УДК 621.385.6

А. В. ГАЛАГАН, А. В. ГРИЦУНОВ, В. М. ПИСАРЕНКО

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МОДЕЛЯХ «КРУПНЫХ» ЧАСТИЦ

Значительно возросшие за последнее время мощности вычислительных установок, появление многопроцессорных систем позволяют создавать математические модели приборов СВЧ со скрещенными полями на основе прямого решения уравнений Максвелла. Однако практическая ценность моделей «крупных» частиц по-прежнему остается высокой. Эти модели, базирующиеся на методе самосогласованного поля, наиболее часто используют так называемый метод медленно меняющихся амплитуд, который заключается в решении системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dA_n}{dt} = -\frac{1}{N_n}\frac{\omega_{0n}}{2\pi}\int\limits_{t_0-T_n}^{t_0}\int\limits_V \vec{j}\,\vec{e}_n\,dV\cos(\omega_{0n}t+\varphi_n)\,dt - \frac{\omega_{0n}}{2Q_н}A_n;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{N_nA_n}\frac{\omega_{0n}}{2\pi}\int\limits_{t_0-T_n}^{t_0}\int\limits_V \vec{j}\,\vec{e}_n dV\sin(\omega_{0n}t+\varphi_n)\,dt, \qquad (1)$$

где A_n — амплитуда вида колебаний с номером n; φ_n — фаза колебаний; N_n — эквивалентная емкость замедляющей системы или норма; ω_{0n} — круговая частота; T_n — период колебаний; $\vec{j}$ — возбуждающий ток; $\vec{e}_n$ — структурная функция поля; $Q_н$ — нагруженная добротность.

Применение метода медленно меняющихся амплитуд ограничено временем релаксации, примерно на порядок бо́льшим периода основной гармоники сигнала. При расчете быстрых переходных процессов в приборах СВЧ можно непосредственно решать уравнение возбуждения второго порядка относительно мгновенных значений напряженности высокочастотного электрического поля E_n:

$$\frac{d^2E_n}{dt^2} + \frac{\omega_{0n}}{2Q_н}\frac{dE_n}{dt} + \omega_{0n}^2E_n = -\frac{1}{N_n}\int\limits_V \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}\vec{e}_n dV. \qquad (2)$$

Для численного решения дифференциальных уравнений в задачах математической физики чаще других используется метод Рунге — Кутта четвертого порядка. Но для решения уравнения (2) он не подходит, поскольку значения возбуждающего тока известны только в фиксированных равноотстоящих моментах времени. При этом для корректной реализации метода требуется либо экстраполяция на середину шага, которая отрицательно сказывается на точности, либо уменьшение шага по времени вдвое, что недопустимо из-за возрастания объема вычислительных операций.

Многошаговые методы (метод прогноза-коррекции) обладают высокой точностью и не требуют вычисления правой части уравнения (2) в промежутках между шагами по времени. Их недостаток — неустойчивость, которая проявляется в случае большого количества шагов решения.

Свободным от перечисленных недостатков является метод, в котором сочетаются степенной ряд для неизвестной функции и экстраполяционная формула Адамса для ее производной *:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k\Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}\left(\frac{19}{6}f_k - \frac{5}{3}f_{k-1} + \frac{1}{2}f_{k-2}\right); \qquad (3)$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \frac{\Delta t}{3}\left(\frac{23}{4}f_k - 4f_{k-1} + \frac{5}{4}f_{k-2}\right).$$

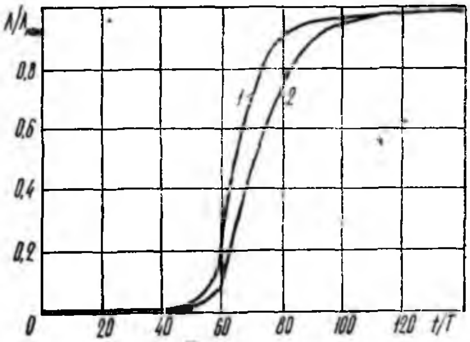
* *Рошаль А. С.* Моделирование заряженных пучков. М., 1979. 224 с.

В целях проверки возможности применения данного метода при моделировании автогенераторов со скрещенными полями методом «крупных» частиц произведена оценка погрешности метода с шагами моделирования порядка 1/16 ... 1/64 периода основного сигнала. Было выполнено решение неоднородного уравнения (2) при условии, что скалярное произведение возбуждающего тока на структурную функцию поля имеет вид

$$\vec{j}\,\vec{e}_n = \frac{N_n}{\omega_{0n}} \sin(\omega_{0n} t). \tag{4}$$

В этом случае точное решение находим по формуле

$$E_n(t) = e^{\alpha t}\left(\frac{C\omega_{0n}}{\beta} \sin \beta t\right) - C \sin \omega_{0n} t, \tag{5}$$



начальные условия: $\left.\frac{dE_n}{dt}\right|_{t=0} = 0$, $E_n(0) = 0$, где α — коэффициент затухания, $\alpha = \omega_{0n}/2Q_н$; C — константа характеристического уравнения, $C = -Q_н/\omega_{0n}^2$; β — константа неоднородного уравнения, $\beta = \sqrt{\omega_{0n}^2 - (\omega_{0n}/2Q_н)^2}$. Результат проверки показал, что при шаге решения 1/32 периода погрешность не превышает 1 %. Выбранный метод является оптимальным в отношении точности решения по сравнению с методами Эйлера и Рунге — Кутта.

На практике при нахождении правой части уравнения (2) наибольшую сложность представляет вычисление производной возбуждающего тока по времени. Учитывая, что под знаком интеграла по по объему от времени зависит только возбуждающий ток, операцию дифференцирования можно вынести за пределы интеграла. Правую часть в этом случае запишем следующим образом:

$$I_n = -\frac{1}{N_n}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \vec{j}\,\vec{e}_n \mathrm{d}V. \tag{6}$$

Если наведенный ток представляет собой строго синусоидальную функцию, то численное дифференцирование не составляет особых трудностей. В реальных моделях «крупных» частиц вследствие наличия модельных шумов форма возбуждающего тока не является гладкой. Поэтому целесообразно сглаживать интеграл взаимодействия на последних четырех шагах по методу наименьших квадратов. Заменяя интеграл взаимодействия I_n линейной моделью $I_n = a + bt$ (7), получаем его производную как коэффициент регрессии b, найденный по формуле

$$\frac{\partial I_n}{\partial t} = b = \frac{0{,}2\sum\limits_{i=1}^{4} i I_{n+i-4} - 0{,}5\sum\limits_{i=1}^{4} I_{n+i-4}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Рассмотренный алгоритм решения уравнения возбуждения второго порядка проверен с помощью реальной модели «крупных» частиц. На рисунке показано установление амплитуды колебаний в генераторе со скрещенными полями, рассчитанное решением уравнения второго порядка (кривая *1*) по формуле (3). Приведена также временная зависимость амплитуды колебаний для этого же прибора, полученная на основе выражений (1) (кривая *2*). Из сравнения графиков видно, что в случае анализа системы (1) кривая возбуждения запаздывает на несколько периодов сигнала, ее наклон меньше, чем при прямом решении уравнения второго порядка.

Таким образом, использование уравнения возбуждения второго порядка при моделировании переходных процессов в автогенераторах со скрещенными полями позволяет значительно повысить точность нахождения ВЧ-полей. Это особенно важно для моделирования многочастотных режимов с учетом конкурирующих видов колебаний, поскольку результат конкуренции в значительной мере зависит от скорости нарастания того или иного вида колебаний в приборе.

Поступила в редколлегию 07.01.8