УДК 621.391.2

И. Н. Пресняков

АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ИХ ДИНАМИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Решение широкого класса задач фильтрации случайных процессов по результатам их наблюдений в условиях априорной неопределенности достаточно эффективно достигается в рамках адаптивного байесовского подхода [1, 2]. Его характерной особенностью является рассмотрение параметрического или непараметрического семейства вероятностных характеристик, соответствующего ограниченной априорной информации о частично наблюдаемом векторном процессе $\vec{\xi}(t)=\{\vec{\chi}(t), \vec{\lambda}(t)\}$ с наблюдаемой $\vec{\chi}(t)$ и фильтруемой $\vec{\lambda}(t)$ составляющими. Фиксация такого семейства представляет собой встречную гипотезу, без применения которой постановка задачи адаптивной фильтрации становится некорректной.

Наибольшее распространение в теории адаптивной фильтрации получила встречная гипотеза о параметрическом семействе вероятностных характеристик условных марковских процессов [1]. Вместе с тем существует целый ряд задач фильтрации в условиях изменяющейся с течением времени априорной неопределенности, уровень которой не может быть сведен к чисто параметрическому. Для них естественным расширением и усложнением встречной гипотезы представляется задание семейства вероятностных характеристик на траекториях процесса $\vec{\xi}(t)$, относящегося к классу семимартингалов [3, 4]. Его текущие значения в этом случае имеют вид:

$$\vec{\xi}(t)=\vec{\sigma}_{\xi}(t)+\vec{\mu}_{\xi}(t), \qquad t\geq t_0, \tag{1}$$

где $\sigma_{\xi}(t)$ — случайный процесс с ограниченной вариацией;
$\mu_{\xi}(t)$ — мартингал.

Ограничимся рассмотрением подкласса семимартингалов, у которых процесс с ограниченной вариацией отражает воздействие неупреждающего [3, 4] стохастического оператора $\vec{\Phi}_{\xi}[\,.\,]$ на реализацию $\{\vec{\alpha}(t)\}$ фильтруемой составляющей или реализацию $\{\vec{\xi}(t)\}$ всего частично наблюдаемого процесса:

$$\vec{\sigma}_{\xi}(t)=\vec{\xi}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{\Phi}_{\xi}[\{\vec{\xi}(\tau)\}]d\tau=\vec{\xi}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varphi_{\xi}(\tau)d\tau, \tag{2}$$

а мартингал представляет собой преобразование процесса $\nu(t)$ с независимыми приращениями, являющегося суммой непрерывного винеровского процесса $w(t)$ и скачкообразного пуассоновского процесса $\pi(t)$, посредством мультипликативного ограниченного и неотрицательного предсказуемого [3, 4] оператора $\vec{\Gamma}_{\xi}[\,.\,]$:

$$\vec{\mu}_{\xi}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{\Gamma}_{\xi}[\vec{\xi}(\tau)]d\nu(\tau)=\int_{t_0}^{t}\vec{\gamma}_{\xi}(\tau)d\nu(\tau). \tag{3}$$

Здесь

$$\vec{\varphi}_{\xi}(\tau)=\begin{bmatrix}\varphi_x(\tau)\\ \varphi_{\alpha}(\tau)\end{bmatrix}=\vec{\Phi}_{\xi}[\{\vec{\xi}(\tau)\}];\ \vec{\gamma}_{\xi}(\tau)=\begin{bmatrix}\vec{\gamma}_x(\tau)\\ \vec{\gamma}_{\alpha}(\tau)\end{bmatrix}=\vec{\Gamma}_{\xi}[\{\vec{\xi}(\tau)\}].$$

Процессы указанного вида, рассматриваемые как решения стохастических дифференциальных уравнений

$$d\vec{\xi}(t)=\vec{\varphi}_{\xi}(t)dt+\vec{\gamma}_{\xi}(t)d\nu(t), \qquad t\geq t_0, \tag{4}$$

в задачах адаптивной фильтрации могут быть названы динамичными. Они позволяют формализовать широкий диапазон априорной неопределенности (от параметрической до непараметрической) по отношению к байесовскому (обычно марковскому) подходу и дают удобную математическую модель для решения задач фильтрации с позиций мартингального подхода [3, 5].

