

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет \_\_\_\_\_ Комп'ютерних наук \_\_\_\_\_  
(повна назва)

Кафедра \_\_\_\_\_ Програмної інженерії \_\_\_\_\_  
(повна назва)

## **АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА**

### **Пояснювальна записка**

рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Дослідження алгоритмів стабілізації та прицілювання при стрільбі з танка,  
балістики траєкторії стрільби на симуляторі віртуальної реальності  
(тема)

Виконав: студент 2 курсу, групи ПЗм-18-3 \_\_\_\_\_  
Артюхов О.Д. \_\_\_\_\_  
(прізвище, ініціали)

спеціальності 121 – Інженерія програмного забезпечення  
(код і повна назва спеціальності)

\_\_\_\_\_ Освітньо-наукова програми \_\_\_\_\_  
(тип програми)

\_\_\_\_\_ Інженерія програмного забезпечення \_\_\_\_\_  
(повна назва освітньої програми)

Керівник \_\_\_\_\_ доц. Назаров О.С. \_\_\_\_\_  
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри, проф. \_\_\_\_\_

З.В.Дудар

2020 р.

# ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Факультет Комп'ютерних наук

Кафедра Програмної інженерії

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 121 – Інженерія програмного забезпечення  
(код і повна назва)

Тип програми освітньо-наукова програма

Освітня програма Інженерія програмного забезпечення

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

## ЗАВДАННЯ

### НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Артюхову Олексію Дмитровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Дослідження алгоритмів стабілізації та прицілювання при стрільбі з танка, балістики траєкторії стрільби на симуляторі віртуальної реальності

затверджена наказом університету від “\_\_” \_\_\_\_\_ 20\_\_ р. № \_\_\_\_\_

заповнюється вручну після отримання наказу

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії

10 травня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи: ігровий додаток під віртуальну реальність, Алгоритм пошуку траєкторії снаряду.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі аналіз предметної області, дослідження сил впливають на тіло під час його, постановка задачі, визначення критеріїв, надання оцінки актуальності роботи, висновки.

## 5. Консультанти розділів роботи

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи (проекту)	Термін виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
1.	Аналіз предметної галузі	25 січня 2020	виконано
2.	Огляд існуючих методів та моделей	17 лютого 2020	виконано
3.	Експериментальне дослідження ефективності існуючих моделей	7 квітня 2020	виконано
4.	Підготовка пояснювальної записки	15 квітня 2020	виконано
5.	Підготовка презентації та доповіді	1 травня 2020	виконано
6.	Попередній захист	8 травня 2020	виконано
7.	Нормоконтроль, рецензування	7 травня 2020	виконано
8.	Занесення диплома в електронний архів	9 травня 2020	виконано
9.	Допуск до захисту у зав. кафедри	10 травня 2020	виконано

Дата видачі завдання: « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 р.

Студент \_\_\_\_\_ Артюхов О.Д.  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Назаров О.С.

## РЕФЕРАТ / ABSTRACT

Пояснювальна записка до атестаційної магістерської роботи містить: 61 с., 25 рис., 18 джер.

Об'єкт – симулятор танку у ролі навідника у віртуальній реальності.

Мета роботи – дослідженні методу балістики траєкторії снаряду. Розробка програмного забезпечення для тренування навідників.

В результаті роботи проведений аналіз предметної галузі, досліджені основні методи, алгоритм балістики, та сформовані вимоги до програмного забезпечення.

VR, UNREAL ENGINE 4, BLUEPRINTS, БАЛІСТИКА, НАВЧАННЯ, СИМУЛЯТОР, ФПС, КОЛІЗІЯ, МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ, РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА, КУТИ ЕЙЛЕРА, ДЕКАРТОВА СИСТЕМА, ЩІЛЬНІСТЬ СЕРЕДОВИЩА, ТЕОРЕМА ШАЛЯ, ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЕФЕКТ МАГНУСА, ДЕРИВАЦІЯ.

The explanatory note to the attestation master's degree contains 61 pages, 25 figures, 18 sources.

Object of study- Tank simulator as a gunner in virtual reality.

The purpose of the work is to study the method of ballistics of the projectile trajectory. Development of software for training gunners.

As a result of the work the analysis of the subject area is carried out, the basic methods, algorithm of ballistics are investigated, and requirements to the software are formed.

VR, UNREAL ENGINE 4, BLUEPRINTS, BALLISTICS, TRAINING, SIMULATOR, FPS, COLLISION, MOMENT OF INERTIA, EULER'S EQUATIONS, EULER'S ANGLES, CARTESIAN SYSTEM, MEDIUM DENSITY, SHAWL THEOREM, REYNOLDS NUMBER, DIFFERENTIALS, LEVEL EQUATIONS.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 АНАЛІЗ ПРОБЛЕМНОЇ ГАЛУЗІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ .....	9
1.1 Аналіз проблемної галузі .....	9
1.2 Використання віртуальної реальності у військових цілях.....	12
1.3 Виявлення проблем та актуалізація рішень .....	14
1.4 Постановка задачі .....	20
2 ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ БАЛІСТИКИ ЗНАРЯДУ .....	21
2.1 Постановка класичної завдання.....	21
2.2 Визначення області недосяжності при пострілі.....	23
2.3 Рух снаряду кінцевих розмірів з урахуванням обертання .....	25
2.3.1 Динаміка твердого тіла .....	25
2.3.2 Моменти інерції.....	27
2.3.3 Момент імпульсу твердого тіла. Момент сил .....	28
2.3.4 Рівняння Ейлера.....	29
2.3.5 Кути Ейлера .....	30
2.3.6 Обчислення центру інерції і моментів інерції снаряда .....	33
2.3.7 Обертання навколо нерухомої осі .....	37
2.4 Рух снаряду з урахуванням опору середовища.....	38
2.4.1 Лінійної залежності від швидкості .....	42
2.4.2 Квадратична залежність від швидкості.....	44
2.4.3 Врахування залежності від модуля швидкості.....	46
2.4.4 Зовнішні впливи на снаряд.....	47
2.5 Алгоритм наводки гармати .....	48
3 ФОРМУВАННЯ ВИМОГ ДО ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ.....	50
3.1 Загальні відомості .....	50
3.2 Unique Selling Points.....	51
3.3 Опис gameplay .....	51
3.4 Властивості механіки.....	52
3.5 Мінімальні технічні вимоги .....	52
4 ВИКОРИСТАННЯ ДОСЛІДЖЕНИХ МЕТОДІВ.....	53
ВИСНОВКИ .....	58
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	60
ДОДАТОК А СЛАЙДИ ПРЕЗЕНТАЦІЇ .....	62
ДОДАТОК Б КОД ІГРОВОГО ДОДАТКУ.....	72

## ВСТУП

Балістика це наука яка вивчає метання снаряда (кулі) з ствольної зброї. Балістику ділять на внутрішню, яка вивчає явища відбуваються в стовбурі в момент пострілу, і зовнішню, яка пояснює поведінку кулі після вильоту зі ствола. Знання зовнішньої балістики дозволяє ще до пострілу з достатньою для практичного застосування точністю знати, куди потрапить куля. На точність пострілу впливає маса взаємопов'язаних факторів:

- форма і геометрія снаряда;
- опору середовища;
- обертання снаряда;
- інші фізичні параметри, такі як вологість, тиск, або вплив вітру, турбулентність тощо.

Необхідно мати на увазі, що після вильоту зі ствола куля летить не по прямій, а по так званій балістичної траєкторії, близькій до параболи. Іноді на малих дистанціях стрільби відхиленням траєкторії від прямолінійної можна знехтувати, однак на великих і граничних дистанціях стрільби знання законів балістики абсолютно необхідно. Зауважимо, що пневматична зброя зазвичай надає легкої пулі невелику або середню швидкість (від 100 до 380 м / с), тому викривлення траєкторії польоту кулі від різних впливів значніше, ніж для вогнепальної зброї.

Потужні пневматичні гвинтівки можуть надати кулі початкову швидкість вище звуковий (до 360-380 м / с). Швидкість звуку в повітрі не постійна (залежить від атмосферних умов, висоти над рівнем моря тощо), але її можна прийняти рівній 330-335 м / с. Легкі кулі для пневматики з малої поперечної навантаженням відчувають сильні обурення і відхиляються від своєї траєкторії, долаючи звуковий бар'єр. Тому доцільно стріляти більш важкими кулями з початковою швидкістю наближається до швидкості звуку. На кулю, яка вилетіла із ствола з певною швидкістю, в польоті діють дві основні сили: сила тяжіння і сила опору

повітря. Дія сили тяжіння направлено вниз, воно змушує кулю безперервно знижуватися. Дія сили опору повітря направлено назустріч руху кулі, воно змушує кулю безперервно знижувати швидкість польоту. Все це призводить до відхилення траєкторії вниз. Нормальними метеоумовами вважаються: температура повітря - плюс 15 ° С, вологість - 50%, тиск - 750 мм ртутного стовпа. Перевищення температури повітря над нормальною призводить до підвищення траєкторії на тій же дистанції, а зниження температури - до зниження траєкторії. підвищена вологість призводить до зниження траєкторії, а знижена - до підвищення траєкторії. Зауважимо, що атмосферний тиск змінюється не тільки від погоди, але і від висоти над рівнем моря - чим вище тиск, тим нижче траєкторія.

Технологія Віртуальної реальності виникла в 1960-х роках на перетині досліджень тривимірної комп'ютерної графіки та людино-машинної взаємодії. Метою розробників VR було створити максимально природний інтерфейс, усунувши «розрив» між людиною та комп'ютером. VR спрямована на моделювання сенсорних даних, що формують досвід "як би реальний".

На даний момент VR в галузі освіти використовується в основному як різноманітні тренажери, а також для демонстрації процесів, явищ та предметів, щоб показати, що насправді неможливо чи надзвичайно важко. Це можуть бути глибини океану або простори космосу, внутрішній світ людини або поверхня іншої планети, структура молекул хімікатів тощо. Віртуальні моделі дозволяють набити руку початківцям медикам-хірургам, спостерігати за наслідками запланованих дій. Також віртуальна реальність дозволяє програмувати роботу спеціальних роботів і домагатися максимальної точності при проведенні відповідальних маніпуляцій.

VR - одне із значних досягнень науки і техніки, з появою якого пов'язана зміна в багатьох сферах людської діяльності, в масовій свідомості. VR змушує переосмислити проблему співвідношення символу та образу, зокрема сенсорного та абстрактно-пізнавального, переосмислити роль уяви та фантазії. VR формує нові тілесні практики та нову "культурну розмітку" людського тіла. VR можна

розглядати як нову техніку представлення, яка найближчим часом значно визначить наш естетичний досвід. VR стає середовищем спілкування та соціалізації сучасників. Навіть сьогодні VR впливає на горизонт нашого щоденного досвіду та, відповідно, поведінки в реальному світі. VR - це технологія побудови штучних світів, яка може конкурувати по достовірності з реальним світом. Ціна VR зменшується з кожним роком, що в свою чергу збільшує ринок програмного забезпечення. Крім того, ця технологія все більше вдосконалюється, що приваблює зростаючу аудиторію.

У військовій сфері також використовують віртуальну реальність для військової підготовки кандидатів, курсантів і т.д. Створення штучних(віртуальних) полігонів, які зможуть детально передати бойові ситуації без загрози життєдіяльності військовослужбовців та мінімізації розходів. Відтворення цих тренувань Аналогічне і в космічній сфері - для підготовки астронавтів до польотів (регулярно практикує NASA). У сфері мистецтва останнім часом також використовують пристрої для створення віртуальної реальності в музеях, виставкових залах, мультимедійних виставок.

Головна мета створення даної віртуальної системи - це підвищення рівня вогневої підготовки, навчання військовослужбовців навичкам стрільби з танку без витрачання боєприпасів, а також забезпечення максимальної безпеки в умовах наближених до реальних. Реалізація проекту дозволить солдату тренуватися в широкому спектрі і ворожих сценаріїв, які нелегко відтворити на полігоні.

# 1 АНАЛІЗ ПРОБЛЕМНОЇ ГАЛУЗІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

## 1.1 Аналіз проблемної галузі

Сучасна технологія віртуальної реальності почалася зі спроби поєднати візуальне сприйняття зі сприйняттям руху і звуку. Це був льотний тренажер, в вихідній моделі якого використовувалися рухома картинка і пневматичні передачі, подібні органним трубах. Важільний тренажер марки "Лінк Трейнер", запатентований в 1929 році, змушував моделює пристрій рухатися, обертатися, падати, змінювати курс і таким чином створював задовільний відчуття руху

У 1972 році Мирон Крюгер ввел термін "штучна реальність" для визначення тих результатів, які можуть бути отримані за допомогою системи відеоналоження зображення об'єкта (людини) на генерується комп'ютером картинку і за допомогою інших розроблених на той час засобів. Основні ідеї були згодом опубліковані в книзі "Artificial Reality" (1983 р). З розвитком науки віртуальної реальності НАСА, Міністерство оборони і Національний науковий фонд почали фінансувати велику частину наукових досліджень в даній області. ЦРУ пожертвував 80 000 \$ в дослідження Сатерланда. Перші досягнення в цій галузі науки використовували головним чином з метою навчання пілотів. За останні 10 років світ віртуальної реальності зазнав значні поліпшення, головним чином в результаті послідувала за цим технологічної битви - Amazon, Apple, Facebook, Google, Microsoft, Sony і Samsung створили підрозділи VR і AR.

Згідно з останнім прогнозом, попит на такі пристрої виросте в 16 разів з 2018 по 2022 рік (див. рис. 1.1). Незважаючи на ажіотаж з приводу автономних пристроїв, важливу роль повинні грати залежні від ПК і смартфонів пристрої, такі як Sony PlayStation VR, HTC Vive або Oculus Rift, для роботи яких необхідне додаткове обчислювальної обладнання або ігрова консоль. Вони залишаться важливою частиною ринку, особливо коли стануть безпроводними.



Рисунок 1.1 – Ринок пристроїв VR

Недавній успіх Half-Life: Alyx від компанії Valve виростив інтерес до даної технології.

