

ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ КРУГЛОЙ СФОКУСИРОВАННОЙ АПЕРТУРЫ

Исследование структуры поля излучающих систем, сфокусированных в зону Френеля, имеет важное значение для решения многих актуальных проблем радиоэлектроники, например таких, как проблемы ЭМС радиоэлектронных средств, защиты биологических объектов от электромагнитного излучения, радиолокации ближнего действия. Кроме того, в связи с интенсивным развитием космических технологий в последнее время резко возрос интерес к созданию эффективных систем передачи энергии СВЧ-лучом, систем связи с объектами, расположенными в заданной точке пространства, а также к фокусировке СВЧ-луча с целью получить в ограниченном объеме пространства высокую плотность электромагнитной энергии. Значимость изучения этих проблем возрастает вследствие тенденции к увеличению излучаемых мощностей и электрических размеров излучающих систем.

Нами проведено исследование осевого распределения интенсивности поля в зоне Френеля равномерно возбужденной круглой сфокусированной апертуры. Получены аналитические выражения, позволяющие рассчитывать параметры, которые характеризуют распределение поля вдоль оси при любых расстояниях фокусировки в пределах френелевской и дальней зон.

Антенна с круглой апертурой, имеющей радиус R и площадь S , сфокусирована в точку с координатами $\rho = 0$; $z = L_\Phi$. Центр апертуры лежит в начале цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) . Напряженность электрического поля на оси антенны определяется формулой Френеля — Кирхгофа [1]

$$E(z) = i \frac{k}{2\pi} E_0 \frac{\exp(-ikz)}{z} \int_S f(\rho, \varphi) \exp \left[ik \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{L_\Phi} - \frac{1}{z} \right) \right] ds. \quad (1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны в свободном пространстве; E_0 — амплитуда напряженности электрического поля на апертуре; $f(\rho, \varphi)$ — функция, описывающая амплитудное распределение возбуждающего поля; L_Φ — фокусное расстояние.

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{\pi}{16\chi_0} \left(1 - \frac{\chi_0}{\chi} \right); \quad y = \left(\frac{\rho}{R} \right)^2. \quad (2)$$

Здесь $\chi_0 = L_\phi / L_{д.з}$; $\chi = z / L_{д.з}$, где $L_{д.з} = 8R^2 / \lambda$ — расстояние до дальней зоны.

Тогда (1) примет вид

$$E(\chi_0, \xi) = iE_0 \frac{\pi}{8\chi_0} \left(1 - \frac{16\chi_0}{\pi} \xi \right) e^{-ik\chi L_{д.з}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(y, \varphi) e^{i2\xi y} dy d\varphi. \quad (3)$$

Рассмотрим апертуру с равномерным амплитудным распределением $f(\rho, \varphi) = 1$. Для квадрата модуля напряженности (в дальнейшем просто интенсивности) поля, выполнив интегрирование в (3), получим выражение

$$|E(\chi_0, \xi)|^2 = E_0^2 \frac{\pi^2}{64} \frac{1}{\chi_0^2} \left[\left(1 - \frac{16\chi_0}{\pi} \xi \right) \frac{\sin \xi}{\xi} \right]^2. \quad (4)$$

Соотношение (4) определяет распределение интенсивности поля в зоне Френеля вдоль оси круглой равномерно возбужденной сфокусированной апертуры. Зависимость нормированной интенсивности поля сфокусированной апертуры от продольной координаты для различных фокусных расстояний показана на рис. 1, где кривая 1 соответствует синфазной апертуре, 2 — $\chi_0 = 0,25$, 3 — $\chi_0 = 0,125$. Нормировка проведена на значение интенсивности на границе дальней зоны синфазной апертуры.

Отметим, что $|E(\chi_0, \chi)|^2$ симметрично относительно χ_0 и χ (координат фокуса и точки наблюдения на оси). Поэтому зависимости интенсивности от продольной координаты χ при заданном χ_0 и интенсивности в данной точке χ от фокусного расстояния χ_0 имеют одинаковый вид. Например, кривая 3 описывает не только распределение $|E|^2$ вдоль оси круглой апертуры, сфокусированной на расстоянии $\chi_0 = 0,125$, но и зависимость $|E(\chi_0, \chi)|^2$ в точке с координатой $\chi = 0,125$ от фокусного расстояния.

