной  $\theta^1$  в (5),  $\theta^0 = 2\varphi - \varphi_c = \theta^1 + \pi$ . Тогда

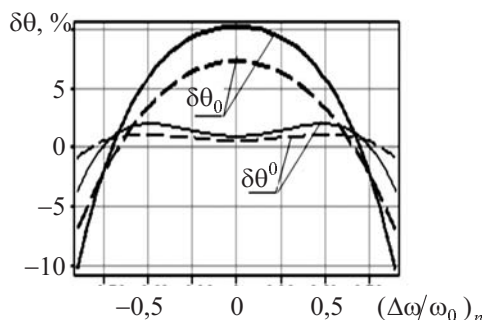


Рис. 5. Погрешность в стационарном режиме.

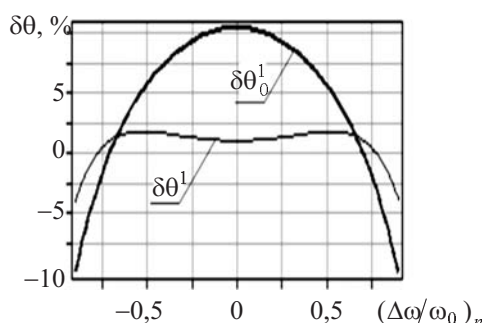


Рис. 7. Погрешность делителя в стационарном режиме.

$\varphi = (\theta^1 + \varphi_c + \pi) / 2$ . Изменение фазового сдвига представлено на рис. 6. Кривая  $\theta_0^1$  представляет решение, полученное методом линейной аппроксимации, а кривая  $\theta_1^1$  — коррекция. В этом эксперименте  $2\xi / b = 0,676$ , что не помешало получить малую погрешность величиной 10,5% и 4%, соответственно.

Изменение погрешности аналитического решения, полученное предлагаемым методом в полосе синхронизации для стационарного режима делителя частоты, показано на рис. 7. Полушириной линией представлена погрешность метода линейной аппроксимации, а линия  $\delta\theta^1$  описывает погрешность комбинированного метода малого параметра. Анализ полученных результатов показывает, что предложенный метод позволяет получить малую погрешность не только в случае синхронизации на основном тоне, но и при исследовании гармонических делителей частоты.

### 7.3. Сходимость

Исследование сходимости ряда, описывающего фазовый сдвиг колебаний автогене-

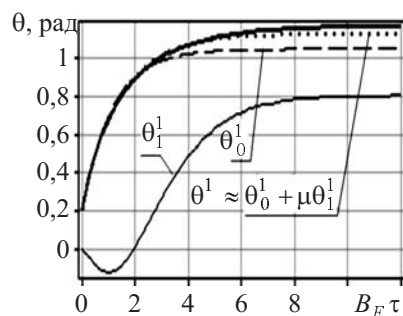


Рис. 6. Изменение фазового сдвига для делителя

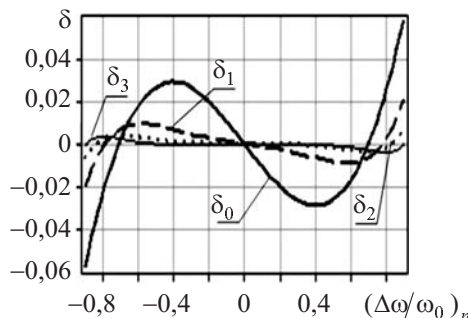


Рис. 8. Влияние поправок на изменения невязки.

ратора, проведена для стационарного режима и синхронизации на основном тоне с помощью выражений, полученных в разделе 6. В этом случае  $\varphi_c = \text{const}$ . Изменение невязки в полосе синхронизации для решений укороченных уравнений с различным количеством поправок показано на рис. 8. Индекс символов, которыми отмечены кривые, обозначает количество учтенных поправок.

Анализируя представленные зависимости легко видеть, что невязки малы, и чем больше поправок учитывается, тем меньше невязка. Таким образом, можно ожидать, что ряд, описывающий сдвиг фазы колебаний, будет сходящимся, а достаточная для практики погрешность обеспечивается учетом только одной поправки.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен новый аналитический метод решения укороченных уравнений синхронизированного одноконтурного LC автогенератора. Метод прост, легко применяется на практике и дает малую погрешность. Он по-

зволяет исследовать малые, но важные нелинейные эффекты в синхронизированных автогенераторах и их системах, например флуктуации фазы, с приемлемой достоверностью.