Звичний спосіб викладання можна зробити ще більш ефективним, якщо доповнити навчальний процес технологією віртуальної реальності. Віртуальна реальність – це штучне тривимірне середовище, зануритися в яке можливо за допомогою спеціальних пристроїв. Грамотне використання віртуальної реальності допоможе розвинути природні задатки і таланти у дітей, а також більш ефективно засвоювати навчальний матеріал. Найбільш очевидною перевагою використання VR в освіті (для будь-якої іншої сфери це також вірно) є просунутий спосіб візуалізації. Віртуальна реальність стала універсальним інструментом для відображення об'єктів, процесів, локацій і історичних подій. Оскільки візуалізація допомагає зрозуміти і запам'ятати, учні можуть отримати ще більш захоплюючі враження від тренувальних симуляцій. Доведено, що VR підходить для будь-якого шкільного або університетського предмета або програми. Віртуальна реальність (VR) може імітувати не тільки віртуальне сприйняття (зазвичай це робиться в тренажері), але і пряму взаємодію з

імітаційною моделлю. Таким чином, сенсорний зворотний зв'язок, що зазвичай надається на макеті робочого обладнання (пристроїв, елементів управління, робочих панелей), може імітувати систему VR, щоб створити відчуття, повністю занурене в робоче середовище.

Шолом віртуальної реальності для комп'ютера допоможе у вивченні структури атома, дасть наочне розуміння процесу хімічних реакцій, дозволить провести віртуальну екскурсію по різних містах і країнах. Окуляри віртуальної реальності з джойстиком допоможуть управляти зображенням і активно брати участь в навчальному процесі. Використання технології віртуальної реальності в освіті дає наступні переваги:

- безпека - учень повністю занурюється в освітній процес, знаходиться в центрі подій, при цьому відсутня будь-яка загроза здоров'ю і життю;

- максимальне занурення - за допомогою джойстика і спеціальних контролерів можна не тільки спостерігати, а й переміщатися в віртуальній реальності, управляти різними процесами, що дає нові можливості для практичного навчання в таких сферах як аерокосмічна галузь і медицина;

- фокусування - учень повністю зосереджений на освітньому процесі. Це дуже важливо для вивчення різних фізичних, хімічних і біологічних явищ: будови атома, процесу передачі електричного струму за допомогою електронів;

- наочність - завдяки тривимірній графіці можна детально показати найрізноманітніші процеси. Учні отримують не тільки відомості про явище, але і бачать його з максимальним ступенем деталізації. Це дуже важливо для кращого засвоєння інформації на уроках біології, фізики та анатомії;

Важливим аспектом такої системи є те, що вона може імітувати абсолютно незнайомі середовища та несподівані перешкоди та події. Такі симулятори призначені для імітації управління транспортними засобами та обладнанням, емуляції навколишнього середовища навколо конкретних процесів та їх взаємодії з ними.

## 1.2 Використання віртуальної реальності у військових цілях

Віртуальна реальність була прийнята військовими в себе трьома службами (армія, флот і військово-повітряні сили) - де вона використовується в навчальних цілях. Це особливо корисно для підготовки солдатів до бойових ситуацій або іншим шкідливим впливам, де вони повинні навчитися реагувати відповідним чином.

Одним з найбільш ранніх застосувань тренажерів у військовому середовищі були льотні тренажери, створені компанією Link в кінці 1920-х і 1930-х років. Ці тренажери були схожі на обрізані труни, встановлені на постаменті, і використовувалися для навчання польоту на приладах. Темрява всередині кабіни тренера, реалістичні свідчення на приладовій панелі і рух тренажера на п'єдесталі об'єдналися, щоб створити відчуття, схоже на фактичний політ на інструментах вночі. Тренери Link були дуже ефективними інструментами для їх призначення, навчаючи тисячі пілотів навичкам нічних польотів, в яких вони потребували до і під час Другої світової війни.

Військове використання віртуальної реальності для:

- симуляторів польоту;
- бойові симулятори моделювання битви на полі бою;
- симулятори для медиків на полі бою;
- моделювання транспортних засобів;
- віртуальний навчальний табір;

Симулятор польоту є найбільш впізнаваним прикладом. Вони використовуються для навчання пілотів у всіх галузях і з великим успіхом. Вони використовуються для навчання льотних навичок, способів боротьби з надзвичайними ситуаціями та зв'язку з наземним управлінням.

Бойовий симулятор приймає форму тривимірної середовища, в якій новобранці пересуваються і взаємодіють. Вони носять окуляри віртуальної реальності або дисплеї на голові (HMD) в комплекті з системою стеження. Це

показує серію зображень у віртуальному середовищі, які рухаються, коли новобранець рухає головою. Це дає відчуття глибини і додає реалізму. Мета полягає в тому, щоб навчити групу новобранців важливості спільної роботи як єдиного цілого; підкоряючись наказам і слідуючи інструкціям. Їм дають цілі для стрільби, які вони роблять так з фальшивої зброї або «VR-гармат», які виглядають і поводяться як справжню зброю. Це ідеальний метод навчання новобранців навичкам і прийомам, необхідним для того, щоб бути ефективним членом їх взводу. Плюс вони можуть використовувати це, щоб вчитися у більш досвідчених членів команди. Прикладом великомасштабного моделювання віртуальної реальності є те, що використовується британськими військами, розташованими в Німеччині. Ця симуляція використовує ігрові технології як засіб навчання солдатів тактиці, поводження зі зброєю і командуванню під час операцій в Афганістані.

Найчастіше військові медики змушені працювати в стресовій і небезпечній обстановці, піддаючи ризику своє життя. До епохи VR практично неможливо було навчати медичний персонал в умовах війни. Але тепер ви можете відтворити сценарії ближнього бою в віртуальній реальності, щоб імітувати рятувальні операції. Спираючись на звуки гвинтокрила і пострілів, ця установка віртуальної реальності дозволяє медичним працівникам практикувати різні навички в дуже стресових умовах.

Почали з'являтися цілі бази та навчальні центри, оснащені VR. Вони вживають усілякі пристрої і програмне забезпечення для віртуальної реальності, включаючи системи CAVE, трекери руху і реальне обладнання, таке як жилети і пістолети. Створення такого об'єкта не дешево, але виявляється економічно ефективним, оскільки солдати можуть швидко змінити свій тип навчання в відносно невеликій області. Проте, найкращим варіантом було б об'єднати віртуальну реальність з реальними навчальних курсів. Ніхто в армії НЕ вважає віртуальну реальність абсолютної заміною. Так, це відмінний інструмент, Який в поєднанні з традиційними методами навчання може допомогти військовим збільшити швидкість навчання і гнучкість своїх солдатів.

Віртуальна реальність також використовується для лікування посттравматичного стресового розладу. Через різних травмуючих переживань у людини можуть виникнути тривожні думки і регулярні сни про цю подію, які можуть навіть призвести до само ушкодження або суїцидальних намірів. Солдати, які страждають від травм на поле бою і інших психологічних станів, можуть навчитися справлятися зі своїми симптомами в «безпечній» обстановці. Ідея полягає в тому, щоб вони піддавалися впливу тригерів для свого стану, до якого вони поступово пристосовуються. Це призводить до зменшення їх симптомів і дозволяє їм справлятися з новими або несподіваними ситуаціями.

### 1.3 Виявлення проблем та актуалізація рішень

Основна і головна задача це розрахувати траєкторію польоту снаряду з урахуванням більшості факторів, що впливають на нього.

Щоб влучити снарядом точно в ціль нам необхідно надати строго певне положення у вертикальній і горизонтальній площинах. Якщо навести зняряддя так, щоб вісь каналу ствола була спрямована на ціль, то в ціль ми не влучимо, так як траєкторія польоту снаряда буде завжди проходити нижче напрямку осі каналу ствола, снаряд до цілі не долетить. це відбувається через те що після того коли снаряд вилетівши з каналу ствола під дією порохових газів, він рухається за інерцією і під час польоту в повітрі піддається дії двох сил: тяжіння і опору повітря (див. рис. 1.2).

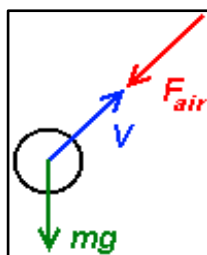


Рисунок 1.2 – Дії сил: тяжіння і опору повітря

Сила опору повітря пропорційна швидкості його польоту, але не прямо пропорційна. Крім зменшення дальності польоту снаряда і зміни форми траєкторії, сила опору повітря прагне перекинути снаряд, Щоб снаряд в польоті не перевертається, йому надають обертальний рух за допомогою нарізів в каналі ствола. Через це з'являється нове відхилення Деривація (див. рис. 1.3).

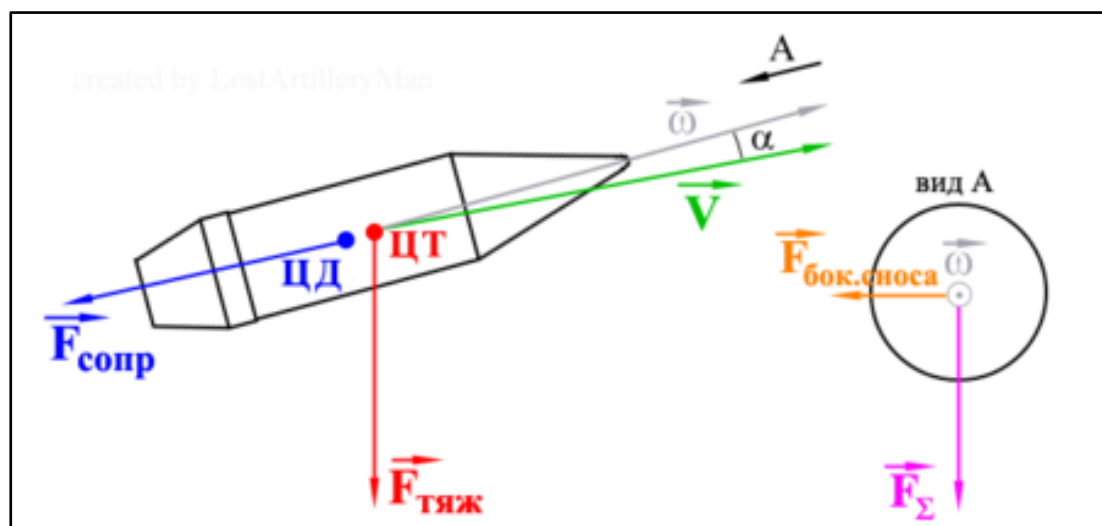


Рисунок 1.3 – Деривація

Це відхилення траєкторії снаряда під впливом обертання, надані нарізами ствола, похилими соплами або похилими стабілізаторами самого боєприпасу. Деривація зростає непропорційно дистанції стрільби. Зі збільшенням дистанції во відносно постійно зростає, внаслідок цього траєкторія снаряду представляє собою лінію з постійно зростаючою кривизною

Якщо з одного і того ж зняряддя, однаковим боєприпасам, при одному і тому ж напрямку ствола гармати, при однакових, на перший погляд, умовах зробити кілька пострілів, то снаряди не потраплять в одну точку, а полетять по різних траєкторіях, утворюючи пучок траєкторій (див. рис. 1.4).

Площа розсіювання має форму еліпса. Інтенсивність, з якою снаряди потрапляють в різні точки еліпса розсіювання, описується двовимірним Гауссовским (нормальним) законом розподілу. Звідси, якщо слідувати в точності законам теорії ймовірностей, можна зробити висновок, що еліпс розсіювання є

ідеалізацією. Відсоток попадань снарядів всередину еліпса описується правилом трьох сигма, а саме, ймовірність попадання снарядів в еліпс, величина осі якого дорівнює потроєному квадратному кореню з дисперсії відповідних одновимірних гауссовский законів розподілу дорівнює 0.9973.

В силу того, що кількість пострілів з одного зняряддя, особливо великого

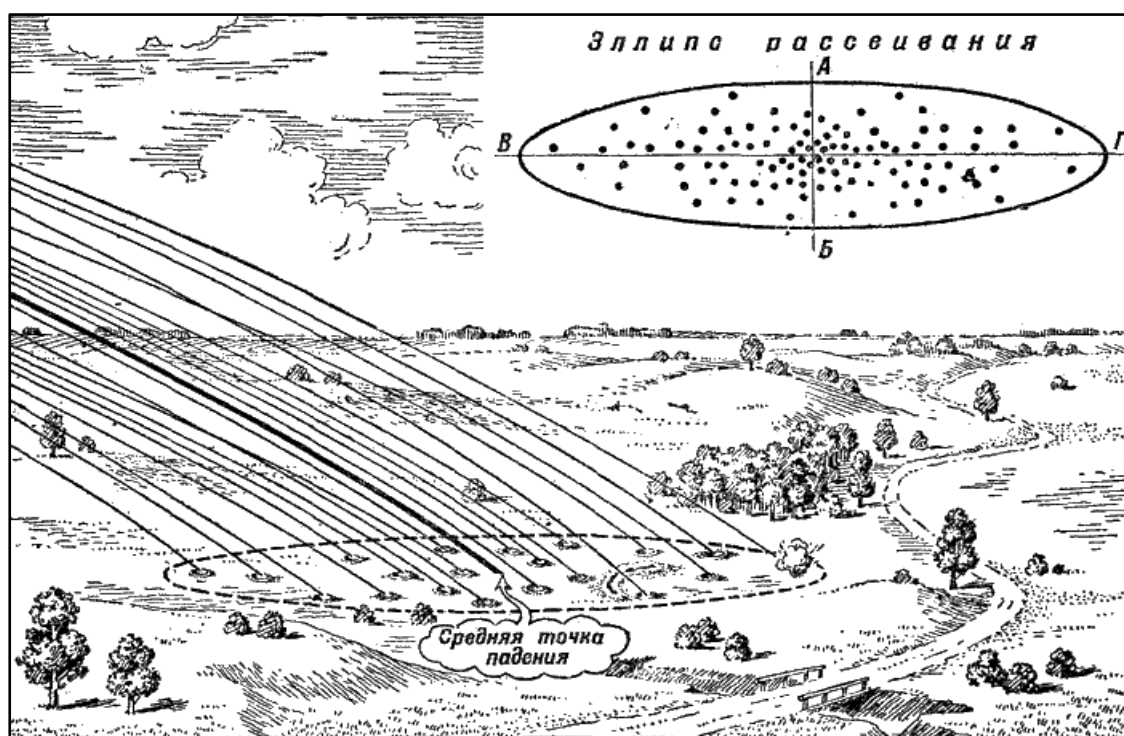


Рисунок 1.4 Розсіювання снарядів

калібру, як уже було зазначено вище, в силу зносу часто не перевищує і однієї тисячі, цієї неточністю можна знехтувати і вважати, що все снаряди потрапляють в еліпс розсіювання. Будь-яке перетин пучка траєкторій польоту снарядів також являє собою еліпс. Розсіювання снарядів по дальності завжди більше, ніж в бічному напрямку і по висоті. Величину серединних відхилень можна знайти в основній таблиці стрільби і по ній визначити розміри еліпса.