Мартингальное решение этих задач заключается в отыскании дифференциального оператора (алгоритма) $\vec{J}[\,.\,]$, связывающего дифференциал оценки $d\vec{\alpha}(t)$ для фильтруемой составляющей с реализацией $\{\vec{\chi}(t)\}$ наблюдаемой составляющей:

$$d\hat{\vec{\alpha}}(t)=\vec{J}[\{\vec{\chi}(t)\}]\,, \qquad t\geq t_0\,. \tag{5}$$

Критерием качества при этом служит минимизация среднеквадратичной ошибки:

$$q(\hat{\vec{\alpha}}(t))=M[\,|\vec{\alpha}(t)-\hat{\vec{\alpha}}(t)|^2\,]\,, \tag{6}$$

где $M[\,.\,]$ — оператор статистического усреднения по ансамблю реализаций.

В основу такой минимизации обычно кладется [3, 5] обновляющее представление частично наблюдаемого процесса $\vec{\xi}(t)$:

$$d\vec{\xi}(t)=\check{\vec{\varphi}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\})dt+\check{\vec{\gamma}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\})d\check{\nu}(t)\,,\ t\geq t_0\,, \tag{7}$$

а ее итогом является обновляющее представление для оценки $\hat{\vec{\alpha}}(t)$:

$$d\hat{\vec{\alpha}}(t)=\hat{\vec{\varphi}}_{\alpha}(t,\{\vec{\chi}(t)\})dt+\hat{\vec{\gamma}}_{\hat{\alpha}}(t,\{\vec{\chi}(t)\})d\hat{\nu}(t)\,,\ t\geq t_0\,. \tag{8}$$

Здесь

$$\check{\vec{\varphi}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\})=M[\vec{\varphi}_{\xi}(t)/\{\vec{\xi}(t)\}];\ \check{\vec{\gamma}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\})d\check{\nu}(t)=$$

$$=d\vec{\xi}(t)-\check{\vec{\varphi}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\});\ \vec{\varphi}_{\alpha}(t,\{\vec{\chi}(t)\})=M[\varphi_{\alpha}(t)/\{\vec{\chi}(t)\}]\,;$$

$$\hat{\vec{\gamma}}_{\hat{\alpha}}(t,\{\vec{\chi}(t)\})=M[\vec{\alpha}(t)\{\vec{\varphi}_{\chi}(t)-\hat{\varphi}_{\chi}(t,\{\vec{\chi}(t)\})\}^{T}\vec{\gamma}_{\chi}(t)+$$

$$\hat{\vec{\gamma}}_{\hat{\alpha}}(t,\{\vec{\chi}(t)\})d\hat{\vec{\nu}}(t)=M[\vec{\alpha}(t)\{\vec{\varphi}_\chi(t)-\hat{\vec{\varphi}}_\chi(t,\{\vec{\chi}(t)\})\}^T+$$

$$+\vec{\gamma}_\alpha(t)\vec{\gamma}_\chi^T(t)(1+\Pi(t))/\{\vec{\chi}(t)\}]\{\hat{\vec{\gamma}}_\chi(t,\{\vec{\chi}(t)\})(1+\Pi(t))\times$$

$$\times\hat{\vec{\gamma}}_\chi^T(t,\{\vec{\chi}(t)\})\}^{-1}[d\vec{\chi}(t)-\hat{\vec{\varphi}}_\chi(t,\{\vec{\chi}(t)\})dt];$$

$$\hat{\vec{\varphi}}_\chi(t,\{\vec{\chi}(t)\})=M[\vec{\varphi}_\chi(t)/\{\vec{\chi}(t)\}].$$

Необходимо отметить, что условия совпадения мартингального и байесовского решений задачи фильтрации определяются условиями существования и единственности сильных решений стохастического дифференциального уравнения [3, 5], описывающего обновляющее представление частично наблюдаемого процесса $\vec{\xi}(t)$ (7). Эти условия имеют вид неравенства

$$g_{\xi,1}(t,\{\vec{\xi}(t)\})=\kappa\cdot[1+\sup_{t_0\le\tau\le t}|\vec{\xi}(\tau)|^2]-$$
$$-|\check{\vec{\varphi}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\}|^2-|\check{\vec{\gamma}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\})|^2\ge 0, \tag{9}$$

$$g_{\xi,2}(t,\{\vec{\xi}(t)\})=\kappa\cdot\sup_{t_0\le\tau\le t}|\vec{\xi}(\tau)-\vec{\xi}'(\tau)|^2-$$
$$-|\check{\varphi}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\})-\check{\varphi}_\xi(t,\{\vec{\xi}'(t)\})|^2- \tag{10}$$
$$-|\check{\gamma}_\xi(t,\{\xi(t)\})-\check{\gamma}_\xi(t,\{\vec{\xi}'(t)\})|^2\ge 0,$$

с положительной константой κ.