Предложенный метод и аппроксимация нелинейной характеристики усилительного элемента автогенератора полиномом четвертой степени позволили провести исследование автогенераторов с максимальной погрешностью порядка  $-4\%$ , которая образуется только на концах полосы синхронизации. В центральной части полосы синхронизации, составляющей  $80\%$  ее ширины, погрешность не превысила  $2\%$ , включая гармонический делитель частоты на 2.

Однако детальный анализ делителя на 3 более сложен, и для его анализа требуется полином более высокой степени. В этом случае метод линейной аппроксимации также может быть использован, поскольку он нечувствителен к виду нелинейных членов, а уравнение для поправки должно быть откорректировано соответствующим образом.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Barron, Miguel Angel. "Stability of a ring of coupled van der Pol oscillators with non-uniform distribution of the coupling parameter," *J. Appl. Res. Technol.*, Vol. 14, No. 1, p. 62-66, 2016. DOI: [10.1016/j.jart.2016.01.002](https://doi.org/10.1016/j.jart.2016.01.002).
2. Hu, K.; Chung, K.-w. "On the stability analysis of a pair of van der Pol oscillators with delayed self-connection, position and velocity couplings," *AIP Advances*, Vol. 3, No. 11, 112118, 2013. DOI: [10.1063/1.4834115](https://doi.org/10.1063/1.4834115).
3. Ignatov, M.; Hansen, M.; Ziegler, M.; Kohlstedt, H. "Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators," *AIP Appl. Phys. Lett.*, Vol. 108, No. 8, 084105, 2016. DOI: [10.1063/1.4942832](https://doi.org/10.1063/1.4942832).
4. Seetharam, V.; Pearson, Wilson L. "Analysis of strong coupling in coupled oscillator arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 58, No. 4, p. 1067-1075, 2010. DOI: [10.1109/TAP.2010.2041141](https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2041141).
5. Cordeau, David; Mellouli, Dorra; Paillot, Jean-Marie; Mnif, Hassene; Loulou, Mourad. "A fully monolithic 5.8 GHz low phase noise coupled VCO network for phase-array systems," *Analog Integrated Circuits Signal Processing*, Vol. 82, No. 1, p. 335-340, 2015. DOI: [10.1007/s10470-014-0437-3](https://doi.org/10.1007/s10470-014-0437-3).
6. Lo, Yu-Tsung; Kiang, Jean-Fu. "Comparison of injection-locked and coupled oscillator arrays for beamforming," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 63, No. 4, p. 1353-1360, 2015. DOI: [10.1109/TMTT.2015.2403847](https://doi.org/10.1109/TMTT.2015.2403847).
7. Sengupta, Kaushik; Hajimiri, Ali. "Mutual synchronization for power generation and beam-steering in CMOS with on-chip sense antennas near 200 GHz," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 63, No. 9, p. 2867-2876, 2015. DOI: [10.1109/TMTT.2015.2457902](https://doi.org/10.1109/TMTT.2015.2457902).
8. Dawn, S. K.; Chattopadhyay, Taraprasad. "An active, tracking microwave notch filter using a pair of Gunn oscillators," *Int. J. Microwave Engineering*, Vol. 1, No. 3, p. 11-17, 2016. DOI: [10.5121/jmicro.2016.1302](https://doi.org/10.5121/jmicro.2016.1302).
9. Dawn, Santosh Kumar; Chattopadhyay, Taraprasad. "Unilaterally injection-locked Gunn oscillator pair acting as a microwave active notch filter," *Int. J. Electronics Commun. Eng.*, Vol. 7, No. 2, p. 25-32, 2016. URI: [http://www.iaeme.com/MasterAdmin/UploadFolder/IJECET\\_07\\_02\\_004/IJECET\\_07\\_02\\_004.pdf](http://www.iaeme.com/MasterAdmin/UploadFolder/IJECET_07_02_004/IJECET_07_02_004.pdf).
10. Bhattacharyya, P.; Dawn, S. K.; Chattopadhyay, T. "A low-noise band pass filter using an X-band injection-locked Gunn oscillator," *IJRET*, Vol. 5, No. 1, p. 27-32, 2016. DOI: [10.15623/ijret.2016.0501005](https://doi.org/10.15623/ijret.2016.0501005).
11. Dawn, Santosh K.; Chattopadhyay, Taraprasad. "A tracking microwave wideband reject filter using antiphase locking," *Int. J. Electron. Lett.*, Vol. 6, No. 2, p. 146-158, 2018. DOI: [10.1080/21681724.2017.1329943](https://doi.org/10.1080/21681724.2017.1329943).
12. Носков, В. Я.; Васильев, А. С.; Ермак, Г. П.; Игнатков, К. А.; Чупахин, А. П. "Флуктуационные характеристики автодинных радиолокаторов с частотной модуляцией," *Известия вузов. Радиоэлектроника*, Т. 60, № 3, С. 154-165, 2017. DOI: [10.20535/S0021347017030049](https://doi.org/10.20535/S0021347017030049).
13. Mirzaei, A.; Heidari, Mohammad E.; Bagheri, Rahim; Chehrizi, Saeed; Abidi, Asad A. "The quadrature LC oscillator: A complete portrait based on injection locking," *IEEE J. Solid-State Circuits*, Vol. 42, No. 9, p. 1916-1932, 2007. DOI: [10.1109/JSSC.2007.903047](https://doi.org/10.1109/JSSC.2007.903047).
14. Buonomo, Antonio; Lo Schiavo, Alessandro. "Analytical approach to the study of injection-locked frequency dividers," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regular Papers*, Vol. 60, No. 1, p. 51-62, 2013. DOI: [10.1109/TCSI.2012.2215716](https://doi.org/10.1109/TCSI.2012.2215716).
15. Ponton, Mabel; Suárez, Almudena. "Wireless injection locking of oscillator circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 64, No. 12, p. 4646-4659, 2016. DOI: [10.1109/TMTT.2016.2623622](https://doi.org/10.1109/TMTT.2016.2623622).
16. Rapin, V. "Synchronized oscillators with the phase-negative feedback," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundamental Theory Appl.*, Vol. 49, No. 8, p. 1242-1245, 2002. DOI: [10.1109/TCSI.2002.800615](https://doi.org/10.1109/TCSI.2002.800615).