Согласно кривым, представленным на рис. 1, осевое распределение имеет многолепестковый характер. Для сфокусированной апертуры, в отличие от несфокусированной, величина лепестков монотонно убывает по мере приближения к апертуре. Максимальную величину имеет самый

дальний от апертуры (или первый от границы дальней зоны) лепесток, который назовем главным, а остальные — побочными лепестками.

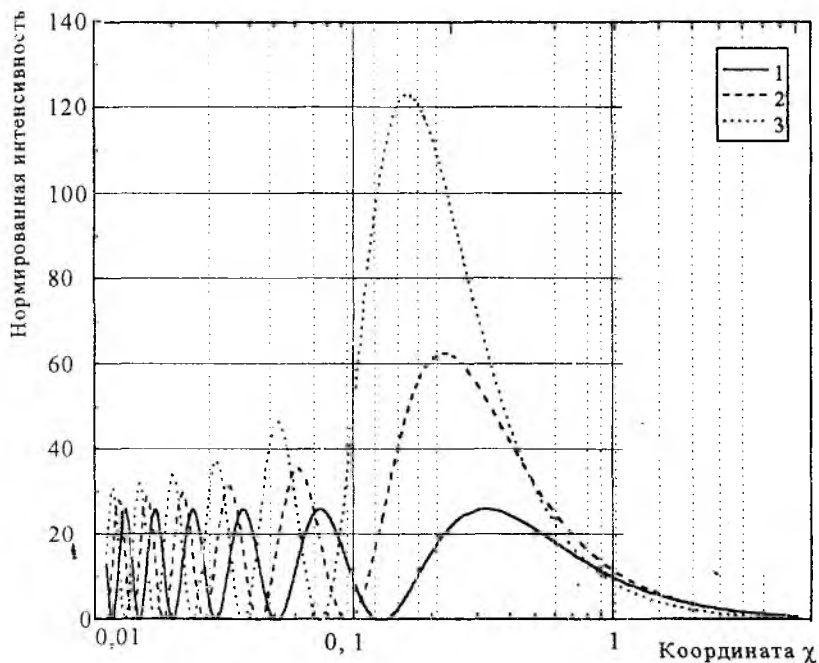


Рис. 1

Положение максимума главного лепестка определим из условия равенства нулю первой производной от $|E(\chi_0, \xi)|^2$ по ξ :

$$\left(1 - \frac{16\chi_0}{\pi} \xi\right) \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 \left[-\frac{16\chi_0}{\pi} + \left(1 - \frac{16\chi_0}{\pi} \xi\right) \left(\frac{\cos \xi}{\sin \xi} - \frac{1}{\xi}\right)\right] = 0. \quad (5)$$

Исключив из рассмотрения точки $\xi = -\pi n, n = \overline{1, \infty}$, в которых интенсивность обращается в нуль, после ряда преобразований получим окончательное уравнение для нахождения координаты максимума

$$\frac{\cos \xi}{\sin \xi} = \frac{1}{\xi \left(1 - \frac{16\chi_0}{\pi} \xi\right)}. \quad (6)$$

Исследование функций, стоящих в правой и левой частях уравнения (6), показывает, что искомый корень, который обозначим через ξ_m , лежит в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и он единственный.

Уравнение (6) является трансцендентным и в общем случае допускает только численное решение. На рис. 2 представлена зависимость координат границ и максимума главного лепестка, выраженных в единицах ξ , от фокусного расстояния. Кривая 1 соответствует координате максимума, 2, 3 — координатам дальней и ближней границ главного лепестка на уровне 0,5 максимального значения. На этом и последующих рисунках начальное значение равно 0,001. Однако для ряда случаев возможно получение приближенного решения в аналитическом виде. Условно разобьем всю область значений χ_0 на два интервала: $X_\Gamma (\chi_0 < 0,125)$ и $X_M (\chi_0 > 0,125)$; назовем их областями глубокой и мелкой фокусировок. Из рис. 2 видно, что для глубокой и мелкой фокусировок ξ_m мало отличается от 0 и $-(\pi/2)$ соответственно. Следовательно, при определении корня уравнения (6) в случаях мелкой и глубокой фокусировок можно ввести малый параметр, воспользоваться разложением левой и правой частей (6) в ряд по этому параметру и получить алгебраические уравнения, допускающие аналитическое решение.

