УДК 519.21

# СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С КОНТИНУАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

*ДИКАРЕВ В.А.*

Рассматривается задача о стабилизации неоднородного марковского процесса при его локальных возмущениях для случая, когда фазовое пространство является континуальным. Исследуется влияние как сильных (фокусирующих), так и малых возмущений.

В [1] была рассмотрена задача о стабилизации распределений неоднородных марковских процессов при возмущениях отдельных его частей — фрагментов. Было показано, что при многократных возмущениях фрагментов вероятности состояний процесса либо принимают предельные значения (фокусировка), либо локализуются вблизи них ($\sigma$-фокусировка) [2]. Стабилизацией называется любой из этих случаев. Основными условиями, которые приводят к фокусировке, являются быстро изменяющиеся во времени факторы, вызывающие сильные возмущения основных характеристик процесса. Эти возмущения можно выбрать так, чтобы фокусировка была реализована на любое заданное распределение за любой сколь угодно малый промежуток времени [2]. В [1] число состояний процесса предполагалось конечным, а возмущения настолько сильными, что на возмущаемых фрагментах стабилизация достигалась уже при первом возмущении. Стохастическая матрица процесса при отсутствии возмущений предполагалась единичной и, таким образом, процесс "не сохранял память" о возмущениях, воздействующих на него ранее.

В этой статье рассматривается задача о стабилизации процесса при его локальных возмущениях для случая, когда фазовое пространство является континуальным. Помимо сильных (фокусирующих) возмущений рассмотрены и малые возмущения. Далее для определенности считаем, что фазовым пространством $\Omega$ исследуемого процесса является поверхность трехмерного шара. Считаем, что на $\Omega$ задана $\sigma$-алгебра, элементы которой являются событиями. Процесс $\Pi$ рассматривается на промежутке $[s_0, t_0)$, $t_0 \le \infty$. Предполагается, что если промежуток $[t', t''] \subset [s_0, t_0)$ не содержит возмущений, то $\Pi$ является на нем однородным процессом.

Рассмотрим подробно случай $t_0 = \infty$. Считаем, что множество всех возмущений $(\delta\Pi)_i$ процесса $\Pi$ на $[s_0, \infty)$ счетно. Через $[t_i, \tau_i]$, $\Pi_i$, $\Omega_i$ обозначим промежутки времени, на которых действуют $(\delta\Pi)_i$, процессы, которые $(\delta\Pi)_i$ порождают, и их фазовые пространства. Предполагается, что: все $\Omega_i$ являются областями, а $\tau_i$ — точками фокусировки процессов $\Pi_i$ на $\Omega_i$; случайные величины $(\delta\Pi)_i$ предполагаются независимыми. Далее через $\mathrm{I}(\Omega_i)$ будем обозначать индикаторные функции множеств $\Omega_i$.

Положим $\Omega_i \cap \Omega_j = \Omega_{ij}$. Считаем, что на $\Omega$ ($\Omega_i$) задана функция распределения вероятностей $f(M,t)$ процесса $\Pi$ ($\Pi_i$), если для любого события $B$ из $\Omega$ ($\Omega_i$) и любого $t \in [s_0, \infty)$ $P(M \in B) = \int_B f(N,t)\,d\Omega_N$. Здесь вероятность $P(M \in B)$ вычисляется в момент $t$. Предполагается, что начальное распределение $f(M, s_0)$ процесса $\Pi$ на $\Omega$ задано. Выясним, как изменяется функция распределения вероятностей $f(M,t)$ процесса $\Pi$ при очередном возмущении $(\delta\Pi)_i$. Все функции $f(M,\tau_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$ предполагаются непрерывными на $\Omega_i$.

Пусть $\Omega_i$ выбрано произвольно, множество $\{\Omega_j\}$ содержит все фазовые пространства, для которых $P(\Omega_{ij}) > 0$, $\{\tau_j\}$ — моменты фокусировки на $\{\Omega_j\}$. Обозначим $\nu_i$ наибольший элемент из $\{\tau_j\}$, для которого $\nu_i < \tau_i$. Положим $\beta_i = \max\{\nu_i, t_i\}$.