Поступила в редакцию 11.12.2018

После доработки 05.02.2019

Принята к публикации 13.05.2019

## INFORMATION ON THE ARTICLE

## SOLUTION OF REDUCED EQUATIONS OF INJECTION-LOCKED OSCILLATOR

**Volodymyr V. Rapin**, ORCID: 0000-0002-9773-7695, vrapin@ukr.net, Kharkiv National University of Radioelectronics, Ukraine

Oscillators with the primary tone synchronization and based on the frequency-divider mode have been considered in this study. The paper proposes a generalized model of injection-locked oscillator using the linear polynomial approximation of nonlinear characteristic of its amplifying element, and a new analysis technique based on peculiarities of the oscillator operation in injection-locked mode. These peculiarities imply that the oscillation amplitude can be considered as steady-state at an arbitrary instantaneous value of phase shift and that the curvature of phase characteristic of the oscillator decreases with the rise of synchronization signal amplitude within certain limits. The development of the new technique involved the use of the linear approximation method of reduced equations of injection-locked oscillator and the small parameter method. The new technique is insensitive to the form of nonlinear terms, and it allows us to obtain analytical solutions of reduced equations having different nonlinear terms that depend on the oscillator operation mode. This technique features small errors and essentially simplifies the investigation of injection-locked oscillators and their systems. The experimental test confirmed its high efficiency.

**Keywords:** injection-locked oscillator; operation peculiarities; nonlinear analysis; method of linear approximation; small parameter method