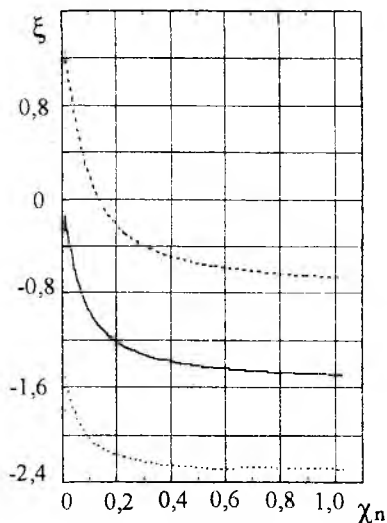


Рис. 2

Для мелкой фокусировки, положив $\xi = 0,5\pi - x$, где $x \ll 1$, в качестве такого параметра можно взять x , а для глубокой — модуль переменной ξ .

Опуская промежуточные вычисления и учитывая (2), записываем окончательные выражения для координат главного максимума интенсивности

$$\chi_m = \frac{2\chi_0}{1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 256}{\pi^2} \chi_0^2}}, \quad \chi_0 \in X_\Gamma; \quad (7)$$

$$\chi_m = \frac{1}{8 \left[1 + \frac{1}{8\chi_0} - \frac{4(1+8\chi_0)}{\pi^2(1+8\chi_0)^2 - 4(1+16\chi_0)} \right]}, \quad \chi_0 \in X_M. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) позволяют ограничить погрешность уровнем 2,3 % при $\chi_0 \leq 0,12$ и $\chi_0 \geq 0,12$ соответственно. Таким образом, они позволяют определить положение максимума главного лепестка при любых фокусных расстояниях с приемлемой для практики точностью.

Разложив правые части (7) и (8) в ряд Тейлора и ограничившись тремя членами разложения, получим

$$\chi_m = \chi_0 - 77,81467 \chi_0^3 + 12110,248 \chi_0^5, \quad \chi_0 \in X_\Gamma; \quad (9)$$

$$\chi_m = 0,125 \left(1 - 0,074336 \chi_0^{-1} + 0,00432686 \chi_0^{-2} \right), \quad \chi_0 \in X_M. \quad (10)$$

Погрешность результатов вычислений по формулам (9) и (10) не превышает 1 % для интервалов $\chi_0 \leq 0,04$ и $\chi_0 \geq 0,5$ соответственно.

Согласно (7) и (9) при $\chi_0 \rightarrow 0$ (приближении фокуса к апертуре) смещение точки максимума относительно фокальной плоскости убывает пропорционально χ_0^3 . При $\chi_0 \rightarrow \infty$ координата максимума монотонно стремится снизу к 0,125, т. е. $z_m \rightarrow R^2/\lambda$. Следовательно, для равномерно возбужденной круглой апертуры главный максимум интенсивности на оси не может располагаться дальше чем на расстоянии R^2/λ от ее центра.

Значение максимума главного лепестка может быть определено по (4) и (7), (8). При этом погрешность не превышает 0,2 % для $\chi_0 < 0,125$ и 0,5% для $\chi_0 > 0,125$. Соответствующие выражения имеют вид

$$|E_m|^2 = \frac{\pi^2 E_0^2}{64 \chi_0^2} \left(1 + 77,814669 \chi_0^2 - 3633,073704 \chi_0^4 \right), \quad \chi_0 \in X_\Gamma; \quad (11)$$

$$|E_m|^2 = \frac{\pi^2 E_0^2}{64} \left(25,9382 + 6,484576 \chi_0^{-1} + 0,569544 \chi_0^{-2} \right), \quad \chi_0 \in X_M. \quad (12)$$

Значения $|E_m|^2$, вычисленные по приведенным формулам, отличаются от точных не более чем на 1 % при $\chi_0 < 0,057$ и $\chi_0 > 0,32$.

Из (11) и (12) следует, что для синфазной апертуры нормированный максимум интенсивности $|E_m|^2 / |E_0|^2 = 4$ (аналогичный результат приведен в [2]). По мере приближения фокуса к апертуре этот максимум монотонно растет (рис. 3).

Для координат побочных максимумов, подобно тому как это было сделано в случае использования главного лепестка, получена следующая приближенная формула:

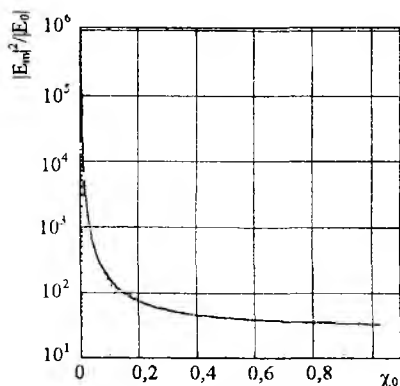


Рис. 3

$$\chi_{m_n} = \frac{\chi_0}{1 + 8(2n+1)\chi_0} \quad (13)$$

Она имеет погрешность не более 1,2 % во всей области значений χ_0 , соответствующих зоне Френеля, для $n=1$ и не более 0,4 % для $n \geq 2$. Здесь n — номер лепестка.