Пусть $f(M,\beta_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$, $f(M,\tau_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$ — функции распределения на $\Omega_i$ в моменты времени $\beta_i$, $\tau_i$. Тогда, чтобы получить функцию распределения процесса $\Pi$ на $\Omega$ в момент $\tau_i$, следует переопределить ее на $\Omega_i$, заменив $f(M,\beta_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$ на $f(M,\tau_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$. Для $M \in \Omega \setminus \Omega_i$ $f(M,\beta_i) = f(M,\tau_i)$. Усреднения функций $f(M,\beta_i)$, $f(M,\tau_i)$ по $\Omega_i$ совпадают:

$$\int_{\Omega_i} f(M,\beta_i)\,d\Omega_M = \int_{\Omega_i} f(M,\tau_i)\,d\Omega_M \quad . \qquad (1)$$

Это следует из условия нормировки $\int_{\Omega} f(M,t)\,d\Omega_M = 1$, выполняющегося при всех $t \in [s_0, \infty)$, и равенства

$$f(M,\beta_i)\,\mathrm{I}(\Omega \setminus \Omega_i) = f(M,\tau_i)\,\mathrm{I}(\Omega \setminus \Omega_i),$$

которое имеет место, поскольку на $(\beta_i, \tau_i]$ все возмущения, кроме $(\delta\Pi)_i$, сосредоточены лишь на $\Omega \setminus \Omega_i$.

Основные допущения:

А. Фокусирующие свойства каждого возмущения $(\delta\Pi)_i$ зависят лишь от положения его фазового пространства $\Omega_i$. Пусть $\Omega_i = \Omega_j$, распределения процессов $\Pi_i$, $\Pi_j$ в моменты $\beta_i$, $\beta_j$ удовлетворяют условию

$$\int_{\Omega_i} f(M,\beta_i)\,d\Omega_M = \int_{\Omega_i} f(M,\beta_j)\,d\Omega_M \quad .$$

Тогда распределения $f(M,\tau_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$, $f(M,\tau_j)\,\mathrm{I}(\Omega_j)$ этих процессов в моменты $\tau_i$, $\tau_j$ тождественно совпадают на $\Omega_i$.

Б. Пусть $(\delta\Pi)_i$, $(\delta\Pi)_j$ — возмущения, удовлетворяющие тем же условиям, что и в пункте А; $P(\Omega_{ij}) > 0$, $f(M,\tau_i)\,\mathrm{I}(\Omega_i)$, $f(M,\tau_j)\,\mathrm{I}(\Omega_j)$ — распределения на $\Omega_i$, $\Omega_j$, возникающие в результате этих возмущений; на $(\tau_i, \beta_j)$ никакие возмущения на $\Omega_{ij}$ не действуют. В этом случае считаем, что выполняются условия согласования: на $\Omega_{ij}$ функции

$f(M,\tau_i)\mathrm{I}(\Omega_i)$, $f(M,\tau_j)\mathrm{I}(\Omega_j)$ совпадают с точностью до постоянного множителя.

Пусть $\Omega_i \subset \Omega_j$. Из А, Б и (1) следует, что для любых $(\delta\Pi)_i$, $(\delta\Pi)_j$ распределения $f(M,\tau_i)\mathrm{I}(\Omega_i)$, $f(M,\tau_j)\mathrm{I}(\Omega_j)$ на $\Omega_i$ совпадают. Предполагается, что в промежутке $(\tau_i,\tau_j)$ никакие возмущения на $\Omega_i$ не действуют.

Условия А и Б являются необходимыми для того, чтобы при $t\to\infty$ фокусировка процесса $\Pi$ имела место.

В. Любая точка $M\in\Omega$ с вероятностью 1 содержится в бесконечном множестве областей $\Omega_i$; до любого момента $t$ $(t<\infty)$ происходит лишь конечное число возмущений. Для любой $\Omega_i$ найдется хотя бы одна $\Omega_j$, не совпадающая с $\Omega_i$, для которой $P(\Omega_{ij})\geq p>0$. Здесь $p$ не зависит от $i$, $j$.