Естественно, что при априорной неопределенности непосредственное обеспечение данных условий встречает принципиальные затруднения, если не расширить каким-либо образом постановку задачи адаптивной фильтрации. Поэтому для формализации мартингальных алгоритмов в рамках адаптивного байесовского подхода введем ограничения на стратегии адаптации, касающиеся использования в обновляющем представлении частично наблюдаемого процесса обратной связи по оценочной реализации $\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}$ его фильтруемой составляющей:

$$d\vec{\xi}(t)=\check{\varphi}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})dt+ \tag{11}$$

$$+\check{\vec{\gamma}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\,d\check{\nu}(t), \quad t \geq t_0 .$$

Структура характеристик $\check{\varphi}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}),\check{\vec{\gamma}}_{\xi}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})$ и $\check{\nu}(t)$ совпадает с использованными в (7) при учете обратной связи по $\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}$.

Наличие такой обратной связи характерно для управляемых стохастических дифференциальных уравнений [6, 7] и по этой причине обновляющее представление (11) может быть названо управляемым. Цель управления при этом заключается в обеспечении условий существования и единственности сильного решения уравнения (11), которые формализуются сходными с (9), (10) неравенствами:

$$g_{\xi,1}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}) \geq 0, \tag{12}$$

$$g_{\xi,2}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}) \geq 0 . \tag{13}$$

Введение стратегий адаптации с обратной связью (управлением) по оценочной реализации $\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}$ приводит к необходимости применения алгоритмов фильтрации вида

$$d\hat{\vec{\alpha}}(t) = \mathcal{I}[\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}] . \tag{14}$$

Их оптимизация наряду с простым критерием качества (6) должна учитывать неравенства (12), (13). Учет этих неравенств методом множителей Лагранжа [8] обеспечивается при оптимизации алгоритмов адаптивной фильтрации по сложному критерию качества

$$\begin{aligned} \min[Q(\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\},\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\lambda_4(t)) = \\ = q(\hat{\vec{\alpha}}(t)) - \int_{t_0}^{t}\lambda_1(\tau)g_{\xi,1}(\tau,\{\vec{\xi}(\tau)\}\{\hat{\vec{\alpha}}(\tau)\})d\tau - \int_{t_0}^{t}\lambda_2(\tau)\times \\ \times g_{\xi,2}(\tau,\{\vec{\xi}(\tau)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(\tau)\})d\tau + \int_{t_0}^{t}\lambda_3^2(\tau)\lambda_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\lambda_4^2(\tau)\lambda_2(\tau)d\tau] \end{aligned} \tag{15}$$

Требование, чтобы этот критерий выполнялся для оценочной реализации $\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}$ и множителей Лагранжа $\lambda_1(\tau),\lambda_2(\tau),\lambda_3(\tau),\lambda_4(\tau); t_0 \leq \tau < t$, равносильно требованию оптимизации алгоритмов адаптивной фильтрации одновременно по соответствующему различным моментам времени множеству частных критериев. Она может быть проведена с использованием методов динамического программирования в их стохастической форме [1, 2, 9].

Как следует из критерия (15), эти методы должны обеспечивать такое определение множителей Лагранжа и уточнение оценочной реализации для предшествующих моментов времени, чтобы в текущий момент времени получить сильное решение стохастического дифференциального уравнения (11). Ему в этом случае будет соответствовать уравнение для характеристической функции $f(t,\vec{u}_\xi)$ процесса $\vec{\xi}(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,\vec{u}_\xi) = M[\{j\vec{u}_\xi^T \vec{\check{\varphi}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\}) - \frac{1}{2}\vec{u}_\xi^T \vec{\check{\gamma}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},$$
$$\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\})\vec{\check{\gamma}}_\xi^T(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\})\vec{u}_\xi - [1+j\vec{u}_\xi^T \vec{\check{\gamma}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\}) - \tag{16}$$
$$-\exp\{j\vec{u}_\xi^T \vec{\check{\gamma}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\})]\cdot\Pi(t)\}\exp\{j\vec{u}_\xi^T \vec{\xi}(t)\}],$$

где $\Pi(t)$ — интенсивность пуассоновского потока единичных скачков процесса $\pi(t)$. Производная по времени в левой части (16) записана символически, поскольку при ее вычислении приращение придается только непосредственно временному аргументу, а функции $\vec{\varphi}_\xi(t,\{\xi(t)\},\{\hat{\lambda}(t)\})$ и $\vec{\gamma}_\xi(t,\{\xi(t)\},\{\hat{\lambda}(t)\})$ при этом остаются фиксированными.

Решив уравнение (16), можно вычислить математическое ожидание в среднеквадратичной ошибке $q(\hat{\vec{\lambda}}(t))$ (16), которая также должна минимизироваться методами динамического программирования при определении текущей оценки $\hat{\vec{\lambda}}(t)$.