Для розрахунку траєкторії польоту нам необхідно знати:

— пряма лінія, що представляє продовження осі каналу ствола до пострілу, називається лінією пострілу;

- пряма лінія, що є продовженням осі стовбура при вильоті з нього кулі, називається лінією кидання;
  - початком траєкторії є точка вильоту;
  - Горизонтальна площина, що проходить через точку вильоту, називається горизонтом зброї;
  - щоб докинути снаряд до будь-якої точки на горизонті зброї, необхідно лінію кидання направити вище горизонту;
  - кут, складений лінією пострілу і горизонтом зброї, називається кутом піднесення;
  - кут, складений лінією кидання і горизонтом зброї, називається кутом кидання;
  - точка перетину траєкторії з горизонтом зброї називається точкою падіння. Відстань по горизонту від точки вильоту до точки падіння називається горизонтальною дальністю;
  - необхідно знайти кут піднесення для того щоб наша зброя могла коректувати траєкторію для подальшого пострілу та влучення в ціль;
  - найвища точка траєкторії над горизонтом зброї називається вершиною траєкторії;
  - відстань від горизонту зброї до вершини траєкторії - висотою траєкторії.
- (див. рис. 1.5).

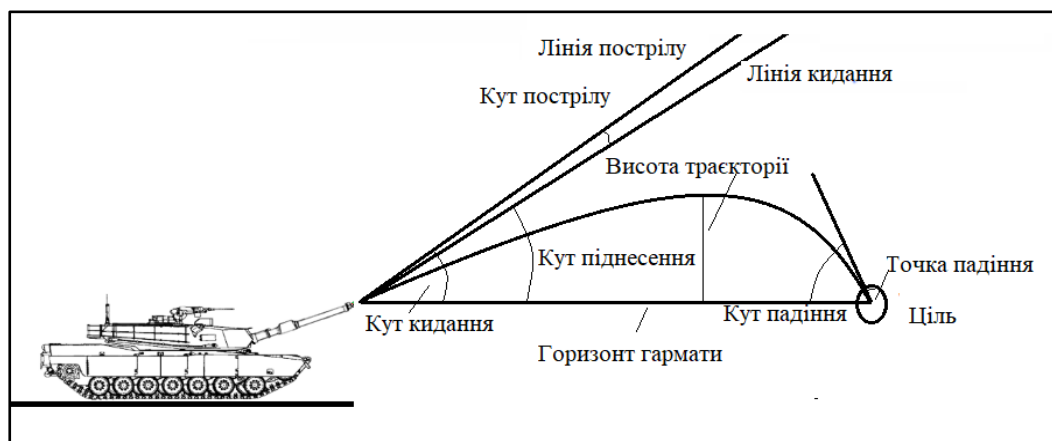


Рисунок 1.5 - Траєкторія польоту

Дальність стрільби із гармати залежить від кута піднесення і умов стрільби. Отже, щоб докинути снаряд до цілі, треба снаряду надати такий кут піднесення, при якому дальність стрільби буде відповідати відстані до цілі. В даному випадку нам не вистачає відстані до цілі. Нам потрібно знайти дистанцію від точки вильоту з наряду та точки пересічення лінії прицілювання та нашої цілі в трьохвимірному просторі (див. рис. 1.6).

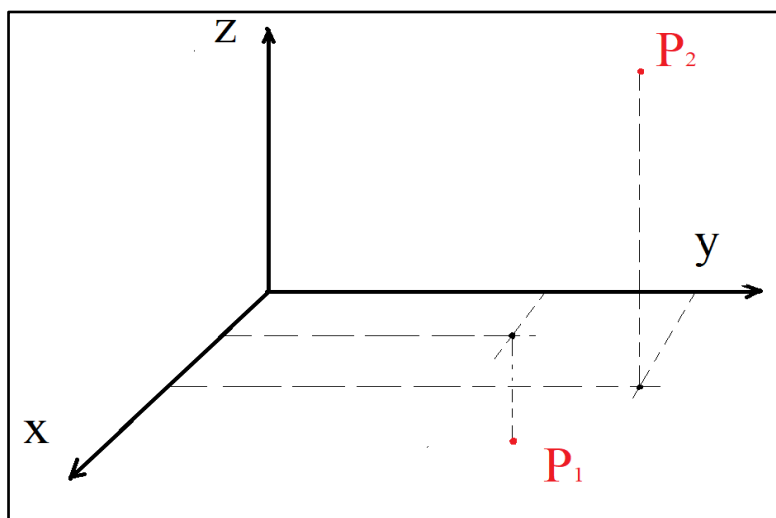


Рисунок 1.6 - Знаходження відстані між точками (частина 1)

Щоб вразити ціль розташовану вище висоти нашого танка. нам необхідно врахувати кут місця цілі, без цього всі наші постріли будуть не долітати до потрібного місця. Для цього потрібно провести лінію від гармати до цілі і взяти кут між нею і горизонтом гармати ( $\epsilon$ ) додавши до нього кут прицілювання ( $\alpha$ ) ми отримаємо коректний для даної ситуації кут піднесення ( $\phi$ ) (див. рис. 1.7).

Щоб уразити ціль розташовану нижче висоти нашого танка. нам необхідно врахувати те що кут місця цілі буде від'ємним, без цього всі наші постріли будуть пролітати через потрібне місце. Також як і раніше потрібно провести лінію від гармати до цілі і взяти кут між нею і горизонтом гармати ( $\epsilon$ ).

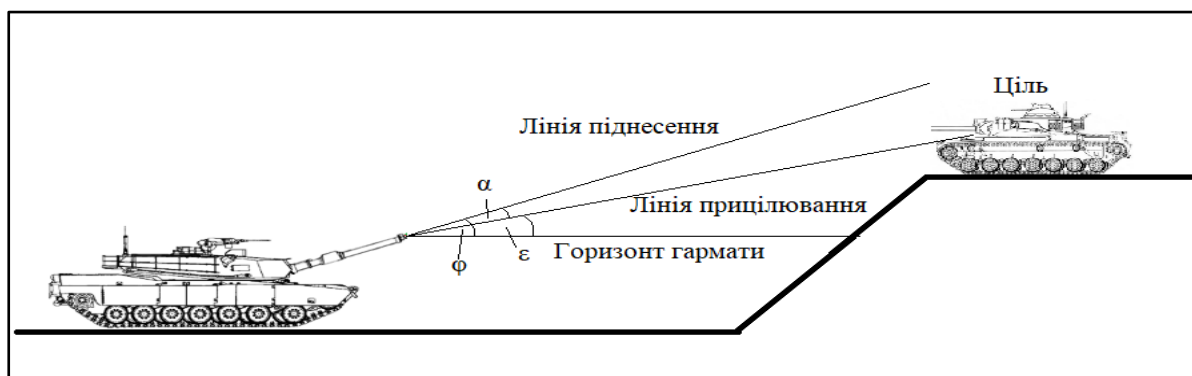


Рисунок 1.7 - Прицілювання по вище розміщеній цілі

В даному випадку нам потрібно додати до нього кут піднесення ( $\alpha$ ) ми отримаємо коректний для даної ситуації кут піднесення ( $\phi$ ) (див. рис. 1.8).

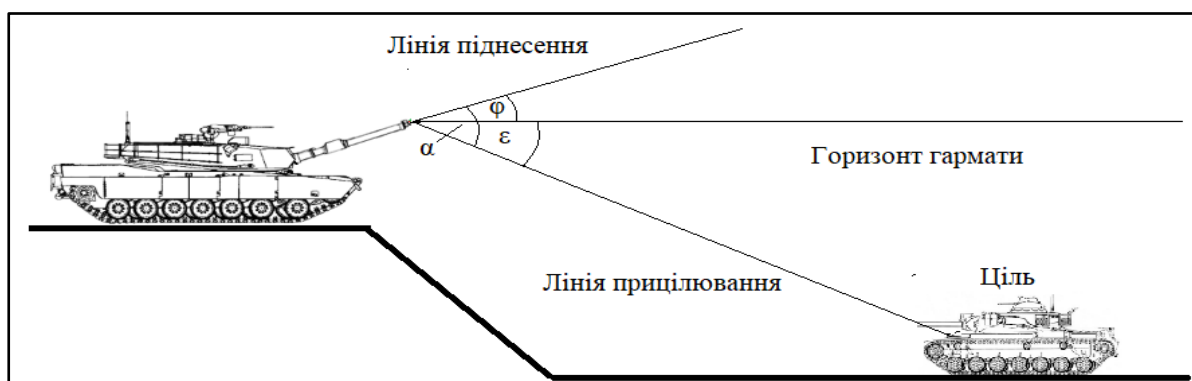


Рисунок 1.8 - Прицілювання по нижче розміщеній цілі

Ще одна з проблем яка псує занурення у віртуальну реальність так зване "ходіння крізь стіни". Це відбувається коли гравець проходить або заглядає крізь віртуальну стіну а також намагається просунути контролер (руку) крізь них. У традиційних «плоских» 3D іграх таку проблему вирішують дуже просто: цифровий персонаж зупиняється, і йому не дозволяють пройти через перешкоду. Використання класичного вирішення цієї проблеми призводить до того що видима картинка (VR) перестає відповідати тактильним (справжнім) рухам голови і тіла, і це викликає у користувача морську хворобу.

Для вирішення проблеми "ходіння крізь стіни" ми використовуємо різні підходи для контролерів і шолома:

— для шолома нам не потрібно категорично заборонити йому потрапляти в ці зони, але ми повинні його змушувати покинути їх добровільно [1]. Досить просто додати затемнення екрана при перетині колізії (від лат. Collisio - зіткнення) з шоломом гравця з колізіями предметів та середовища. нагадує ефект коли закриваєш очі руками. При такому підході у користувача загубиться інтерес залазити за стіни, а також він не побачить ігрові місця які не призначені для гравця Які зіпсують йому занурення;

— для контролерів досить класичного підходу. заборонити їм проходити через чужі колізії.

#### 1.4 Постановка задачі

Метою є дослідження алгоритмів балістики та прицілювання при стрільбі з танка, розробка програмного забезпечення та тестування під віртуальну реальність яке дозволить підготовлювати та покращити результати навічників які навчаються або несуть службу у збройних силах України. Проаналізував предметну область було вирішено використовувати HTC Vive та Oculus Rift як обладнання для віртуальної реальності.

У ході виконання роботи необхідно виконати наступні завдання:

- провести аналіз предметної області;
- виконати програмну реалізацію програмного забезпечення;
- провести тестування програмного забезпечення.

Для реалізація цього проекту був обраний ігровий двигун Unreal engine 4. Проект буде розроблений під Windows 10 з використанням скрипкової мови Blueprint та C++.

## 2 ДОСЛІДЖЕННІ МЕТОДУ БАЛІСТИКИ ЗНАРЯДУ

### 2.1 Постановка класичної завдання

Розглянемо кінематику руху тіла (матеріальної точки) в однорідному гравітаційному полі Землі (див. рис. 2.1). Тіло кидається початковою швидкістю  $v_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту. Так як на тіло діє тільки одна сила тяжіння  $mg$ , то буде мати місце плоский рух. Через вектори  $g$  і  $v_0$  побудуємо площину, в яку встановимо декартовій прямокутній систему координат  $xOy$  точку, з якої робиться постріл, вважають початком координат. Ось  $xO$  направимо по горизонту в бік пострілу, а вісь  $Oy$  - вертикально вгору. Рух в горизонтальному напрямку рівномірне з постійною швидкістю  $v_0 \cos \alpha$  тоді як рух у вертикальному напрямку - рівноприскорений з початковою швидкістю  $v_0 \sin \alpha$  і постійним прискоренням -  $g$ .

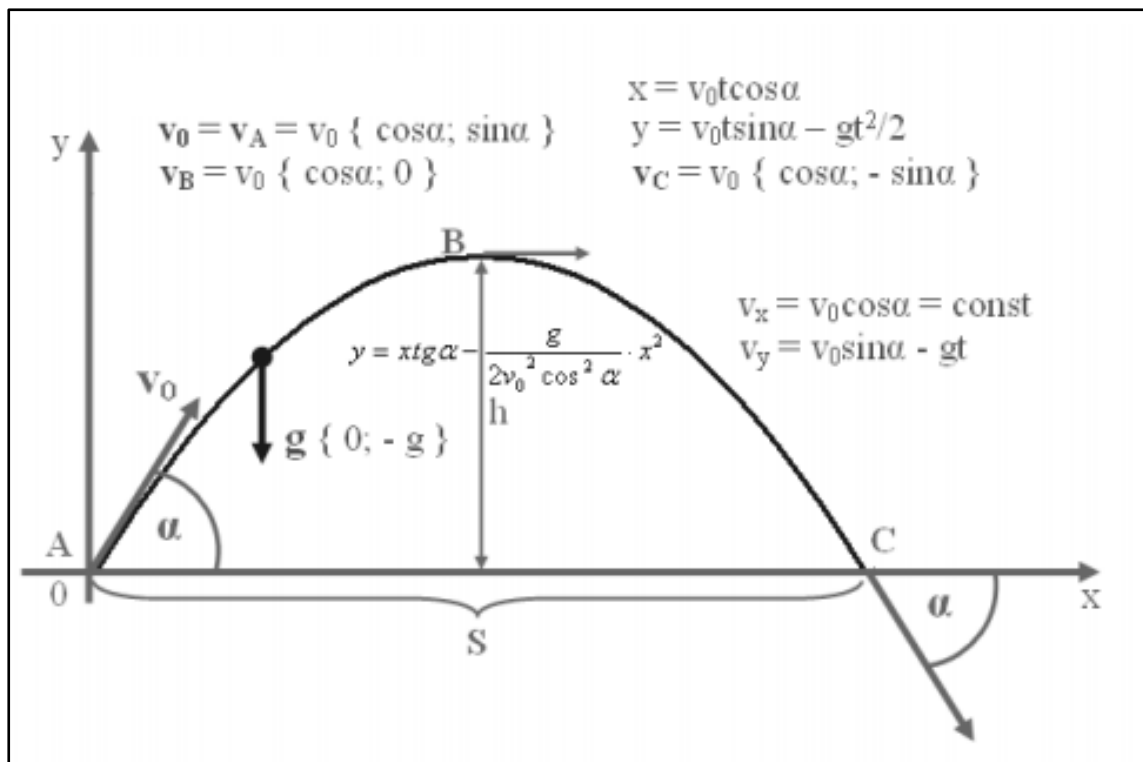


Рисунок 2.1 – Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Вводячи змінну часу  $t$ , напишемо відповідні рівняння руху:

$$x = v_0 \cos a \text{ і } y = v_0 \sin a - gt^2/2, \quad (2.1)$$

а також співвідношення для швидкостей:

$$v_x = v_0 \cos a = \text{const та } v_y = v_0 \sin a - gt. \quad (2.2)$$

Рух вгору триває до тих пір, поки  $v_y$  не прирівнюється нулю. Позначивши час підйому буквою  $\tau$  обчислимо його з рівняння  $v_y = 0$ :

$$\tau = \frac{v_0 \sin a}{g}. \quad (2.3)$$

Для отримання рівняння траєкторії  $y = y(x)$ , з рівняння (2.1а) обчислимо час  $t = \frac{x}{v_0 \cos a}$  та відставимо в рівняння (2.1б):

$$y = xtga - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 a} x^2, \quad (2.4)$$

так що траєкторія являє собою параболу. Обчислимо висоту польоту  $h$ :

$$h = y(\tau) = -\frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g}, \quad (2.5)$$

а також дальність польоту:

$$s = x(2\tau) = -\frac{v_0^2 \sin 2a}{g}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Визначення області недосяжності при пострілі

Для визначення області недосяжності при пострілі, тобто визначення в повітряному просторі такої поверхні, за межами якої снаряд з цієї зброї не може долетіти. У балістики і в теоретичної механіки ця область ще називається зоною (параболою) безпеки. Отриманих при різних значеннях кута польоту  $\alpha$ . У свою чергу обвідне сімейство ліній (сімейство ліній, безліч ліній, безперервно залежних від одного або декількох параметрів) на площині називається така лінія, яка в кожній своїй точці стосується однієї лінії цього сімейства. Що огинає деякого сімейства  $\Phi(x, y, \alpha) = 0$  та  $\frac{d\Phi}{d\alpha} = 0$ .