Рассмотрим простейший случай фокусировки на $\Omega$. Пусть распределение $f(M,s_0)$ на $\Omega$ задано, множество всех $\{\Omega_i\}$ состоит из $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $P(\Omega_{12})>0$; $\tau_{2k-1}$, $\tau_{2k}$ $(k=1,2,\ldots)$ – моменты фокусировки на $\Omega_1$, $\Omega_2$. Пусть $f(M,\tau_1)I(\Omega_{12})>f(M,\tau_2)I(\Omega_{12})$ (из А следует, что если это неравенство имеет место хотя бы в одной точке $M\in\Omega_{12}$, то оно имеет место всюду на $\Omega_{12}$). Тогда последовательность $\{f(M,\tau_{2k-1})\}$ $(k=1,2,\ldots)$ монотонно убывает на $\Omega_{12}$, а $\{f(M,\tau_{2k})\}$ на $\Omega_{12}$ монотонно растет;

$$\lim_{k\to\infty}\left[f(M,\tau_{2k-1})-f(M,\tau_{2k})\right]I(\Omega_{12})=0 .$$

Изучим эволюцию процесса $\Pi$ на $[t_0,\infty)$. Докажем, что при $t\to\infty$ функция распределения $f(M,t)$ процесса $\Pi$ имеет предел, который не зависит от его начального распределения $f(M,s_0)$. Обозначим $F$ – множество всех распределений процесса $\Pi$ на $\Omega$. Для всех возмущений $(\delta\Pi)_i$ и всех $f(M)\in F$ определим оператор $A(\Omega_i)$, положив

$$A(\Omega_i)f(M)=f(M,\tau_i)\mathrm{I}(\Omega_i),\ M\in\Omega_i;$$

$$A(\Omega_i)f(M)=f(M),\ M\in\Omega\setminus\Omega_i .$$

Покажем, что оператор $A(\Omega_i)$ имеет неподвижную точку [3]. Это означает, что для всех $(\delta\Pi)_i$

$$A(\Omega_i)f_0(M)=f_0(M),\ \ f_0(M)\in F . \qquad (2)$$

Построим $f_0(M)$. Пусть $\{\Omega_i\}$ $(i=1,\ldots,n)$ – конечное покрытие фазового пространства $\Omega$. Элементы покрытия $\Omega_i$ – это фазовые пространства, возникшие в результате возмущений $(\delta\Pi)_i$. Через $f(M,\tau_i)\mathrm{I}(\Omega_i)$ по-прежнему обозначаем распределения, на которые $(\delta\Pi)_i$ фокусируют. Выделим из покрытия $\{\Omega_i\}$ все области $\Omega_{i_1},\ldots,\Omega_{i_k}$, которые имеют с $\Omega_1$ непустые пересечения. На пересечениях области $\Omega_1$ с областями $\Omega_{i_1},\ldots,\Omega_{i_k}$ функция $f(M,\tau_1)\mathrm{I}(\Omega_1)$ и функции

$$f(M,\tau_{i_1})\mathrm{I}(\Omega_{i_1}),\ldots,f(M,\tau_{i_k})\mathrm{I}(\Omega_{i_k}),$$

вообще говоря, не совпадают. Выберем такие числа $l_{i_1},\ldots,l_{i_k}$, чтобы при умножении их на $f(M,\tau_{i_1})\mathrm{I}(\Omega_{i_1}),\ldots,f(M,\tau_{i_k})\mathrm{I}(\Omega_{i_k})$ эти совпадения имели место:

$$f(M,\tau_1)\mathrm{I}(\Omega_1)=l_1 f(M,\tau_{i_1})\mathrm{I}(\Omega_{i_1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(M,\tau_1)\mathrm{I}(\Omega_1)=l_k f(M,\tau_{i_k})\mathrm{I}(\Omega_{i_k}).$$

Определим на объединении $\tilde{\Omega}_1$ областей $\Omega_1,\Omega_{i_1},\ldots,\Omega_{i_k}$ функцию $\tilde{f}_{01}(M)$ равенствами

$$\tilde{f}_{01}(M)=f(M,\tau_1)\mathrm{I}(\Omega_1),\ M\in\Omega_1 ,$$

$$\tilde{f}_{01}(M)=l_\nu f(M,\tau_{i_\nu})\mathrm{I}(\Omega_{i_\nu}),\ M\in\Omega_{i_\nu}\setminus\Omega_1 (\nu=1,\ldots,k).$$