Практическая реализация этих методов в реальном масштабе непрерывного времени, как правило, встречает серьезные затруднения. Для их преодоления можно воспользоваться предложенным в работе [10] методом, приводящим к условно-оптимальным алгоритмам фильтрации. Его модификация в случае модели динамичного частично наблюдаемого процесса $\vec{\xi}(t)$ (4) будет использовать структуру полученного в рамках мартингального подхода обновляющего представления (8), которое в управляемой форме запишется как

$$d\hat{\vec{\lambda}}(t) = \hat{\vec{\varphi}}_\lambda(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\})dt + \hat{\vec{\gamma}}_\lambda(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\lambda}}(t)\})d\hat{\nu}(t), \quad t \geq t_0, \tag{17}$$

а входящие в нее характеристики $\hat{\vec{\varphi}}_{\alpha}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})$ и $\hat{\vec{\gamma}}_{\alpha}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})$ определяться методами градиентного стохастического поиска [9] минимума, входящего в критерий (15) функционала $Q(\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\},\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\lambda_4(t))$.

С целью упрощения решения этой задачи преобразуем уравнение (17) к характерному для условно-оптимальных алгоритмов фильтрации виду:

$$d\hat{\vec{\alpha}}(t)=\vec{A}(t)\vec{a}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})dt+ \\ +\vec{B}(t)\vec{b}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})d\vec{y}(t)+\vec{c}(t)dt. \tag{18}$$

Если выбор векторной $\vec{a}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})$ и матричной $\vec{b}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})$ функций осуществлять для предшествующих моментов времени исходя из необходимости получения сильного решения уравнения (11), то обеспечение критерия (15) по текущей оценке $\hat{\vec{\alpha}}(t)$ достигается определением оптимальных матричных $\vec{A}(t)$, $\vec{B}(t)$ и векторного $\vec{c}(t)$ коэффициентов в рамках теории линейной регрессии [10]. Для управляемой формы условно-оптимального алгоритма адаптивной фильтрации им соответствует следующая система уравнений:

$$A(t)M[\{a(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-M[\vec{a}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\}]]\}\vec{a}^{T}(t,$$
$$\{y(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]+M[(\hat{\vec{\alpha}}(t)-\vec{\alpha}(t))\{A(t)\vec{a}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})+$$
$$+\vec{c}(t)\}^{T}\frac{\delta\vec{a}^{T}}{\delta\hat{\vec{\alpha}}}\Big]=M[\{\check{\varphi}_{\alpha}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-M[\check{\varphi}_{\alpha}(t,\{\vec{\xi}(t)\},$$
$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]\}\vec{a}^{T}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]+M\Big[(\vec{\alpha}(t)-\hat{\vec{\alpha}}(t))\frac{\partial\vec{a}^{T}}{\partial t}\Big]+$$
$$+M[\{(\vec{\alpha}(t)-\hat{\vec{\alpha}}(t))[\check{\vec{\varphi}}_{y}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-\Pi(t)\check{\vec{\gamma}}_{y}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},$$
$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]+\check{\vec{\gamma}}_{\alpha}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_{y}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-$$
$$-\vec{B}(t)\vec{b}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_{y}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_{y}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},$$
$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\}\Big\{\frac{\delta\vec{a}^{T}}{\delta\vec{y}}+\vec{b}^{T}(t,\{\vec{y}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{B}^{T}(t)\frac{\delta\vec{a}^{T}}{\delta\hat{\vec{\alpha}}}\Big\}\Big]+$$

7 6-367

$$+\frac{1}{2}M[(\vec{\alpha}(t)-\hat{\vec{\alpha}}(t))\{tr[\check{\vec{\gamma}}_{\chi}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\vec{\alpha}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_{\chi}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},$$

$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})(\frac{\delta}{\delta\vec{\chi}}+2\vec{b}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{B}^{T}(t)\frac{\delta}{\delta\hat{\vec{\alpha}}})\frac{\delta^{T}}{\delta\vec{\chi}}]\times$$

$$\times\vec{a}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})+tr[\vec{B}(t)\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\times$$

$$\times\check{\vec{\gamma}}_{\chi}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_{\chi}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{b}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},$$

$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{B}^{T}(t)\frac{\delta}{\delta\hat{\vec{\alpha}}}\frac{\delta^{T}}{\delta\hat{\vec{\alpha}}}]\vec{a}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\}]; \qquad (19)$$

$$\vec{B}(t)=\{M[(\vec{\alpha}(t)-\hat{\vec{\alpha}}(t))\check{\vec{\varphi}}_{\chi}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{b}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},$$

