

СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ЦЕПИ.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1 Постановка задачи

Решение многих вопросов как теории электрических цепей, так и теории радиотехнических сигналов и процессов требует знания временных характеристик цепи. К таким вопросам, в частности, относятся анализ переходных процессов, определение отклика цепи на сложное воздействие временным методом [1,2], синтез электрической цепи по временному отклику [3], комбинированный синтез [4], синтез цифровых фильтров по методу инвариантных импульсных характеристик [5] и другие.

Как известно, временные (переходную $h(t)$ и импульсную $g(t)$) характеристики электрической цепи можно определить классическим или операторным способами [1-3]. Первый способ требует определения начальных значений временных характеристик и их производных, второй – связан с необходимостью предварительного преобразования выражения операторной функции цепи $T(p)$. Для цепей второго порядка и выше указанные действия представляют собой трудоемкую операцию. Поэтому представляется актуальным решение задачи: используя связь начальных значений временных характеристик с полиномиальными вещественными коэффициентами передаточной операторной функции цепи, получить расчетные соотношения для параметров временных характеристик, что позволит в дальнейшем найти аналитические выражения как для $h(t)$, так и для $g(t)$.

Подобная задача для линейной электрической цепи n -го порядка рассматривалась в работе [4]. Однако, во-первых, в [4] исследовалась связь положения нулей и полюсов операторной функции с параметрами только переходной характеристики, во-вторых, процедура определения этих параметров по общей методике [4] для частного случая цепей первого и второго порядка весьма громоздка.

В данной статье решение указанной задачи приведено для цепей первого и второго порядков с различными частотными характеристиками. Вместе с тем рассматриваемый подход может быть использован и для электрических цепей n -го порядка.

2 Определение начальных значений временных характеристик цепи

Для нахождения начальных значений переходной характеристики электрической цепи $h(t)$ воспользуемся связью предельных значений оригиналов и изображений [1,2]:

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0), \quad (1)$$

что приводит к соотношениям

$$\lim_{p \rightarrow 0} T(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t); \quad \lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = h(0). \quad (2)$$

Операторные передаточные функции электрических цепей с конечным числом сосредоточенных элементов представляют собой дробные рациональные функции комплексной переменной p [2]. Общий случай передаточной функции для звена первого порядка

$$T(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0}, \quad \text{согласно (2),} \quad h(0) = \frac{a_1}{b_1};$$

для звена второго порядка

$$T(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \quad \text{тогда} \quad h(0) = \frac{a_2}{b_2}.$$

В частных случаях нулевые значения некоторых коэффициентов числителя $T(p)$ позволяют получить передаточные функции, соответствующие электрическим цепям с различными частотными характеристиками. Для фильтра нижних частот первого порядка (ФНЧ-1) $a_1 = 0$, второго порядка (ФНЧ-2) $a_2 = a_1 = 0$, следовательно, для ФНЧ $h(0) = 0$. Для фильтра верхних частот первого порядка (ФВЧ-1) $a_0 = 0$, значит $h(0) = a_1/b_1$, а для второго порядка (ФВЧ-2) $a_1 = a_0 = 0$, следовательно, $h(0) = a_2/b_2$. Звеньями второго порядка реализуется также полосовой фильтр (ПФ) и режекторный фильтр (РФ). Для ПФ $a_2 = a_0 = 0$, тогда $h(0) = 0$, для РФ $a_1 = 0$, следовательно, $h(0) = a_2/b_2$.

Кроме начального значения $h(0)$ в ряде случаев необходимо найти начальные значения производной $h'(0)$:

1) для звеньев первого порядка $h'(0)$ совпадает с начальными значениями импульсной характеристики $g(0)$ и может быть использовано для непосредственного определения $g(t)$ по формуле:

$$g(t) = Ae^{pt} + h(0)\delta(t), \quad (3)$$

где $A = g(0) = h'(0)$ – постоянная интегрирования; $\delta(t)$ – дельта-функция.

2) для звеньев второго порядка $h'(0)$ необходимо для определения аналитического выражения импульсной характеристики.

Воспользуемся известным соотношением, отражающим свойства преобразования Лапласа [2]:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0) \quad \text{или}$$

$$h'(t) \div T(p) - h(0).$$

Тогда, используя (2), имеем

$$h'(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p[T(p) - h(0)].$$

Нетрудно убедиться в том, что для ФНЧ-1 $h'(0) = \bar{a}_0/b_1$, а для ФНЧ-2 $h'(0) = 0$, для ПФ $h'(0) = a_1/b_2$. Для ФВЧ-1 $h'(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \left(\frac{a_1 p}{b_1 p + b_0} - \frac{a_1}{b_1} \right) = -\frac{a_1 b_0}{b_1^2}$, аналогично для ФВЧ-2 и для РФ

$$h'(0) = -\frac{a_2 b_1}{b_2^2}.$$

Таким образом, если известны коэффициенты операторной функции $T(p)$, можно непосредственно рассчитать начальные значения $h(0)$ и $h'(0)$, что позволит в дальнейшем определить окончательное выражение функции $h(t)$.

В ряде случаев для определения отклика цепи на сложное воздействие удобнее использовать не переходную $h(t)$, а импульсную характеристику цепи $g(t)$. Традиционно для определения $g(t)$ используют соотношения [2]:

$$g(t) = h'(t) + h(0)\delta(t) \quad \text{или} \quad g(t) \div T(p),$$

что связано с необходимостью вычисления $h(t)$, либо предварительного преобразования $T(p)$. Для непосредственного нахождения $g(t)$ необходимо рассчитать начальные значения $g(0)$ и $g'(0)$. Тогда предварительный расчет $h(t)$ не нужен.