В нашому випадку  $\Phi(x, y, \alpha) = x * tga - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 a} * x^2 - y = 0$  та

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \frac{x}{\cos^2 a} - \frac{g * x^2}{v_0^2} * \frac{tga}{\cos^2 a} = 0 \Rightarrow x * tga = \frac{v_0^2}{g}. \quad (2.7)$$

Остаточню рівняння обвідної набуде вигляду:

$$y_{\text{обвід}} = \frac{H}{2} \left[ 1 - \frac{x^2}{H} \right]. \quad (2.8)$$

де  $H = \frac{v_0^2}{g}$  (Найбільша висота пострілу)

Огибаюча всіх парабол - траєкторії кидання тіл в площині являє собою параболу (2.8) гілками спрямованими вниз, вершиною в точці над гарматою на найвищій висоті при даній початковій швидкості і з розкидом на горизонтальному рівні. При модуляції Траєкторії руху матеріальної точки, отримані пострілом з однієї точки, в одній площині з постійною початкових швидкістю під різними кутами, а також огинає ці траєкторії то отримаємо (див. рис. 2.2).

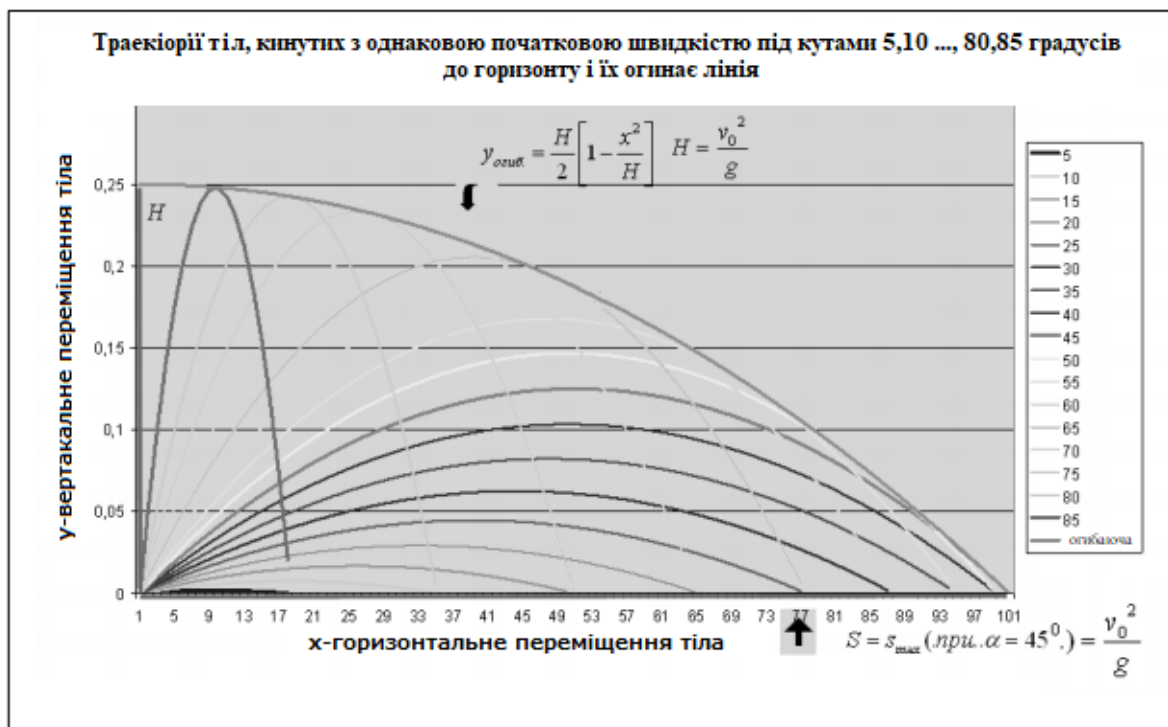


Рисунок 2.2 – Результати розрахунку траєкторій тіла, кинутого під кутом до горизонту

Отриманий математичний результат (2.8) можна отримати виходячи з чисто фізичних міркувань. Використовуючи співвідношення  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = tg^2 \alpha$  рівняння (2.4) представимо у вигляді квадратичного рівняння по відношенню до тангенсу кута кидання:

$$\frac{g * x^2}{2 * V_0^2} * tg^2 \alpha - x * tga + \frac{g * x^2}{2 * V_0^2} + y = 0. \quad (2.9)$$

Фізична реальність полягає в тому, що при фіксованих значеннях  $x$  і  $y$  визначають точку  $M(x;y)$  в зоні безпеки не існує дійсне значення кута  $\alpha$ , або, що те ж саме, не існує дійсного значення  $tga$  для рішення рівняння (2.9). Це в свою чергу значить, що дискримінант рівняння (2.9) приймає негативне значення:

$$D = x^2 - 4 \frac{gx^2}{2V_0^2} * \left( y + \frac{gx^2}{2V_0^2} \right) < 0 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \left( \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{V_0^2} * x^2 \right), \quad (2.10)$$

так як  $x^2 > 0$ .

Вирази (2.8) і (2.10) за змістом збігаються. Тепер якщо обернути параболу (2.8) навколо вертикальної осі  $Oy$ , то отримаємо шукану поверхню, що обмежує зону безпеки. В математиці ця називається параболоїдом обертання - це область недосяжності снарядів поза цією поверхні, коли проводяться постріли з постійною початковою швидкістю по всіляких напрямках. (див. рис. 2.3).

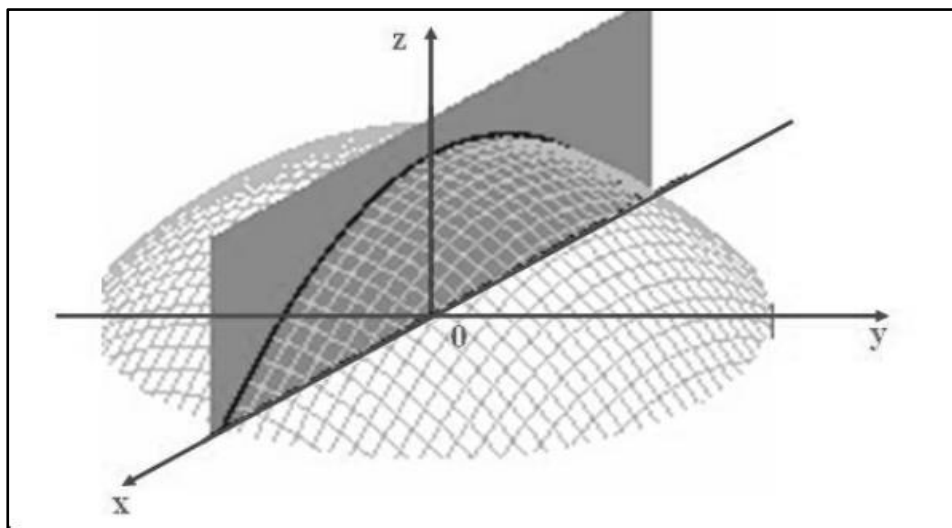


Рисунок 2.3 – Параболоїд обертання

## 2.3 Рух снаряду кінцевих розмірів з урахуванням обертання

### 2.3.1 Динаміка твердого тіла

Розглянемо рух снаряда, з огляду на його кінцеві розміри. Відомо, що тверде тіло, яким є снаряд, має шість ступенів свободи. Три з них відносяться до поступального руху центру інерції тіла в просторі. Решта три ступені свободи - обертальні (щодо цього центру інерції). Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії руху всієї маси тіла, зосередженої в центрі інерції і кінетичної енергії відносного руху окремих частинок системи. У разі твердого тіла відносний рух зводиться до обертання з однаковим для всіх частинок значенням кутової швидкості.

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії руху всієї маси тіла, зосередженої в центрі інерції і кінетичної енергії відносного руху окремих

частинок системи. У разі твердого тіла відносний рух зводиться до обертання з однаковим для всіх частинок значенням кутової швидкості  $\omega$ . Зрозуміло, як величина, так і напрямок  $\omega$  можуть змінюватися з часом.

Обчислимо кінетичну енергію обертання твердого тіла. У загальному випадку щільність  $\rho$  тіла може бути неоднаковою по всьому його об'єму  $V$ , а залежати від координат:  $\rho = \rho(x, y, z) = \rho(r)$ . Маса елемента обсягу  $dV$  дорівнює  $dm = \rho dV$ . Швидкість обертання  $v$  обчислюється згідно співвідношенню  $v = [\omega r]$  (в цьому - вираженні дужки  $[\ ]$  позначають векторний твір - це вектор, чисельно рівний площі паралелограма, побудованого на векторах  $\omega$  і  $r$  і перпендикулярний до його площини. Вектор  $v$  спрямований в ту сторону площині паралелограма, звідки обхід від вектора  $\omega$  до вектору  $r$  проводиться проти годинникової стрілки). Тому кінетична енергія елемента обсягу дорівнює  $\frac{1}{2} \int p [\vec{\omega} * \vec{r}]^2 dV$ . Кінетична енергія всього тіла представляється інтегралом від цієї величини за обсягом

$$T = \frac{1}{2} \int p [\vec{\omega} * \vec{r}]^2 dV. \quad (2.11)$$

Висловимо квадрат векторного твору через компоненти.

$$[\vec{\omega} * \vec{r}]^2 = \omega^2 r^2 \sin^2 a = \omega^2 r^2 \cos^2 a = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} * \vec{r})^2.$$

$\alpha$  - кут між векторами  $\omega$  і  $r$ ,  $(\omega r)$  - скалярний добуток векторів  $\omega$  і  $r$ . Але

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \Rightarrow (\omega^2 r^2) = (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2 = \omega_x^2 x^2 + \\ &\omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 + 2\omega_x \omega_y xy + 2\omega_x \omega_z xz + 2\omega_y \omega_z yz. \end{aligned}$$

Так як тіло тверде, складові  $\omega_x$   $\omega_y$   $\omega_z$  можуть бути винесені з-під знака інтеграла за обсягом. Об'єднуючи члени, однаковим чином залежать від компонент  $\omega$ , отримаємо для  $T$ :

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \omega_x^2 \int p(y^2 + z^2) dV + \frac{1}{2} \omega_y^2 \int p(x^2 + z^2) dV + \\
& + \frac{1}{2} \omega_z^2 \int p(x + y^2) dV - \omega_x \omega_y \int pxy dV - \omega_y \omega_z \int pyz dV - \\
& \omega_x \omega_z \int pyz dV. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

### 2.3.2 Моменти інерції

Всі інтеграли, що входять в (2.12), залежать тільки від форми тіла (геометрії) і розподілу щільності в ньому, але не залежать від руху тіла (в системі відліку, скріпленої з тілом). Введемо наступні величини:

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \int p(y^2 + z^2) dV, & J_{yy} &= \int p(x^2 + z^2) dV, \\
J_{zz} &= \int p(x^2 + y^2) dV, \\
J_{xy} &= - \int pxy dV, & J_{xz} &= - \int pzx dV, & J_{yz} &= - \int pyz dV. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Величини з однаковими індексами називаються моментами інерції, а з різними індексами - творами інерції. У позначеннях (2.13) кінетична енергія має вигляд

$$T = \frac{1}{2} (J_{xx} \omega_x^2 + J_{yy} \omega_y^2 + J_{zz} \omega_z^2 + 2J_{xy} \omega_x \omega_y + 2J_{xz} \omega_x \omega_z + 2J_{yz} \omega_y \omega_z).$$

У теорії матриць доводиться теорема, згідно з якою існує таке перетворення координатної системи від  $Oxyz$  до  $Ox'y'z'$  (насправді це є поворот), який дозволяє переходити тільки до моментів інерції так, щоб б добуток інерції прирівнювалися нулю. Це називається зведенням матриці до діагонального вигляду. А координатна система  $Ox'y'z'$  називається системою з головними осями інерції.