Тогда побочные максимумы ($n \geq 1$) определяются с помощью соотношения

$$|E_{m_n}|^2 = E_0^2 \frac{\pi^2}{64} \left[\frac{1}{\chi_0} \left(1 - \frac{16\chi_0}{\pi} \xi_{m_n} \right) \frac{\sin \xi_{m_n}}{\xi_{m_n}} \right]^2, \quad (14)$$

где

$$\xi_{m_n} = -\frac{\pi(2n+1)}{2} \left\{ 1 - \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2 [1 + 8(2n+1)\chi_0]} \right\}, \quad (15)$$

с погрешностью не более 0,1 % при любых значениях фокусного расстояния.

Выражения для определения относительного уровня первого побочного максимума имеют следующий вид:

$$\frac{|E_{m1}|^2}{|E_m|^2} = (0,047182 + 2,159954\chi_0 + 22,26366\chi_0^2 - 167,00481\chi_0^3), \chi_0 \in X_\Gamma; \quad (16)$$

$$\frac{|E_{m1}|^2}{|E_m|^2} = (1 - 0,166667\chi_0^{-1} + 0,021522\chi_0^{-2} + 0,002439\chi_0^{-3}), \chi_0 \in X_M. \quad (17)$$

Погрешность формул (16), (17) не превышает 1 % для $\chi_0 \leq 0,035$ и $\chi_0 \geq 0,8$ соответственно.

Из (16) и (17) и рис. 4 видно, что первый побочный максимум достаточно велик практически при всех значениях фокусного расстояния. Минимальное значение, к которому он стремится при $\chi_0 \rightarrow 0$, равно 0,047182 (-13,26 дБ).

Для оценки уменьшения интенсивности в фокусе по сравнению с ее значением в главном максимуме введем коэффициент уменьшения интенсивности

$$k_d = \left| E_m^2 \right| / \left| E_\phi \right|^2. \quad (18)$$

Формулы для его расчета

$$k_d = 1,0 + 77,814669\chi_0^2 - 3633,073704\chi_0^4, \quad \chi_0 \in X_\Gamma; \quad (19)$$

$$k_d = \chi_0^2 (25,93823 + 6,484576\chi_0^{-1} + 0,569544\chi_0^{-2} + 0,016642\chi_0^{-3}), \quad \chi_0 \in X_M \quad (20)$$

имеют погрешность не более 1% для $\chi_0 \leq 0,057$ и $\chi_0 \geq 0,125$.

Из рис. 5 видно, что если интенсивность в фокальной плоскости при глубокой фокусировке уменьшается относительно максимального значения незначительно ($k_d = 1,6$ при $\chi_0 = 0,1$), то в случае мелкой фокусировки это уменьшение существенно больше. При $\chi_0 = 1$ оно достигает примерно 34.

Рассмотрим теперь вопрос о продольных размерах главного лепестка. Его удобно оценивать шириной лепестка по уровню 0,5 от максимального значения. Определение точных ближней и дальней границ на уровне 0,5 можно провести путем численного решения уравнения

$$\left| E(\xi) \right|^2 = 0,5 \left| E_m \right|^2. \quad (21)$$

Для получения формул, справедливых отдельно для мелкой и глубокой фокусировок, воспользуемся следующим приемом. Из рис. 2 (кривые 2,3)