## REFERENCES

1. BARRON, Miguel Angel. "Stability of a ring of coupled van der Pol oscillators with non-uniform distribution of the coupling parameter," *J. Appl. Res. Technol.*, v.14, n.1, p.62, 2016. DOI: [10.1016/j.jart.2016.01.002](https://doi.org/10.1016/j.jart.2016.01.002).
2. HU, K.; CHUNG, K.-w. "On the stability analysis of a pair of van der Pol oscillators with delayed self-connection, position and velocity couplings," *AIP Advances*, v.3, n.11, 112118, 2013. DOI: [10.1063/1.4834115](https://doi.org/10.1063/1.4834115).
3. IGNATOV, M.; HANSEN, M.; ZIEGLER, M.; KOHLSTEDT, H. "Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators," *AIP Appl. Phys. Lett.*, v.108, n.8, 084105, 2016. DOI: [10.1063/1.4942832](https://doi.org/10.1063/1.4942832).
4. SEETHARAM, V.; PEARSON, Wilson L. "Analysis of strong coupling in coupled oscillator arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, v.58, n.4, p.1067, 2010. DOI: [10.1109/TAP.2010.2041141](https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2041141).
5. CORDEAU, David; MELLOULI, Dorra; PAILLOT, Jean-Marie; MNIF, Hassene; LOULOU, Mourad. "A fully monolithic 5.8 GHz low phase noise coupled VCO network for phase-array systems," *Analog Integrated Circuits Signal Processing*, v.82, n.1, p.335, 2015. DOI: [10.1007/s10470-014-0437-3](https://doi.org/10.1007/s10470-014-0437-3).
6. LO, Yu-Tsung; KIANG, Jean-Fu. "Comparison of injection-locked and coupled oscillator arrays for beamforming," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, v.63, n.4, p.1353, 2015. DOI: [10.1109/TMTT.2015.2403847](https://doi.org/10.1109/TMTT.2015.2403847).
7. SENGUPTA, Kaushik; HAJIMIRI, Ali. "Mutual synchronization for power generation and beam-steering in CMOS with on-chip sense antennas near 200 GHz," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, v.63, n.9, p.2867, 2015. DOI: [10.1109/TMTT.2015.2457902](https://doi.org/10.1109/TMTT.2015.2457902).
8. DAWN, S.K.; CHATTOPADHYAY, Taraprasad. "An active, tracking microwave notch filter using a pair of Gunn oscillators," *Int. J. Microwave Engineering*, v.1, n.3, p.11, 2016. DOI: [10.5121/jmicro.2016.1302](https://doi.org/10.5121/jmicro.2016.1302).
9. DAWN, Santosh Kumar; CHATTOPADHYAY, Taraprasad. "Unilaterally injection-locked Gunn oscillator pair acting as a microwave active notch filter," *Int. J. Electronics Commun. Eng.*, v.7, n.2, p.25, 2016. URI: [http://www.iaeme.com/MasterAdmin/UploadFolder/IJECET\\_07\\_02\\_004/IJECET\\_07\\_02\\_004.pdf](http://www.iaeme.com/MasterAdmin/UploadFolder/IJECET_07_02_004/IJECET_07_02_004.pdf).
10. BHATTACHARYYA, P.; DAWN, S.K.; CHATTOPADHYAY, T. "A low-noise band pass filter using an X-band injection-locked Gunn oscillator," *IJRET*, v.5, n.1, p.27, 2016. DOI: [10.15623/ijret.2016.0501005](https://doi.org/10.15623/ijret.2016.0501005).
11. DAWN, Santosh K.; CHATTOPADHYAY, Taraprasad. "A tracking microwave wideband reject filter using antiphase locking," *Int. J. Electron. Lett.*, v.6, n.2, p.146, 2018. DOI: [10.1080/21681724.2017.1329943](https://doi.org/10.1080/21681724.2017.1329943).
12. NOSKOV, Vladislav Ya.; VASILEV, Aleksandr S.; ERMAK, Gennadiy P.; IGNATKOV, Kirill A.; CHUPAKHIN, Andrey P. "Fluctuation characteristics of autodyne radars with frequency modulation," *Radioelectron. Commun. Syst.*, v.60, n.3, p.123, 2017. DOI: [10.3103/S0735272717030049](https://doi.org/10.3103/S0735272717030049).
13. MIRZAEI, A.; HEIDARI, Mohammad E.; BAGHERI, Rahim; CHEHRAZI, Saeed; ABIDI, Asad A. "The quadrature LC oscillator: A complete portrait based on injection locking," *IEEE J. Solid-State Circuits*, v.42, n.9, p.1916, 2007. DOI: [10.1109/JSSC.2007.903047](https://doi.org/10.1109/JSSC.2007.903047).
14. BUONOMO, Antonio; LO SCHIAVO, Alessandro. "Analytical approach to the study of injection-locked frequency dividers," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regular Papers*, v.60, n.1, p.51, 2013. DOI: [10.1109/TCSI.2012.2215716](https://doi.org/10.1109/TCSI.2012.2215716).
15. PONTON, Mabel; SUAREZ, Almudena. "Wireless injection locking of oscillator circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, v.64, n.12, p.4646, 2016. DOI: [10.1109/TMTT.2016.2623622](https://doi.org/10.1109/TMTT.2016.2623622).
16. RAPIN, V. "Synchronized oscillators with the phase-negative feedback," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundamental Theory Appl.*, v.49, n.8, p.1242, 2002. DOI: [10.1109/TCSI.2002.800615](https://doi.org/10.1109/TCSI.2002.800615).

Received December 11, 2018

Revised February 5, 2019

Accepted May 13, 20