Найчастіше вибір цієї координатної системи пов'язаний з симетрією тіла. Тобто в цій системі координат кінетична енергія записується в такий спосіб:

$$T = \frac{1}{2} (J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2) \quad (2.14)$$

### 2.3.3 Момент імпульсу твердого тіла. Момент сил

Посилаючись з визначення моменту імпульсу матеріальної точки зробимо узагальнення і обчислимо проекцію моменту імпульсу твердого тіла:

$$\begin{aligned} M_x &= \int p[\vec{r} * \vec{v}]_x dV = \int p[\vec{r}[\vec{\omega} * \vec{r}]]_x dV \\ &= \int p(\omega_x^2 - x(\vec{\omega} * \vec{r})) dV = \\ \omega_x \int p(x^2 + z^2) dV - \omega_y \int pxy dV - \omega_z \int pxz dV \\ &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отриманий результат в векторній формі можна записати:

$$\vec{M} = \frac{dT}{d\vec{\omega}} \quad (2.16)$$

Співвідношення (2.15) і (2.16) виражають факт, що момент кількості руху є узагальнений імпульс, пов'язаний з обертанням. Тепер обчислимо похідну моменту кількості руху за часом як для матеріальної точки, так і для твердого тіла:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} * \vec{p}] = [\dot{\vec{r}} * \vec{p}] + [\vec{r} * \dot{\vec{p}}] = [\dot{\vec{r}} * \vec{p}] + [\vec{r} * \vec{F}]$$

(Перший доданок звертається в нуль, так як  $\vec{r}$  та  $\vec{p}$  паралельні)

$$\vec{M} = \int [\vec{r} * \vec{F}] dV = \vec{K}. \quad (2.17)$$

Права сторона (2.17), позначена буквою К, називається результуючим моментом сил, прикладених к тілу. Якщо F - сила тяжіння, як це має місце в більшості випадків, то К можна записати у вигляді:

$$\vec{K} = - \int pg[\vec{r} * \vec{z}_0] dV,$$

де  $z_0$  - одиничний вектор у вертикальному напрямку. Але так як вектор  $z_0$  - постійний, його слід винести за знак інтеграла:

$$\vec{K} = \vec{z}_0 \int pg\vec{r} dV. \quad (2.18)$$

Якщо точка опори тіла знаходиться в центрі інерції, то інтеграл від всіх трьох проекцій по визначенню центру інерції дорівнює нулю. Тоді  $K = 0$  і повний момент кількості руху зберігається. У твердого тіла для збереження моменту кількості руху досить, щоб  $K = 0$ , у довільній же механічній системі момент зберігається тільки тоді, коли немає зовнішніх сил.

### 2.3.4 Рівняння Ейлера

Зв'язок  $M$  і  $\omega$  дається формулою (2.15). Величини  $J_{xx}, \dots, J_{yz}$  постійні тільки в системі відліку, пов'язаної з самим твердим тілом. Якщо записати рівняння (2.11) в нерухомій системі координат, то, диференціюючи  $M$  за часом, треба знаходити і похідні за часом від  $J_{xx}, \dots, J_{yz}$ , що дуже незручно. Тому переважно відносити рівняння до системи відліку, скріпленої з тілом, з огляду на

прискорений рух цієї системи. Зміна вектора  $M$  щодо рухомих осей складається з двох складових: одне походить від зміни самого вектора та інше - від руху осей, на які він проектується. Для вектора  $M$  це зміна дорівнює  $[\omega M]$ .

Осі координат спрямуємо по головних осях інерції. Щодо цих координат моменти інерції вони постійні. Тому похідна за часом від  $M_x = J_{xx}\omega_x$  дорівнює

$$M'_x = J_{xx}\omega'_x + \omega_y M_z - \omega_z M_y = J_{xx}\omega'_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_z \omega_y.$$

Прирівнюючи цей вислів до величини проекції моменту сили на першу вісь інерції і роблячи те ж саме діяння відповідно для інших осей, отримуємо систему рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned} J_x \omega'_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= K_x, \\ J_y \omega'_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= K_y, \\ J_z \omega'_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= K_z. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Рівняння Ейлера можуть бути зведені до квадратури при довільних інтегралах руху в наступних випадках: 1)  $K_1 = K_2 = K_3 = 0$  (точка опори в центрі інерції) при довільних значеннях моментів інерції; 2)  $J_y = J_z \neq J_x$  та точка опори лежить на осі симетрії, щодо якої два моменти інерції рівні (випадок симетричної дзиги).

### 2.3.5 Кути Ейлера

В теорії твердого тіла затверджується що для визначення положення в просторі твердого тіла, що має одну нерухому точку, а потім отримання в загальному вигляді кінематичні рівняння руху такого тіла потрібно три параметра. Віднесемо рух даного тіла до системи нерухомих осей  $Oxuz$ , що мають початок в нерухомій точці тіла  $O$ . Крім того, в самому тілі візьмемо систему

незмінно пов'язаних з ним рухомих осей  $0x'y'z'$  що мають початок в тій же точці  $0$  (див. рис. 2.4).

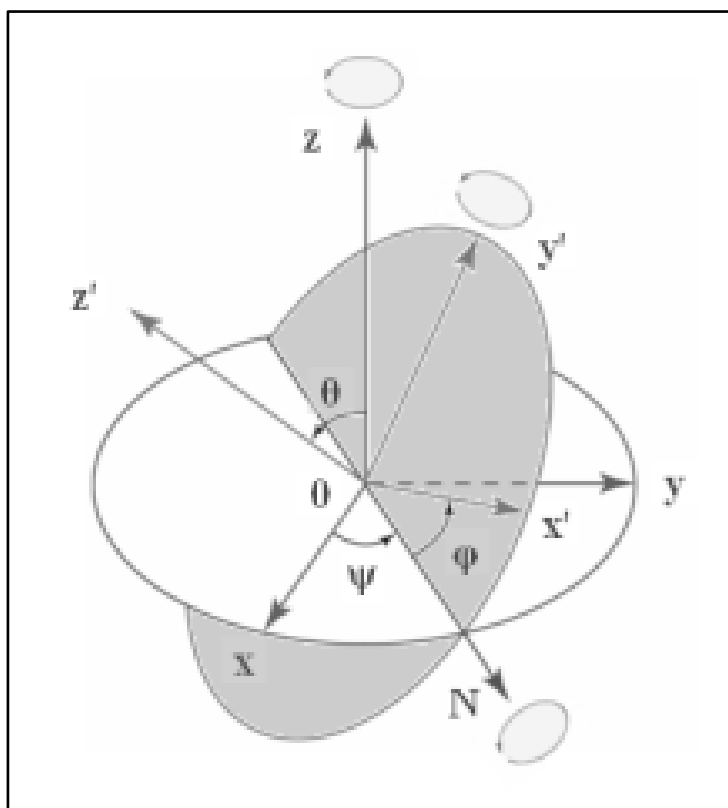


Рисунок 2.4 – Напрямок руху тіла в системі нерухомих осей

З аналітичної геометрії відомо, що положення рухомої системи  $0x'y'z'$  відносно нерухомої системи  $0xyz$  можна визначити дев'ятьма направляючими косинусами рухомих осей, тобто косинусами тих кутів, коли кожний з рухомих осей утворює кут з нерухомими осями. Але значно простіше і зручніше визначити положення системи  $0x'y'z'$  щодо осей  $0xyz$  за допомогою трьох так званих кутів Ейлера. Це робиться в такий спосіб. Позначимо лінію перетину координатних площин  $0xy$  і  $0x'y'$  через  $0N$  і встановимо на ній позитивний напрямок (напрямок від  $0$  до  $N$ ); ця пряма  $0N$  називається лінією вузлів. Кут між віссю  $0x$  і лінією вузлів  $0N$  позначимо через  $\psi$ ; цей кут лежить в площині  $0xy$  і відраховується від осі  $0x$  в позитивному напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з позитивного кінця осі  $z$ . Кут між площинами  $0xy$  і  $0x'y'$ , це те ж саме, що кут між осями  $z$  і  $z'$ , позначимо через букву  $\theta$ ; цей кут відраховується від осі  $z$

в напрямку, протилежному руху годинникової стрілки, якщо дивитися з позитивного кінця лінії вузлів; ясно, що лінія вузлів  $ON$  перпендикулярна до площини  $Ozz$ . Кут між лінією вузлів  $ON$  і віссю  $Ox$  позначимо через букву  $\varphi$ ; цей кут лежить в площині  $Oxy$  і відраховується від лінії вузлів в позитивному напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з позитивного кінця осі  $z$ . Три ейлерових кута  $\psi$ ,  $\theta$  і  $\varphi$  носять такі назви:  $\psi$  кут називається кутом прецесії,  $\theta$  - кутом нутації і  $\varphi$  - кутом власного обертання [2].

Систему осей  $Oxyz$  можна перевести в положення  $Ox'z'$  за допомогою наступних трьох обертань: повертаємо спочатку систему осей  $Oxyz$  навколо осі  $z$  на кут  $\psi$ , тоді вісь  $Ox$  співпадає з лінією вузлів  $ON$ ; потім робимо поворот навколо осі  $ON$  на кут  $\theta$ , тоді вісь  $z$  займе положення осі  $z'$ ; нарешті, виробляємо поворот навколо осі  $z'$  на кут  $\varphi$ , тоді вісь  $Ox$  (яка до цього повороту збігається з віссю  $ON$ ) займе положення осі  $x'$ , внаслідок цього, система осей  $Oxyz$  перейде в стан  $Ox'z'$ . Звідси виходить, що положення рухливих осей  $Ox'z'$ , а значить, і положення твердого тіла, яке має нерухому точку  $O$ , цілком визначається трьома кутами Ейлера, тобто трьома параметрами. Тому кажуть, що тверде тіло з однією нерухомою точкою має три ступені свободи. При русі тіла ці кути є деякими однозначними і безперервними функціями часу, тобто

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.20)$$

Якщо функції  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  та  $f_3(t)$  відомі, то для кожного даного моменту часу (для кожного числового значення аргументу  $t$ ) ми зможемо з рівнянь (2.20) знайти кути  $\psi$ ,  $\theta$  і  $\varphi$  внаслідок цього будемо знати положення тіла в цей момент. Тому рівняння (2.20) цілком визначають рух твердого тіла, що має одну нерухому точку, і називаються рівняннями руху твердого тіла навколо нерухомої точки.

### 2.3.6 Обчислення центру інерції і моментів інерції снаряда

У базовому представленні геометрія снаряда представляє конструкцію (див. рис. 2.5).

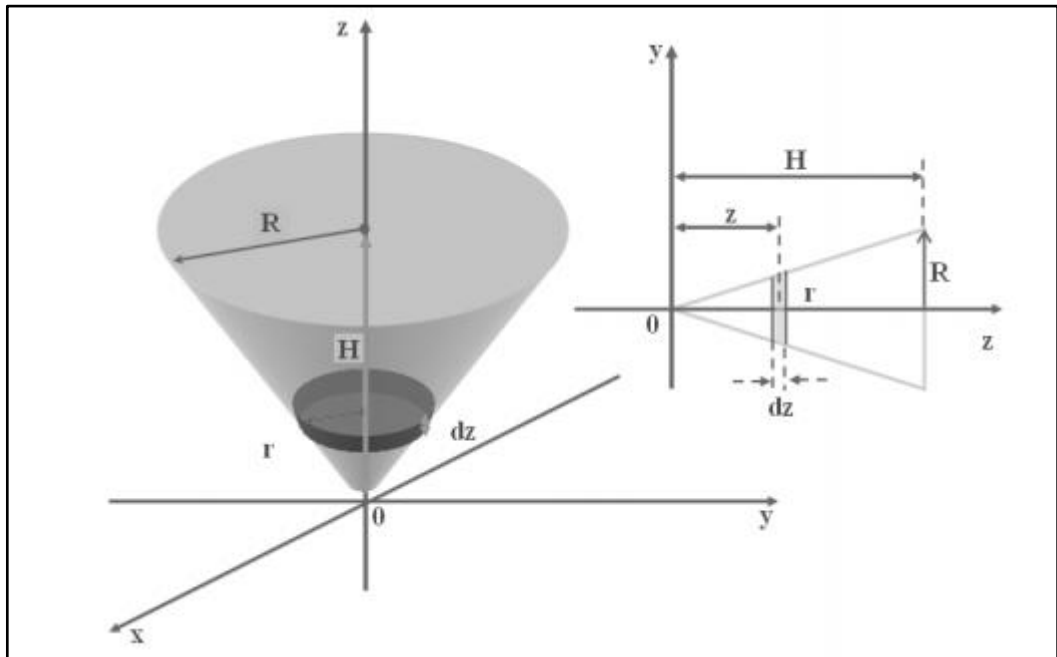


Рисунок 2.5 – Розрахунок центру інерції

Декартові систему координат встановимо так, щоб вісь пройшла через висоту конуса, а початок координат збігається з вершиною конуса. Зважаючи на симетрію тіла, приходимо до висновку що:

$$x_c = 0 \text{ та } y_c = 0. \quad (2.21)$$

Формулу обсягу конуса можемо записати:

$$V_{\text{конус}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Інтегрування виразу  $z_c = \frac{1}{V_{\text{конус}}} \int z dV$  за обсягом замінимо інтеграцією по осі  $0z$ , представляючи конус як сукупність тоненьких циліндрів радіуса  $r$  ( $r \in [0;$

$R$ ]) та товщиною (висотою)  $dz$ . Зв'язок між поточними змінними  $z$  і  $r$  знайдемо з трикутників:

$$\frac{z}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{H} z.$$

Тоді обсяг нескінченно малого циліндра виражається формулою:

$$dV = \pi r^2 dz = \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 z^2 dz.$$

Остаточно для  $z$  складової радіуса вектора центру інерції конуса отримаємо вираз:

$$z_c = \frac{1}{V_{\text{конус}}} \int_0^H z \left(\frac{R}{H}\right)^2 z^2 dz = \frac{3}{H^3} \int_0^H z^3 dz = \frac{3}{4} H. \quad (2.22)$$

Ненульова складова радіуса-вектора центру інерції всіх конусів однакової висоти і різних радіусів основуються від основи, яка знаходиться на відстані чверть висоти.

Снаряд представляє собою циліндр і конус, змонтовані на одній осі, що проходить по їх висот. Щільність речовини  $\rho$  в циліндрі і в конусі також припустимо однаковою. Маючи на увазі осьову симетрію снаряда, для  $x$  і  $y$  проєкцій для його радіуса-вектора центру інерції отримаємо співвідношення (2.21)  $z$  частина центру інерції снаряда, визначимо виходячи з фізичних міркувань. Так як є центр інерції (центр ваги) моменти сил, що обертають снаряд за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки повинні один одного врівноважувати.