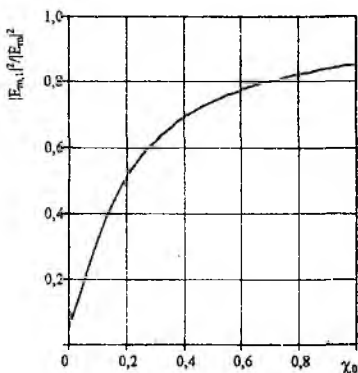


Рис. 4

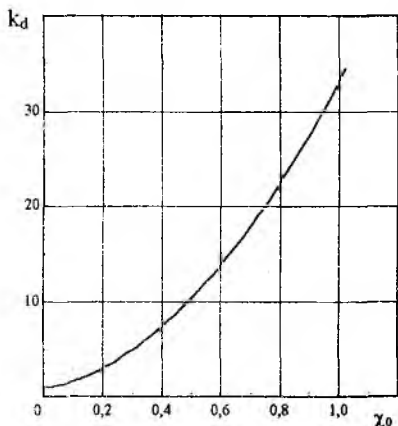


Рис. 5

видно, что координаты ближней и дальней границ, выраженные в единицах ξ , незначительно отличаются от величин $\xi^{(1,2)} = \xi_m \pm 1$. Тогда для значения интенсивности на уровне 0,5 с погрешностью до членов первого порядка малости можно записать

$$|E(\xi_{1,2})|^2 = |E(\xi^{(1,2)})|^2 + \Delta\xi_{1,2} \frac{d}{d\xi} [|E(\xi)|^2]_{\xi^{(1,2)}} = 0,5 |E_m|^2. \quad (22)$$

Отсюда

$$\Delta\xi_{1,2} = \frac{0,5 |E_m|^2 - |E(\xi^{(1,2)})|^2}{[|E(\xi)|^2]'_{\xi^{(1,2)}}}, \quad (23)$$

и соответствующие координаты границ лепестка

$$\xi_{1,2} = \xi^{(1,2)} + \Delta\xi_{1,2}.$$

Опуская промежуточные вычисления и учитывая (2), приводим окончательные выражения для координат ближней и дальней границ

$$\chi_6 = \chi_0 - 7,087554\chi_0^2 - 18,749534\chi_0^3; \quad (24)$$

$$\chi_{д} = \chi_0 + 7,087554\chi_0^2 - 16,982058\chi_0^3, \quad \chi_0 \in X_{Г}; \quad (25)$$

$$\chi_6 = 0,08384 - 0,005868\chi_0^{-1} - 0,115945 \cdot 10^{-4} \chi_0^{-2}; \quad (26)$$

$$\chi_{д} = 0,245552 - 0,018648\chi_0^{-1} - 4,495849 \cdot 10^{-4} \chi_0^{-2} + 4,459832 \cdot 10^{-4} \chi_0^{-3}, \quad (27)$$

$$\chi_0 \in X_{М}$$

и для ширины главного лепестка

$$\Delta\chi = 14,175108\chi_0^2 - 5 \cdot 10^{-6} \chi_0^3, \quad \chi_0 \in X_{Г}; \quad (28)$$

$$\Delta\chi = 0,161712 - 0,01278\chi_0^{-1} - 9,248948 \cdot 10^{-4} \chi_0^{-2} + 4,996235 \cdot 10^{-4} \chi_0^{-3}, \quad (29)$$

$$\chi_0 \in X_{М}.$$

Рассчитанные по (28) и (29) значения ширины лепестка (кривые 2 на рис. 6) отличаются от точных не более чем на 1 % при $\chi_0 \leq 0,008$ и $\chi_0 \geq 0,47$.

Ширина главного лепестка уменьшается со снижением χ_0 . Наиболее быстро сужение его происходит в области глубокой фокусировки (рис. 6) — пропорционально χ_0^2 . При $\chi_0 \rightarrow \infty$ ширина главного лепестка, выраженная в единицах расстояния до границы дальней зоны, стремится к постоянному значению, равному 0,161712.

Из рис. 1 видно, что главный лепесток существенно несимметричен. Для оценки его несимметричности введем коэффициент асимметрии

$$k_{ac} = \frac{\chi_1 - \chi_m}{\chi_m - \chi_2} \quad (30)$$

Соответствующие выражения для различных типов фокусировок имеют такой вид:

$$k_{ac} = 1 + 17,16604\chi_0 + 147,33646\chi_0^2 - 2152,736113\chi_0^3, \quad \chi_0 \in X_{\Gamma}; \quad (31)$$

$$k_{ac} = 2,928863 + 0,0163369\chi_0^{-1} - 0,02737\chi_0^{-2} + 0,010979\chi_0^{-3}, \quad \chi_0 \in X_m. \quad (32)$$

Эти зависимости представлены в виде кривых 2 на рис. 7. Анализ точных значений k_{ac} (кривая 1) показывает, что при увеличении фокусного расстояния k_{ac} монотонно растет, приближаясь при $\chi_0 \rightarrow \infty$ к значению 2,93.