Начальные значения $g(0)$ совпадают с $h'(0)$ и рассмотрены выше. Этим значений достаточно для определения $g(t)$ цепи первого порядка по (3). Для нахождения $g(t)$ цепи второго порядка, кроме значений $g(0)=h'(0)$, следует дополнительно определить значение $g'(0)=h''(0)$. Воспользуемся формулой для изображения производной второго порядка [2]:

$$f''(t) \div p[pF(p) - f(0)] - f'(0), \text{ или } h''(t) \div p[T(p) - h(0)] - h'(0).$$

Подставив значение $h''(t)$ в (1), получим

$$h''(0) = g'(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\{p[T(p) - h(0)] - g(0)\}. \quad (4)$$

Используя значения $h(0)$, $h'(0)$ и проводя предельный переход согласно (4), вычислим начальные значения $g'(0)$ для звеньев второго порядка:

$$\text{для ФНЧ} \quad g'(0) = \frac{a_0}{b_2}; \quad \text{для ФВЧ} \quad g'(0) = \frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 - \frac{b_0}{b_2} \right];$$

$$\text{для ПФ} \quad g'(0) = -\frac{a_1 b_1}{b_2^2}; \quad \text{для РФ} \quad g'(0) = \frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 - \frac{b_0}{b_2} \right] + \frac{a_0}{b_2}.$$

Полученные соотношения для $g'(0)$ и $h'(0)$ справедливы как в случае вещественных, так и комплексно-сопряженных корней $p_{1,2}$ операторной функции $T(p)$. Если $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}$, где $\delta = b_1 / 2b_2$; $\omega_0^2 = b_0 / b_2$, $\omega_{св}^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, то часть выражений для начальных значений упростится:

$$\text{для ФВЧ (РФ)} \quad h'(0) = -2\delta \frac{a_2}{b_2}; \quad \text{для ПФ} \quad g'(0) = -2\delta \frac{a_1}{b_2}.$$

Установим связь начальных значений временных характеристик с характерными точками амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) цепи. Как известно [2], комплексная передаточная функция электрической цепи $T(j\omega)$ определяется по операторной функции $T(p)$ заменой $p = j\omega$. Найдем частоту минимума знаменателя функции $|T(j\omega)|^2$ ω_{\max} , которая соответствует частоте возможного максимума АЧХ звена второго порядка.

Решение уравнения

$$\frac{d}{d\omega} \left[(b_0 - b_2 \omega^2)^2 + (b_1 \omega^2) \right] = 0$$

дает значение

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{b_0}{b_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2} = \sqrt{\omega_{св}^2 - \delta^2}.$$

Частоту ω_{\min} , при которой АЧХ РФ обращается в нуль, найдем, приравняв нулю числитель $|T(j\omega)|$:

$$-a_2\omega_{\min}^2 + a_0 = 0, \text{ откуда } \omega_{\min} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

С учетом введенных обозначений получаем:

для ФВЧ
$$g'(0) = \frac{a_2}{b_2} (4\delta^2 - \omega_0^2) = -\frac{a_2}{b_2} (\omega_{\max}^2 - 2\delta^2);$$

для РФ
$$g'(0) = \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{b_1^2 - b_2 b_0}{b_2^2} + \frac{a_0}{a_2} \right) = -\frac{a_2}{b_2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 - 2\delta^2).$$

Все полученные выше результаты расчета начальных значений временных характеристик приведены в таблице:

Тип Звена	$h(0)$	$h'(0) = g(0)$		$h''(0) = g'(0)$	
		p_1, p_2	$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}$	p_1, p_2	$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}$
ФНЧ-1	0	a_0 / b_1		-	
ФВЧ-1	a_1 / b_1	$-(a_1 b_0) / b_1^2$		-	
ФНЧ-2	0	0		a_0 / b_2	
ПФ	0	a_1 / b_2		$-(a_1 b_1) / b_2^2$	$-2\delta a_1 / b_2$
ФВЧ-2	$\frac{a_2}{b_2}$	$-\frac{a_2 b_1}{b_2^2}$	$-2\delta \frac{a_2}{b_2}$	$\frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 - \frac{b_0}{b_2} \right]$	$-\frac{a_2}{b_2} (\omega_{\max}^2 - 2\delta^2)$
РФ				$\frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 - \frac{b_0}{b_2} \right] + \frac{a_0}{b_2}$	$-\frac{a_2}{b_2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 - 2\delta^2)$

Выводы:

1. В работе получены расчетные соотношения для начальных значений временных характеристик и их производных для звеньев первого и второго порядка на основе связи этих характеристик с вещественными коэффициентами операторной функции цепи.

2. Установлена связь начальных значений временных характеристик с характерными точками АЧХ цепи.

3. Показано, что в случае использования импульсной характеристики не обязательно предварительно определять переходную характеристику.

Список литературы: 1. Атабеков Г.И. Линейные электрические цепи. М.: Энергия, 1978. 592 с. 2. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. М.: Радио и связь, 1986. 544 с. 3. Айзинов М.М. Избранные вопросы теории сигналов и теории цепей. М.: Связь, 1971. 349 с. 4. Айзинов М.М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. Л.: Энергия, 1968. 376 с. 5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1983. 536 с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 2.09.99