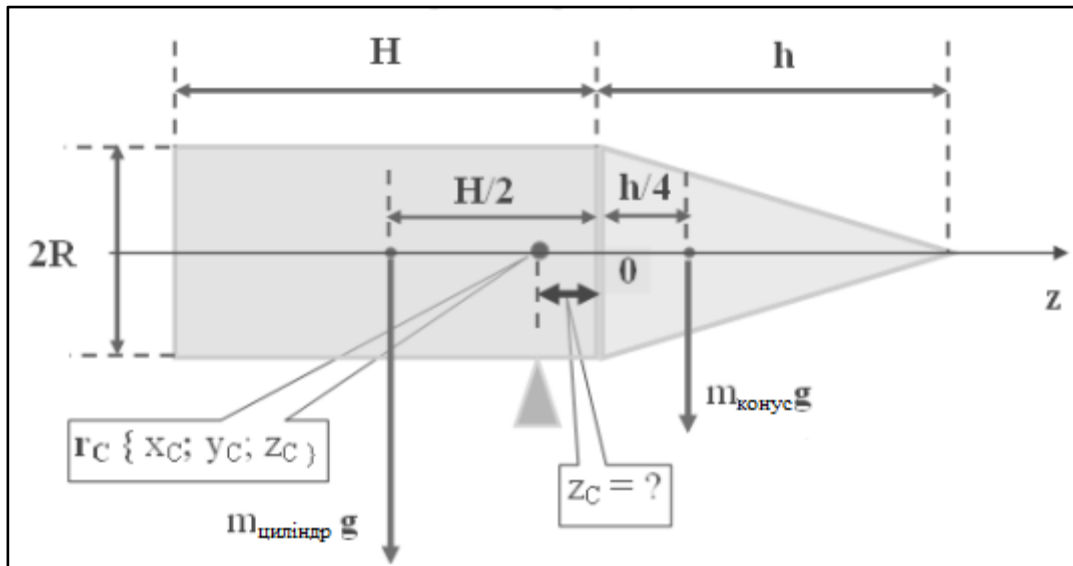


Рисунок 2.6 – Геометрія моделі снаряда

Зважаючи на геометричні співвідношення, зміст яких ясний (див. рис. 2.6) та визначення моменту сили (2.18) можемо записати:

$$m_{\text{циліндр}} g \left( \frac{H}{2} - z_c \right) = m_{\text{конус}} g \left( \frac{h}{4} + z_c \right).$$

Так як маса циліндра -  $m_{\text{циліндр}} = \pi R^2 H \rho$ , а конуса-  $m_{\text{конус}} = \pi R^2 h \rho / 3$  ( $\rho$  – щільність речовини), тому приходимо до співвідношення:

$$z_c = \frac{1}{4} * \frac{6H^2 - h^2}{3H + h}. \quad (2.23)$$

Як у випадку конуса, ненульова складова  $z_c$  радіуса вектора центру інерції снаряда не залежить від радіуса основи. Така поведінка зокрема пов'язано з двома припущеннями, які ми зробили: а) щільність речовини циліндра дорівнює щільності речовини конуса, б) радіуси основ циліндра і конуса збігаються.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції частин, що входять в систему:

$$J_{ii}(\text{снаряду}) = J_{ii}(\text{циліндр}) + J_{ii}(\text{конус}), \quad \text{де } i = x; y; z.$$

За допомогою введених циліндричних координат можна обчислити необхідні елементи інтегрування. Для цього початок циліндричної системи координат встановимо в центрі інерції конуса, вісь  $z$  направимо вздовж осі симетрії в сторону підстави, осі  $0x$  і  $0y$  взаємно перпендикулярно на відстані  $h/4$  від підстави конуса. Зв'язок між змінними  $z$  і  $r$  знайдемо за допомогою подібності трикутників:

$$\frac{r}{z + 3h/4} = \frac{R}{h} \Rightarrow z = \frac{h}{R}r - \frac{3h}{4}, \quad \text{та } z = \frac{h}{R}y - \frac{3h}{4}.$$

Так як

$$y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \varphi + \left( \frac{h}{R}r - \frac{3h}{4} \right)^2 \quad \text{та } dV = dx dy dz = r dr d\varphi dz,$$

а границі інтегрування будуть- для змінної  $r$  від  $0$  до  $R$ , для змінного  $\varphi$  від  $0$  до  $2\pi$  та для змінної  $z$  від  $-3h/4$  до  $h/4$  можемо писати:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= p \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= p \iiint \left[ \frac{r^3}{2} (1 - \cos 2\varphi) + h^2 \left( \frac{r^3}{R^2} - \frac{3}{2} * \frac{r^2}{R} + \frac{9}{16} r \right) \right] r d\varphi dz = \\ &= p \left[ \frac{r^4}{8} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + h^2 \left( \frac{r^4}{4R^2} - \frac{r^3}{2R} + \frac{9r^2}{32} \right) \varphi \right] \Big|_0^R \Big|_0^{2\pi} \Big|_{-3h/4}^{h/4} = \\ &= 2\pi p h R^2 \left[ \frac{R^2}{8} + h^2 \frac{8 - 19 + 9}{32} \right] = \frac{3m_{\text{конус}}}{4} \left[ R^2 + \frac{h^2}{4} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Аналогічним чином обчислюються всі інші моменти інерції, причому розглядається ще снаряд як сума циліндра з півкуль.

### 2.3.7 Обертання навколо нерухомої осі

Згідно з теоремою Шаля всякий рух вільного твердого тіла можна розглядати як сукупність двох рухів: поступального руху, що визначається рухом довільно обраної точки тіла, і руху (обертання) біля цієї точки як нерухомою; в динаміці часто вибирають за таку точку центр маси твердого тіла. Тоді рух тіла буде складатися з поступального руху, що визначається рухом центру мас, і руху тіла біля центру мас як нерухомої точки. В курсі теоретичної фізики доводиться, що якщо тверде тіло довільної форми кинуте під деяким кутом до горизонту і можна опором повітря знехтувати, то центр мас цього тіла рухається по параболі з прискоренням  $g$ .

Дана маса снаряду  $m$ , його головні моменти інерції  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . Сам снаряд після вильоту з гармати обертається з великою швидкістю навколо осі симетрії, і ця вісь є однією з головних осей інерції. Якщо вона не повертається в просторі, момент імпульсу дорівнює  $M = J\omega$ , де  $J$  - момент інерції щодо осі снаряда.

При спробі викликати поворот осі снаряда спостерігається своєрідне явище, що отримало назву гіроскопічного ефекту: під дією сил, які, здавалося б, повинні були викликати поворот осі снаряда, вісь снаряда обертається навколо іншої осі, що лежить в перпендикулярній площині. Це явище забезпечує більшу стійкість руху снаряда (див. рис. 2.7).

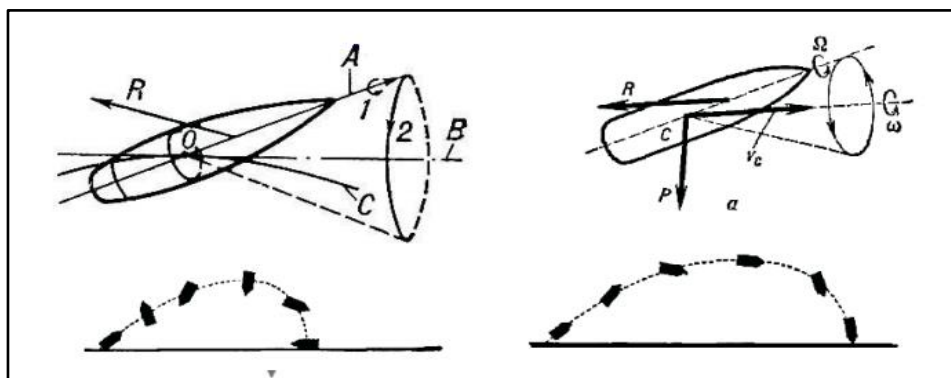


Рисунок 2.7 – Обертання навколо нерухомої осі

Іншою особливістю руху є те, що в полі тяжіння вісь снаряда обертається навколо вертикалі, описуючи конус, Таке рух снаряда називається прецесією. Кутову швидкість  $\omega_{\text{прц}}$  можна знайти і із співвідношення:

$$\omega_{\text{прц}} = \frac{mgl}{J\omega},$$

де  $l$  - відстань від точки початку координат до центра маси снаряда.

Якщо точку відліку помістити в центр маси снаряда (дуже симетричний - кулястий снаряд не великих розмірів), то момент сили тяжіння стане рівним нулю - це випадок вільного симетричного снаряда. В силу закону збереження момент імпульсу такого снаряда не змінюватиметься ні за величиною, ні за спрямуванням. Якщо привести снаряд в обертання навколо осі симетрії, вектори  $M$  і  $\omega$  матимуть однаковий напрямок, що зберігається необмежено довго. При здійсненні відповідного розрахунку приходимо до наступних результатів. Вектор  $\omega$ , залишаючись постійним за величиною, прецесує навколо напрямку вектора  $M$ , описуючи конус. Одночасно прецесує вісь симетрії снаряда  $z$ , причому вектори  $M$ , і  $\omega$  вісь  $z$  весь час знаходяться в одній площині. Снаряд обертається навколо осі  $z$  з кутовою швидкістю  $\omega_z = M_z/J_z$ , де  $M_z$  - проекція вектора  $M$  на вісь  $z$ ,  $J_z$  - момент інерції снаряда щодо цієї осі. Кутова швидкість прецесії дорівнює  $\omega_{\text{прц}} = M/J$ , де  $J$  - однакове значення моментів інерції  $J_x$ , і  $J_y$ .

#### 2.4 Рух снаряду з урахуванням опору середовища

Якщо тверде тіло знаходиться всередині рідини або газу, то вся його поверхня весь час стикається з частинками рідини або газу. При русі тіла на нього з боку рідини або газу діють сили, спрямовані назустріч руху. Ці сили називають

опором середовища. Як і сили тертя, опір середовища завжди спрямоване проти руху.

При падінні в повітрі тіло рухається під дією двох сил: постійної сили земного тяжіння  $P$ , спрямованої вертикально вниз, і сили опору повітря  $f$ , що збільшується в міру падіння і спрямованої вертикально вгору. Рівнодійна сили тяжіння і сили опору повітря дорівнює їх різниці і на початку падіння спрямована вниз. Поки швидкість падаючого тіла ще мала, невелика й сила опору повітря: але в міру того, як зростає швидкість падіння, ця сила швидко зростає. При деякій швидкості  $f$  стає рівним  $P$ , і далі тіло падає рівномірно. Швидкість такого падіння називають граничною швидкістю падіння. Гранична швидкість тим більше, чим сильніше розріджене повітря.

Гранична швидкість падіння залежить крім щільності атмосфери і її температури, до форми і розмірів тіла. Різниця в граничній швидкості різних тіл однакової форми, але різних розмірів пояснюється залежністю опору середовища від розмірів тіла. Цей опір приблизно пропорційна поперечним розмірам тіла. Ця обставина дозволяє записати перше рівняння руху матеріальної точки:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k_s S \vec{n}, \quad (2.25)$$

де  $k_s$  коефіцієнт пропорційності, що враховує залежність від площі  $S$  поперечного перерізу,  $\vec{n}$  - одиничний вектор нормалі поверхні, спрямований в напрямок руху.

З рівняння (2.25) випливає, що при одній і тій же формі тіла з даного матеріалу площа його поперечного перерізу, а значить і сила опору повітря, зростає зі збільшенням розмірів повільніше, ніж сила тяжіння: площа поперечного перерізу зростає як квадрат розміру, а сила тяжкості - як куб розміру тіла, наприклад, чим більше авіаційна бомба, тим більше її гранична швидкість і з тим більшою швидкістю вона досягає землі. Сила опору повітря сильно залежить і від форми тіла. Сила опору виникає, по-перше, тертям повітря об поверхню тіла, по-друге, зміною руху потоку викликаним тілом. У повітряному

потоці, зміненому присутністю тіла, тиск на передній стороні тіла зростає, а на задній - знижується в порівнянні з тиском в обуреному потоці. Таким чином, створюється різниця тисків, що гальмує рух тіло або захоплює тіло, занурене в потік. Рух повітря позаду тіла приймає безладний вихровий характер. Явище наявності в потоці газу безладних рухів ділянок середовища - називають турбулентністю потоку. При малій швидкості течії турбулентність потоку зникає і рух робиться струменевим, або, як кажуть, ламінарним. Якщо знову збільшити швидкість потоку, то потік знову стане турбулентним. Досліди показують, що в вузьких струменях, залишених за рушійним снарядом, турбулентність припиняється при більшій швидкості, ніж в широких.

Рейнольдс встановив, що характер перебігу визначається значенням безрозмірною величини

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta},$$

де  $\rho$  - щільність рідини (або газу),  $v$  - середня по перерізу труби швидкість потоку,  $\eta$  - в'язкість рідини,  $l$  - характерний для поперечного перерізу потоку розмір, наприклад діаметр при круглому перетині снаряда. Величина  $Re$  називається числом Рейнольдса.

При малих значеннях  $Re$  протягом носить ламінарний характер. Починаючи з деякого значення  $Re$ , званого критичним, протягом набуває турбулентний характер. У число Рейнольдса входить відношення  $\rho$  щільності і  $\eta$  в'язкості). Величина  $\nu = \eta/\rho$  називається кінематичною в'язкістю. Щоб відрізнити її від  $\eta$ , величину  $\nu$  називають динамічною в'язкістю. Значення кінематичної і динамічної в'язкості для повітря при нормальному атмосферному тиску і при температурі 20°C вони відповідно рівні  $1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  та  $1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ .

Силу  $f$ , з якої потік, що набігає діє на тіло, можна розкласти на дві складові: спрямовану вздовж швидкості  $\vec{v}$  необуреного потоку силу  $X$ , яка називається

лобовим опором, і перпендикулярно до  $\vec{v}$  сила  $Y$ , названа підйомною силою. Лобове опір складається з сил тиску і сил внутрішнього тертя. На тіло, симетрично щодо напрямлення швидкості потоку  $\vec{v}$ , може діяти тільки лобове опір, підйомна ж сила в цьому випадку буде відсутня.

Співвідношення між опором тертя і опором тиску визначається значенням числа Рейнольдса. В даному випадку  $\vec{v}$ - швидкість тіла щодо рідини (або швидкість потоку, що набігає на тіло). При малих  $Re$  (тобто при малих  $\vec{v}$  і  $l$ ) основну роль грає опір тертя, так що опором тиску можна знехтувати. З ростом в'язкості відносна роль сил тертя зростає. У міру збільшення  $Re$  роль опору тиску все більше зростає. При великих значеннях  $Re$  в лобовому опорі переважають сили тиску.

Визначаючи характер сил, що діють на тіло в потоці рідини або газу, число Рейнольдса є критерієм подібності і в цьому випадку. Ця обставина використовується при моделюванні. Наприклад, модель літака поводить в потоці газу так само, як і її прообраз, якщо крім геометричної подоби моделі і літака буде дотримано рівність для них значень числа Рейнольдса. Стокс встановив, що при невеликих швидкостях і розмірах тіл (тобто при малих  $Re$ ), коли опір середовища обумовлено практично тільки силами тертя), модуль сили опору визначається формулою:

$$\vec{f} = k\eta l\vec{v}, \quad \vec{f} = 6\pi\eta r\vec{v},$$

де  $k$  - коефіцієнт пропорційності, який залежить від форми тіла. Для кулі, якщо взяти в якості  $l$  його радіус  $r$ , коефіцієнт пропорційності дорівнює  $6r$ .