Приведенные выше соотношения достаточно точно описывают изменения соответствующих величин в весьма ограниченных интервалах значений фокусного расстояния. В таблице даны приближенные формулы, позволяющие изучать продольное распределение интенсивности поля при любых значениях фокусного расстояния.

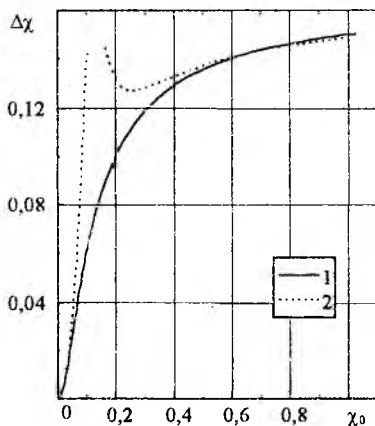


Рис. 6

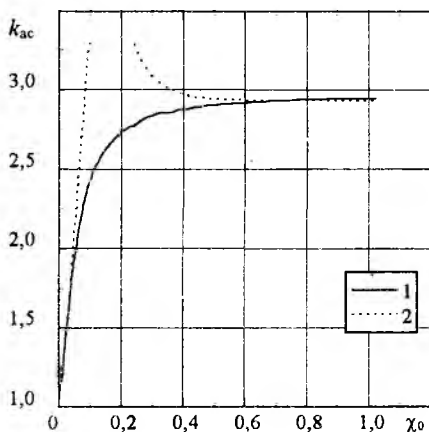


Рис. 7

Параметры	Расчетные формулы для 0,0001	Максимальные погрешности, %
Координаты максимума интенсивности	$0,125 - 0,009292\chi_0^{-1} + 3,869754\chi_0^{-2}$	1,0
	$\chi_0 - 51\chi_0^3 + 1650\chi_0^5$	3,0
Максимум главного лепестка	$(25,94 + 6,53\chi_0^{-1} + 0,658\chi_0^{-2})\pi^2 / 64$	1,0
	$\chi_0^{-2}(1,0 + 70\chi_0^2 - 765,4\chi_0^4)\pi^2 / 64$	0,7
Уровень первого побочного лепестка	$0,0472 + 2,31\chi_0 + 13,5\chi_0^2 - 87\chi_0^3$	1,0
	$1 - 0,166\chi_0^{-1} + 0,0179\chi_0^{-2} - 0,00086\chi_0^{-3}$	1,0
Координаты ближней границы главного лепестка	$0,08384 - 0,0054\chi_0^{-1} + 2 \cdot 10^{-4}\chi_0^{-2}$	1,0
	$\chi_0 - 7,3\chi_0^2 + 21,7\chi_0^3$	1,5
Координаты дальней границы главного лепестка	$0,245552 - 0,019\chi_0^{-1} + 5,3 \cdot 10^{-4}\chi_0^{-2}$	1,0
	$\chi_0 + 6,31\chi_0^2 - 50,2\chi_0^3$	2,5
Ширина главного лепестка	$0,161712 - 0,01375\chi_0^{-1} - 3,4 \cdot 10^{-4}\chi_0^{-2}$	1,5
	$(14,24 - 77,9\chi_0)\chi_0^2$	6,0
Коэффициент асимметрии главного лепестка	$2,93 + 0,016\chi_0^{-1} - 0,009\chi_0^{-2}$	2,5
	$1,0 + 21,7\chi_0 - 72,5\chi_0^2$	2,0
Коэффициент уменьшения интенсивности	$\chi_0^2(25,94 + 6,48\chi_0^{-1} + 0,67\chi_0^{-2})$	1,0
	$1 + 70\chi_0^2 - 765\chi_0^4$	0,7

Отметим, что хотя выполненный выше анализ, введенные параметры и выражения для их расчета относятся к зависимости, описывающей распределение интенсивности поля вдоль оси при заданном фокусном расстоянии, однако полученные результаты могут быть распространены и на зависимость $|E|^2$ в фиксированной точке на оси от величины фокусного расстояния. В этом случае необходимо в формулах для расчета соответствующих параметров величину χ_0 заменить на χ . При этом нужно иметь в виду, что все введенные параметры приобретут несколько иной смысл.

Список литературы: 1. Silver S. Microwave Theory and Design. New York.: McGraw-Hill, 1949. 321 p. 2. Ramsay J.F. Tubular Beam from Radiating Aperture // Advances Microwave. 1968. Vol. 3. P. 127—221.

Харьковский государственный технический университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 20.11.97