Из построения $\tilde{f}_{01}(M)$ следует, что $\Omega_1\subset\tilde{\Omega}_1$; для любой области $D\subset\tilde{\Omega}_1$ (2) имеет место. Чтобы расширить область, на которой (2) выполняется, нужно выделить из покрытия $\{\Omega_i\}$ все элементы (не содержащиеся в $\tilde{\Omega}_1$), имеющие с $\tilde{\Omega}_1$ непустые пересечения, и повторить для них те построения, которые ранее были проделаны для $\Omega_{i_1},\ldots,\Omega_{i_k}$. В результате получим множество $\tilde{\Omega}_2$, $\tilde{\Omega}_1\subset\tilde{\Omega}_2$. Этот прием следует повторять до тех пор, пока в состав областей $\tilde{\Omega}_1,\tilde{\Omega}_2,\ldots$ не войдут все элементы покрытия $\{\Omega_i\}$. Полученная в результате этого построения функция $\tilde{f}_0(M)$ будет удовлетворять (2) для любой области $D\subset\Omega$. Функция $\tilde{f}_0(M)$ отличается от искомой функции $f_0(M)$ на постоянный множитель $c$. Его следует выбрать так, чтобы

$$\int_\Omega c\tilde{f}_0(M)d\Omega_M=1 .$$

Из построения $f_0(M)$ следует, что неподвижная точка оператора $A(\Omega_i)$ единственна.

Пусть все допущения о процессе $\Pi$ и его возмущениях выполняются. Докажем, что тогда, независимо от начального распределения процесса, заданного в момент $s_0$, с вероятностью 1 $\lim\limits_{t\to\infty}f(M,t)$ существует и

$$\lim_{t\to\infty}f(M,t)=f_0(M). \qquad (3)$$

Здесь $f(M,t)$ – распределение процесса $\Pi$ в момент $t$; $f_0(M)$ – неподвижная точка.

Из множества $\{\Omega_i\}$ фазовых пространств, отвечающих всем возмущениям $(\delta\Pi)_i$, можно выделить бесконечную последовательность покрытий $\{\Omega_{i_k}\}$ $(i_k=1,2,\ldots,n_k)$ фазового пространства $\Omega$ (здесь индексом $i_k$ занумерованы элементы $k$-го покрытия). Существование последовательности этих покрытий следует из В. Обозначим $(\hat{t}_k,\tilde{t}_k)$ $(k=1,2,\ldots)$ интервалы, на которых действуют $(\delta\Pi)_{i_k}$, порождающие элементы из $\{\Omega_{i_k}\}$. Все покрытия $\{\Omega_{i_k}\}$ можно выбрать так, чтобы интервалы $(\hat{t}_k,\tilde{t}_k)$ $(k=1,2,\ldots)$ попарно не пересекались и все $(\tilde{t}_k,\hat{t}_{k+1})$ содержали области $\Omega_j$ из В, имеющие непустое пересечение хотя бы с одним элементом покрытия, сформированного на $(\hat{t}_k,\tilde{t}_k)$. Очевидно,

$\widetilde{t}_k \to \infty$. Обозначим $\tau_{i_k}$ моменты, в которые происходят фокусировки на $\Omega_{i_k}$. В каждом $\{\Omega_{i_k}\}$ выделим элементы $\Omega_{i_k,\min}$, $\Omega_{i_k,\max}$, на которых разности $f(M,\tau_{i_k})I(\Omega_{i_k}) - f_0(M)I(\Omega_{i_k})$ принимают наименьшее и наибольшее значения. Очевидно,

$$f(M,\tau_{i_k,\min})I(\Omega_{i_k,\min}) - f_0(M)I(\Omega_{i_k,\min}) < 0,$$
$$f(M,\tau_{i_k,\max})I(\Omega_{i_k,\max}) - f_0(M)I(\Omega_{i_k,\max}) > 0. \quad (4)$$

Из А, Б и (1) следует, что при $k \to \infty$ разности $f(M,\tau_{i_k,\max})I(\Omega_{i_k,\max}) - f(M,\tau_{i_k,\min})I(\Omega_{i_k,\min})$ монотонно убывают и стремятся к нулю. Значит обе разности из (4) при $t \to \infty$ также стремятся к нулю. Отсюда следует, что (3) имеет место.