Зауважимо, що сила, яка діє на тіло в повітряному потоці, залежить тільки від відносної швидкості рухів тіла і повітря і не залежить від того, чи рухається тіло в спочиваючому повітрі або ж повітря рухається щодо нерухомого тіла (принцип відносності руху). Експериментально встановлено, що при малих швидкостях сили опору  $F_{\text{опор}} = k_1 v$ , де  $k_1$  - коефіцієнт опору, визначається

властивостями середовища і форми тіла ( $k_1 = 6\pi\eta r$ ). При більш високих швидкостях  $F_{\text{опор}} = k_2 v^2$ .

У залежності від швидкості будуть запропоновані аналітичні або числові методи розв'язання рівнянь типу (2.25) або

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k_1 \vec{v} \text{ або } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k_2 \frac{\vec{v}^3}{v}. \quad (2.26)$$

#### 2.4.1 Лінійної залежності від швидкості

Розглянемо рух снаряда в разі дії сили опору середовища, лінійно залежить від швидкості руху тіла. У цьому випадку дійсне диференціальне рівняння (2.26а). Пропускаючи індекс у коефіцієнта  $k$ , перепишемо ці рівняння по координатним осях  $x$  і  $y$  і вкажемо початкові умови для координат і швидкостей:

$$\left\{ m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, m \frac{dy}{dt} = -mg - kv_y. \right. \quad (2.27)$$

$$\text{Де } t = 0 \vec{r}_0 \{0; 0\}, \text{ та } \vec{v}_0 \{v_o \cos \alpha; v_o \sin \alpha\}. \quad (2.28)$$

Рівняння (2.27) є диференціальними рівняннями другого порядку із перемінними [8]. Вирішимо рівняння (2.27х):

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \ln v_x = -\frac{k}{m} t + C \Rightarrow v_x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow$$

$$x(t) = -\frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} + C_2$$

де  $C_1$  та  $C_2$  суть постійного інтегрування.

За початковими умови, для  $C_1$  і  $C_2$  отримаємо:

$$0 = -\frac{m}{k}C_1 + C_2 \text{ та } \cos\alpha = C_1.$$

Закон руху по осі  $x$  і вираз  $v_x$  для горизонтальної складової швидкості руху тіла мають вигляд:

$$x(t) = \frac{m}{k}v_0 \left(-e^{-\frac{kt}{m}}\right) \cos\alpha \text{ та } v_x(t) = v_0 e^{-\frac{kt}{m}} \cos\alpha. \quad (2.29)$$

Зробимо ті ж самі обчислення для рівняння (2.27у). Рішення неоднорідного рівняння для змінної  $v_y$  будемо шукати у вигляді:

$$v_y = Ce^{-\frac{kt}{m}} + At + B, \quad (2.30)$$

де  $A$ ,  $B$  і  $C$  - поки невідомі постійні числа, які визначимо вимагаючи, щоб (2.30) задовольняло рівнянням (2.27у) і прирівнюючи коефіцієнти при однаковому ступені часу  $t$ :

$$-\frac{k}{m}Ce^{-\frac{kt}{m}} + A + \frac{k}{m}\left(Ce^{-\frac{kt}{m}} + At + B\right) = -g \Rightarrow A + \frac{k}{m}At + \frac{k}{m}B = -g,$$

$$t^0: A + \frac{k}{m}B = -g; \quad t^1: A = 0, \text{ отже } A = 0 \text{ та } B = -\frac{m}{k}g.$$

Зараз вираз (2.30) можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = Ce^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k}g,$$

інтегруючи яке отримаємо:

$$y = -\frac{m}{k}C_1 e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k}gt + C_2,$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – постійні інтегрування, які визначимо, застосовуючи початкові умови:

$$v_0 \sin \alpha = C_1 - \frac{m}{k} g \text{ та } 0 = -\frac{m}{k} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k} g \right) + C_2.$$

Тепер можливо записати закон руху по осі  $y$  і вираз  $v_y$  для вертикальної складової швидкості:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{m}{k} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k} g \right) \left( -e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{m}{k} g t \text{ та} \\ v_y(t) &= \left( v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k} g \right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k} g. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для отримання рівняння траєкторії необхідно вирішити рівняння (2.29) по відношенню часу  $t$  і поставити в перше рівняння (2.31) (по суті справи виключити час з цих рівнянь):

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{kt}{m}} &= \frac{k}{m v_0 \cos \alpha} x \Rightarrow -\frac{m}{k} t = \ln \left( 1 - \frac{kx}{m v_0 \cos \alpha} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{m}{k} \ln \frac{m v_0 \cos \alpha}{m v_0 \cos \alpha - kx} \\ y &= \left( t g \alpha + \frac{m g}{k v_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{m^2}{k^2} g \ln \left( 1 - \frac{kx}{m v_0 \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

#### 2.4.2 Квадратична залежність від швидкості

Розглянемо рух снаряда в разі дії сили опору середовища, коли він квадратично залежить від швидкості руху тіла (2.26а). Пропускаючи індекс у коефіцієнта  $k$ , перепишемо диференціальні рівняння по координатним осям  $x$  і  $y$  та вкажемо початкові умови (2.28) для координат і швидкостей:

$$\left\{ m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x^2, m \frac{dv_y}{dt} = -m g - k v_y^2. \right. \quad (2.33)$$

Двічі інтегруємо диференціальне рівняння (2.33х) з роздільними змінними :

$$\frac{dv_x}{v_x^2} = -\frac{m}{k} dt \Rightarrow -\frac{1}{v_x} = -\frac{k}{m} t - C \Rightarrow v_x = \frac{1}{C + \frac{kt}{m}} \Rightarrow dx = \frac{1}{C + \frac{kt}{m}} dt \Rightarrow$$

$$x = \frac{m}{k} \ln \ln (C_1 + C_2 t) \text{ та } v_x = \frac{m}{k} \frac{C_2}{C_1 + C_2 t},$$

де постійні інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначаються з початкових умов (2.28):

$$C_1 = 1 \text{ та } C_2 = \frac{k}{m} v_0 \cos \alpha,$$

що дозволяє остаточно записати рівняння руху вздовж осі  $Ox$ :

$$x = \frac{m}{k} \ln \ln \left( 1 + \frac{k}{m} v_0 t \cos \alpha \right) \text{ та } v_x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{m + k v_0 t \cos \alpha}. \quad (2.34)$$

Дослідження руху тіла, кинутого під кутом до горизонту в середовищі, де опір квадратично залежить від швидкості руху дає можливість простежити за тим, що відбувається, коли цей опір все більше зменшується (див. рис. 2.15): тобто в запропонованій теорії має місце принцип відповідності - коли в завданні руху тіла в середовищі коефіцієнт опору приймається за нуль, виходить рух тіла матеріальної точки.

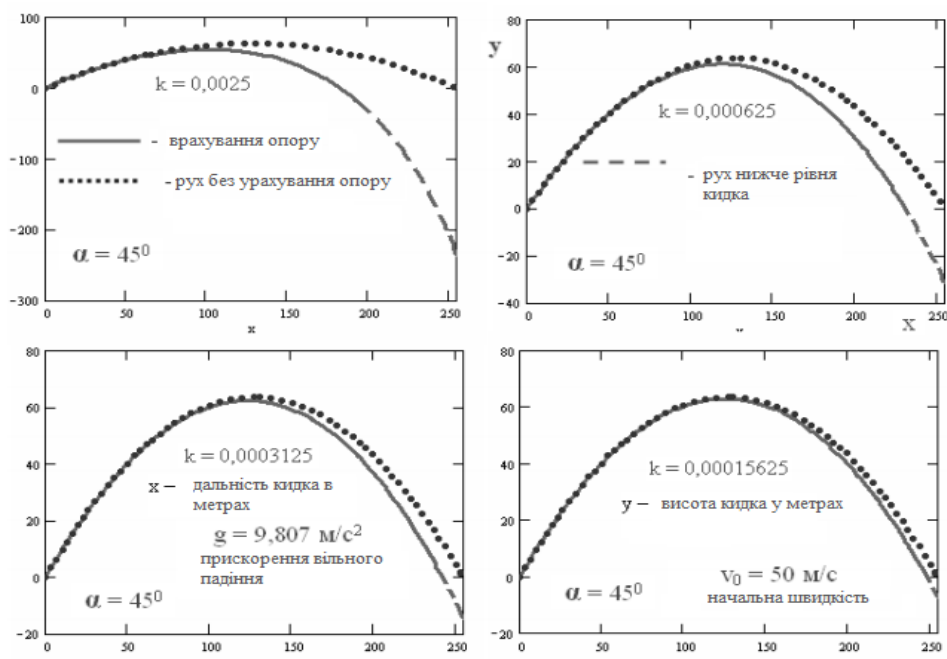


Рисунок 2.8 – Обертання навколо нерухомої осі

### 2.4.3 Врахування залежності від модуля швидкості

У вище ми мовчки припускали, що в натуральному вираженні сили опору залежність від швидкості руху снаряда розкладається за координатам по порядку, що дозволяє перейти до диференціальних рівнянь (2.27x), (2.27y), (2.33x), (2.33y) зі перемінними. Насправді в натуральному вираженні сили опору крім напрямлення швидкості необхідно враховувати модуль швидкості, а не проекції швидкості. Для того, щоб уточнити цю обставину, необхідно спроектувати силу опір (що означає швидкість руху) в будь-якої точки траєкторії на координатні осі (див. рис. 2.16).

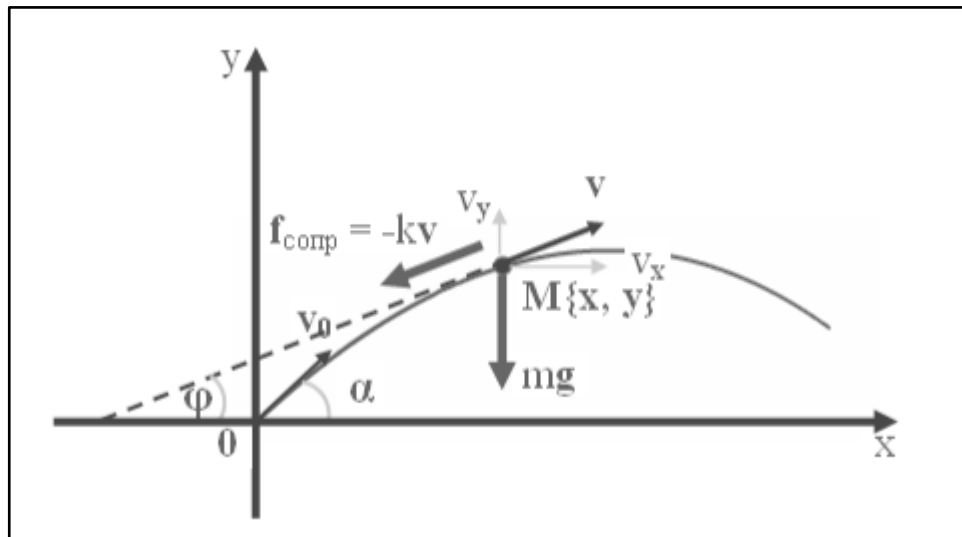


Рисунок 2.16 – Залежно від модуля швидкості

$\vec{f} = -k\vec{v} \Rightarrow f_x = -kv \sin\varphi$ , де  $\varphi$  - кут, який складає вектор швидкості з позитивним напрямом осі абсцис, а  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  - модуль швидкості, за рахунком:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{v_y}{v_x}, \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_y^2/v_x^2}} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x}{v}, \\ \sin\varphi &= \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{v_y/v_x}{\sqrt{1 + v_y^2/v_x^2}} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_y}{v}. \end{aligned}$$

#### 2.4.4 Зовнішні впливи на снаряд

Якщо розглядати стаціонарне протягом газу, то вірні ще два висловлювання: а) у вузьких ділянках течії швидкість газу більше, ніж в широких; б) там, де протягом вузьке, тиск низький. Кількісно закон Бернуллі має вигляд наступного диференціального рівняння:

$$\frac{\rho v^2}{2} + pgh + p = const. \quad (2.35)$$

де -  $\rho$  щільність газу,  $v$  - швидкість обтікання газом тіла,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $h$  - висота струменя,  $p$  - тиск газу.

За допомогою знання закону Бернуллі розглянемо обтікання обертового снаряда рівномірним потоком повітря. При своєму обертанні снаряд захоплює прилеглі шари повітря; в результаті навколишнє повітря отримує, крім поступального руху, ще й обертання навколо снаряда. У тих місцях, де швидкості поступального і обертального рухів складаються, результуюча швидкість повітря переважає швидкість потоку, що набігає на снаряд; з протилежного боку швидкості снаряда віднімаються і результуюча швидкість менше, ніж швидкість потоку вдалі від снаряда. Відповідно до закону Бернуллі в тих місцях, де швидкість більше, тиск знижений, і навпаки. Отже, з двох сторін на снаряд діють нерівні сили; їх результуюча, направлено до потоку, є підйомною силою. Підйомна сила, перпендикулярна до потоку, виникає при обертанні будь-якого тіла. Виникнення сили, перпендикулярної до потоку, при обтіканні обертового тіла називається ефектом Магнуса. Ефект Магнуса був вперше виявлений при вивченні польоту обертових артилерійських снарядів: підйомна сила, що діє з боку зустрічного потоку повітря, відхиляє снаряд від лінії прицілу; це відхилення має бути враховано при точній стрільбі.

Деривація називається бічне відхилення від площини стрільби обертового снаряда при польоті в повітрі. Деривація пояснюється властивістю дзиги, яким

володіє обертається снаряд. При прямолінійному русі снаряда вісь його власного обертання збігається з напрямком руху. Під впливом сили тяжіння траєкторія снаряда викривляється, дотична до траєкторії, що збігається з напрямком руху, безперервно знижується, а вісь власного обертання снаряда прагне зберегти своє положення в просторі, утворюючи з дотичній до траєкторії деякий кут. Сила опору повітря  $R$  починає діяти при цьому під кутом до осі снаряда, що призводить до появи перекидального моменту для снаряду і складової сили опору повітря, перпендикулярній осі снаряда.

## 2.5 Алгоритм наводки гармати

Для того щоб навести гармату щоб вона благополучно влучила в ціль, нам не вистачає дистанції та куту піднесення кут ми знаходимо за допомогою інтегрування, а щоб знайти відстань між точками в трьохвимірному просторі знаючи їх координати. Нам достатньо знайти дві діагоналі двох паралелограмів (див. рис. 2.7).