$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]+M[\check{\vec{\gamma}}_{\alpha}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})(1+n(t))\check{\vec{\gamma}}_{\chi}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},$$

$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{b}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]\}\{M[\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\times$$

$$\times\check{\vec{\gamma}}_{\chi}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})(1+n(t))\check{\vec{\gamma}}_{\chi}^{T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\times$$

$$\times\vec{b}^{T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]\}^{-1}; \qquad (20)$$

$$\vec{C}(t)=M[\check{\vec{\varphi}}_{\alpha}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-\vec{A}(t)M[\vec{a}(t,\{\vec{\chi}(t)\},$$

$$\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})]-\vec{B}(t)M[\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\varphi}}_{\chi}(t, \qquad (21)$$

$$\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})].$$

Здесь $\frac{\delta}{\delta\vec{\chi}}$ и $\frac{\delta}{\delta\hat{\vec{\alpha}}}$ — операторы вариационных производных; tr — оператор следа матрицы.

Для вычисления математических ожиданий в системе уравнений (19) — (21) необходимо знать совместное распределение векторов $\vec{\xi}(\tau)$ и $\hat{\vec{\alpha}}(\tau)$ при любом $t_0 \le \tau < t$. Это распределение определяется уравнением для характеристической функции $f(t,\vec{u}_{\xi},\vec{u}_{\hat{\alpha}})$, соответствующим системе стохастических дифференциальных уравнений (11), (18):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} f(t,\vec{u}_\xi,\vec{u}_{\hat{\alpha}})=M\Big[\Big\{j\vec{u}_\xi^{\,T}\check{\vec{\varphi}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-\\
&-\frac{1}{2}\vec{u}_\xi^{\,T}\check{\vec{\gamma}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_\xi^{\,T}(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{u}_\xi-\\
&-[1+j\vec{u}_\xi\check{\vec{\gamma}}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-\exp\{j\vec{u}_\xi^{\,T}\vec{\gamma}_\xi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\\
&\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\}]\Pi(t)+j\vec{u}_{\hat{\alpha}}^{\,T}\vec{A}(t)\vec{a}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})+j\vec{u}_{\hat{\alpha}}^{\,T}\vec{B}(t)\times\\
&\times\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\varphi}}_\chi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})+j\vec{u}_{\hat{\alpha}}^{\,T}\vec{c}(t)-\\
&-\frac{1}{2}\vec{u}_{\hat{\alpha}}^{\,T}\vec{B}(t)\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_\chi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_\chi^{\,T}(t,\\
&\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{b}^{\,T}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\vec{B}^{\,T}(t)\vec{u}_{\hat{\alpha}}-[1+\\
&+j\vec{u}_{\hat{\alpha}}^{\,T}\vec{B}(t)\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_\chi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})-\\
&-\exp\{j\vec{u}_{\hat{\alpha}}^{\,T}\vec{B}(t)\vec{b}(t,\{\vec{\chi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\check{\vec{\gamma}}_\chi(t,\{\vec{\xi}(t)\},\{\hat{\vec{\alpha}}(t)\})\}]\times\\
&\times\Pi(t)\Big\}\exp\{j\vec{u}_\xi^{\,T}\vec{\xi}(t)+j\vec{u}_{\hat{\alpha}}\hat{\vec{\alpha}}(t)\}\Big] .
\end{aligned}
$$

Таким образом, возможность применения различных методов оптимизации алгоритмов свидетельствует о том, что динамические модели случайных процессов в задачах адаптивной фильтрации имеют конструктивный характер не только при формализации различных уровней априорной неопределенности, но и с точки зрения ее преодоления.

Литература: 1. ***Стратонович Р. Л.*** **Принципы адаптивного приема.— М.: Сов. радио, 1973.— 144 с. 2.** ***Репин В. Г., Тартаковский Г. П.*** **Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.— 432 с. 3.** ***Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.*** **Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974.— 696 с. 4.** ***Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.*** **Теория мартингалов.— М.: Наука, 1987.— 512 с. 5.** ***Каллианпур Г.*** **Стохастическая теория фильтрации.— М.: Наука,**

1987.— 320 с. 6. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М.: Наука, 1977.— 374 с. 7. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения.— М.: Мир, 1986.— 351 с. 8. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа.— М.: Радио и связь, 1987.— 400 с. 9. *Казаков И. Е., Гладков Д. И.* Методы оптимизации стохастических систем.— М.: Наука, 1987.— 304 с. 10. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы.— М.: Наука, 1985.— 560 с.