Для $t_0 < \infty$ предполагается, что: на $[s_0,t_0)$ сосредоточены все возмущения из $(\delta\Pi)_i$ $(i=1,2,...)$; на любом $[s_0,t'] \subset [s_0,t_0)$ число возмущений предполагается конечным. Остальные предположения о возмущениях остаются прежними. Доказательство того, что процесс $\Pi$ фокусирует на неподвижную точку $A(\Omega_i)$, проводится так же, как для случая $t_0 = \infty$.

Если $\tau_i$ (все или их часть) являются точками $\sigma$-фокусировки, то процесс $\Pi$ $\sigma$-фокусирует на $f_0(M)$. Такая фокусировка будет иметь место и в случае, когда условия Б, В выполняются приближенно.

Рассмотрим случай, когда возмущения $(\delta\Pi)_\alpha$ $(\alpha=1,2,...)$ не приводят к фокусировке на $\Omega_\alpha$. Пусть каждое $\Omega_\alpha$ подвергается воздействию возмущений $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ $(i=1,2,...)$ и любое $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ лишь незначительно изменяет распределения вероятностей на $\Omega_\alpha$. Считаем, что возникающие в результате возмущений $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ распределения $f_{\alpha,i}(M)I(\Omega_\alpha)$ $(i=1,2,...)$ образуют последовательность, равномерно сходящуюся на $\Omega_\alpha$. Если условие В имеет место, перечисленные требования выполняются для всех $\Omega_\alpha$ и распределения на $\Omega_\alpha$, к которым сходятся $f_{\alpha,i}(M)I(\Omega_\alpha)$ $(\alpha=1,2,...)$, удовлетворяют условиям А, Б, то имеет место (3). Проверка этого утверждения с незначительными изменениями проводится так же, как для случая, когда возмущения $(\delta\Pi)_\alpha$ сразу приводят к фокусировке.

**Литература:** 1. *Дикарев В.А., Герасин С.Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Доп. НАН України. 2000. №8. С. 90-93. 2. *Дикарев В. А.* Фокусировка распределений марковских процессов. // Доп. НАН України.1999. №11.С.100-103. 3. *Конторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

Поступила в редколлегию 24.07.2002

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

**Дикарев Вадим Анатольевич,** д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: функциональный анализ, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел.: (0572) 33-57-03 (дом.), (0572) 40-94-36 (раб.).

---

УДК 517.9+532.5

# О ПОСТРОЕНИИ СТРУКТУР РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

*СИДОРОВ М.В.*

Рассматриваются постановки основных краевых задач для функции тока в случае медленного течения вязкой несжимаемой жидкости. Строятся структуры решения указанных задач.

Стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости описывается хорошо известными уравнениями Навье-Стокса [1]:

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{b} \quad (1)$$

и уравнением неразрывности

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ − поле скоростей; $p$ − давление; $\mathbf{b}$ − поле объемных сил; $\nu$ − кинематическая вязкость; $\rho$ − плотность.

Решение системы (1), (2) сопряжено со значительными трудностями, связанными, в основном, с присутствием в (1) нелинейного члена $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$.

Для достаточно медленного движения отношение порядка конвективных сил инерции к порядку сил вязкости мало (т.е. мало число Рейнольдса), и нелинейными членами в (1) можно пренебречь. При этом получаем линеаризованные по Стоксу уравнения вязкой несжимаемой жидкости. Задача определения $\mathbf{v}$ и $p$ в области $\Omega$ (*задача Стокса*) имеет вид

$$\nu\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Вопросы существования и единственности решения задачи (3) − (5) изучались в монографии О.А. Ладыженской [2]. В частности, доказано, что существует единственное обобщенное решение задачи (3)-(5) $\mathbf{v} \in \overset{0}{\mathbf{W}}{}^1_2(\Omega)$ и $p \in L^2(\Omega)$.

Достаточно широкий класс течений может быть сведен к двумерным течениям. Итак, рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в конечной области $\Omega$ плоскости $x_1Ox_2$. В развернутом виде уравнения (3), (4) имеют вид

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + b_1, \quad (6)$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + b_2, \quad (7)$$