Для знаходження діагоналей нам достатньо знати дві його сторони та кут. Так як в нашому випадку всі кути в паралелограмах прямі тобто дорівнюють 90 градусів.

Звідси ми маємо прямокутник і можемо використовувати форму для знаходження діагоналі  $a^2 + b^2 = c^2$ . Спочатку знаходимо діагональ зеленого(нижнього) прямокутника.

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Потім діагональ синього(верхнього) прямокутника.

$$D^2 = L^2 + (z_2 - z_1)^2$$

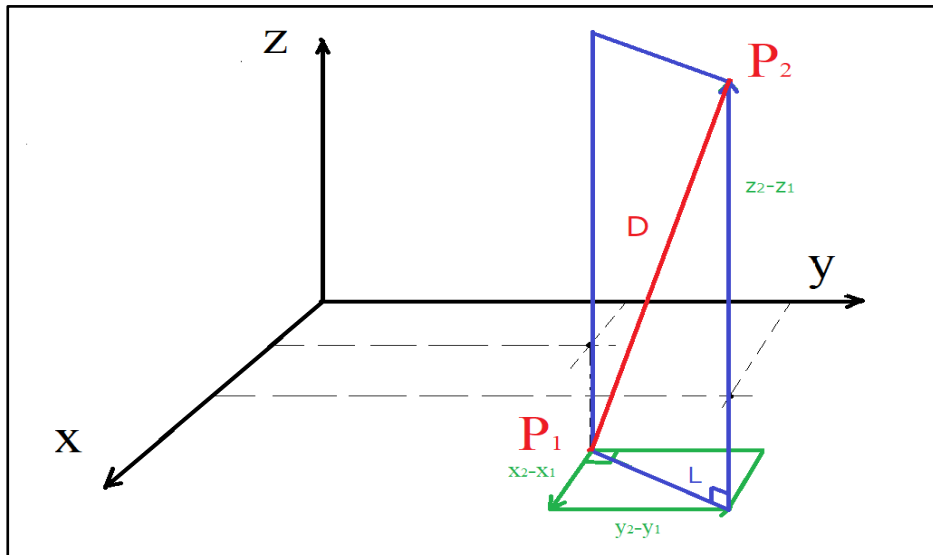


Рисунок 2.7 – Знаходження відстані між точками (частина 2)

Висловимо кінцеву формулу для знаходження дистанції:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

d-дистанція,  $P_1, P_2$  точки  $x, y, z$  координати точок.

Для уникнення десинхронізації напрямку прицілювання (прицілу) і напрямки гармати, ми повертаємо приціл до напрямку гармати на кут між двома векторами, перший спрямований від точки попадання до гармати, а другий від тієї ж точки (див. рис. 2.8).

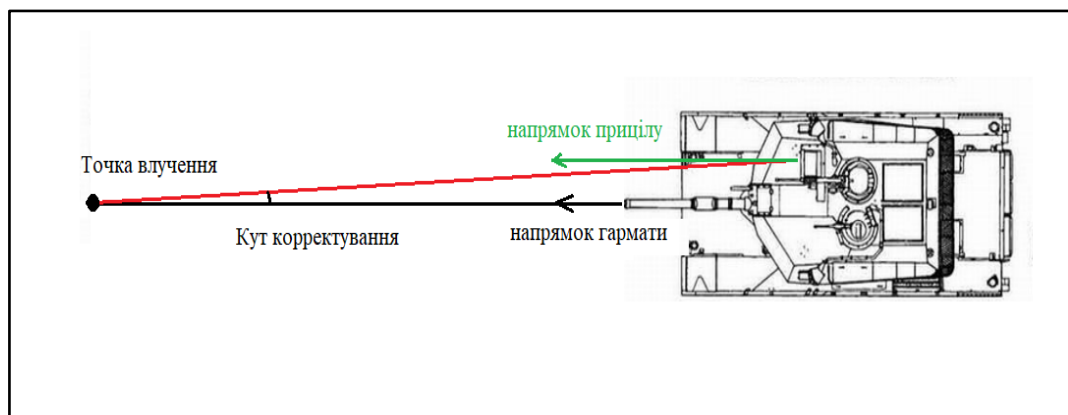


Рисунок 2.8 – Напрямок прицілювання

### 3 ФОРМУВАННЯ ВИМОГ ДО ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ

В ході роботи необхідно реалізувати гру танковий симулятор, яка достатньо передасть досвід управління справжнім бойовим танком для дорослої людини в якому вона може навчатися керуванням танком або розважатися і покращувати свої навички та відігравати певну дану їй роль.

Програмна система володіє загальними положеннями які описані нижче.

#### 3.1 Загальні відомості

Для гри більш притаманний жанр Симулятор. Цей жанр краще підходить для дорослої людини бо ігри цього жанру вимагають концентрацію і своєчасне реагування на змінну ситуацію. Іграм цього жанру притаманне найбільш приближений до реальності способи взаємодії і ігрові правила. Це допоможе навчитися вмінням які можуть стати в нагоді в реальному світі. Також потрібно додати додаткові характеристики до цього жанру, для остаточного розуміння стилю гри:

- назва гри: Tank Simulator;
- жанр: Simulator;
- стилістика: військова;
- положення камери: VR Simulator;
- цільова аудиторія: гра розрахована на аудиторію 18+ років. Симулятор буде корисним людям, які зацікавлені в реалістичному управлінні танка. Які навчаються у військових інститутах або проходять військову службу.

### 3.2 Unique Selling Points

- висока якість візуалізації;
- реалістичне керування танком;
- приближена до реалістичності балістики;
- висока передача від чуттів для швидкого звикання;
- координація дії з товаришем по команді:

Завдяки цим особливостям гра зможе зацікавити цільову аудиторію.

### 3.3 Опис gameplay

Програмне забезпечення позиціонує себе як VR Simulator тренування навідників що має на увазі собою використання контролерів. Користувач з'являється у місці навідника (див. рис. 3.1).



Рисунок 3.1 – Місце навідника

Ігровий процес в цілому схожий на кооперативний тир на двох гравців. Між гравцями розподіляють ролі. Перша відповідає за управління вежею з гарматою, друга управляє корпусом танка. Ідея гри полягає в тому, щоб перший гравець, занурившись в віртуальну реальність керував вежею і вражав ворожі цілі, в той час як другий гравець керує переміщенням танка по полю бою.

### 3.4 Властивості механіки

- користувач обмежений місцем навідника і не може вийти за її прибудови;
- користувач може випустити 1 Вистріл за раз. Тобто поки зброя перезаряджається;
- знищення цілі відображається у вигляді її ефекту. Тобто при знищенні вона димиться;

### 3.5 Мінімальні технічні вимоги

- ОС windows 10;
- процесор Intel i7, або аналогічний AMD FX;
- оперативна пам'ять 16 GB ОЗУ;
- відеокарта Nvidia GeForce GTX1060, або аналогічна AMD Radeon;
- Directx версії 11.

Згідно з постановою задачі приступимо до реалізації програмного забезпечення.

#### 4 ВИКОРИСТАННЯ ДОСЛІДЖЕНИХ МЕТОДІВ

На основі інформацію яка була виявлена з дослідження методу балістики, таку як:

Рух з опором повітря описуються за допомогою диференціальних рівнянь.  
Сила опору повітря:

$$F_c = -k\vec{v}$$

Другий закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

Висловимо прискорення:

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

В момент часу  $t$  положення тіла задається радіус-вектором  $\vec{r}(t)$  і тіло рухається зі швидкістю  $\vec{v}(t)$ . Тоді положення і швидкість через малий проміжок часу  $dt$  можна обчислити так:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + dt) &= \vec{r}(t) + \vec{v}(t) dt, \\ \vec{v}(t + dt) &= \vec{v}(t) + \left( \vec{g} - \frac{k}{M}\vec{v}(t) \right) dt.\end{aligned}$$

І в проекції на осі  $x$   $y$ :

$$\begin{aligned}x(t + dt) &= x(t) + v_x(t) dt, \\ y(t + dt) &= y(t) + v_y(t) dt, \\ v_x(t + dt) &= v_x(t) - \frac{k}{m}v_x(t) dt,\end{aligned}$$

$$v_y(t + dt) = v_y(t) - \left( g + \frac{k}{m} v_y(t) \right) dt.$$

В результаті інтегрування отримаємо:

$$v_x(t) = \frac{v_{0x}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad (4.1)$$

$$v_y(t) = -\frac{gt}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g}{\lambda} + v_{0y} \right) (1 - e^{-\lambda t}). \quad (4.2)$$

Початкові умови:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, V_x(0) = V \cos \alpha, V_y(0) = V \sin \alpha.$$

Була розроблена функція для розрахунку траєкторії польоту снаряда по вище вказаним законам за допомогою візуальних сценаріїв розробки Blueprints в ігровому движку Unreal Engine 4. Ця функція продовжує працювати до реєстрації попадання в будь-якому об'єкт. Загальний вигляд який вона має (див. рис. 4.1).

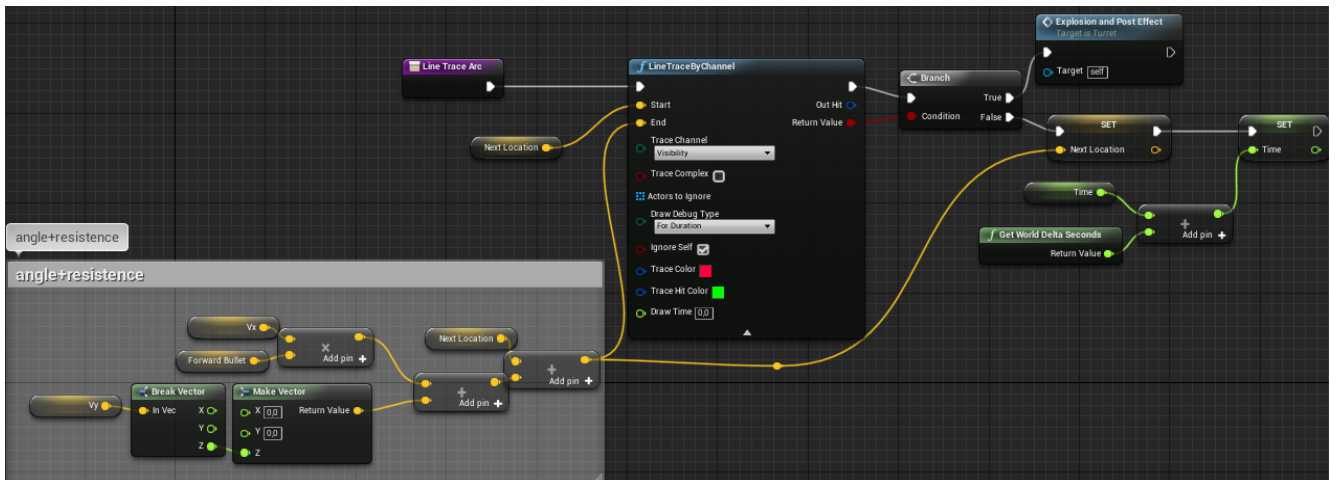


Рисунок 4.1 – Траєкторії польоту снаряда

Коротко о роботі цієї функції: При виклику цієї функції ми за допомогою функції LineTrace починаємо проходити (малювати) шлях нашого снаряда по точкам в просторі, за певний відрізок часу ми проходимо певний відрізок

траєкторії, згідно фізики якої ми для них застосували, заодно перевіряючи перетнули ми по шляху який-небудь об'єкт. Це функція буде визиватися до тих пір поки наш снаряд (в даному випадку матеріальна точка) не перетне колізію якого-небудь об'єкта (ворожий танк, земля, дерево і так далі). в момент реєстрації попадання вона викликає функцію ExplosionAndPostEffect. важливо врахувати внаслідок використання World Delta Seconds у нас не буде помилок в розрахунках траєкторії через різницю в FPS (frames per second) -число кадрів в секунду або потужність різних комп'ютерів та можливістю їх зависаннями. Розрахунок координат точок для кожного відрізка розраховується в функції Res для  $v_x$  (див. рис. 4.2) та для  $v_y$  (див. рис. 4.3) за формулами (4.1) та (4.2) відповідно.

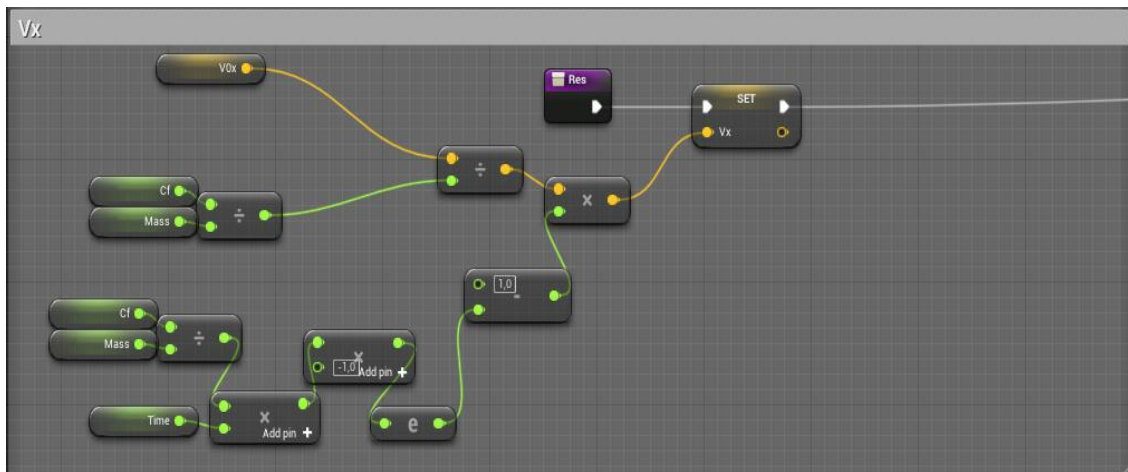


Рисунок 4.2 – Розрахунок координати  $v_x$

Для значення опору повітря нам необхідно коефіцієнт аеродинамічного опору снаряда, яка знаходять за формулою.

$$c_d = \frac{2F_d}{\rho u^2 A}$$

Де  $F_d$ - сила опору, яка, за визначенням, складова сила в напрямку швидкості потоку.  $\rho$  - щільність середовища, кг / м<sup>3</sup>.  $u$  - швидкість потоку (або тіла в потоці), м / с.  $A$  - характерна площа перпендикулярно потоку, м<sup>2</sup>; для довгастих тіл  $S$  приймається як функція від обсягу тіла:  $S = v^{2/3}$ .

Розрахунок опору відбувається в функції DragCoefficient (див. рис. 4.4).

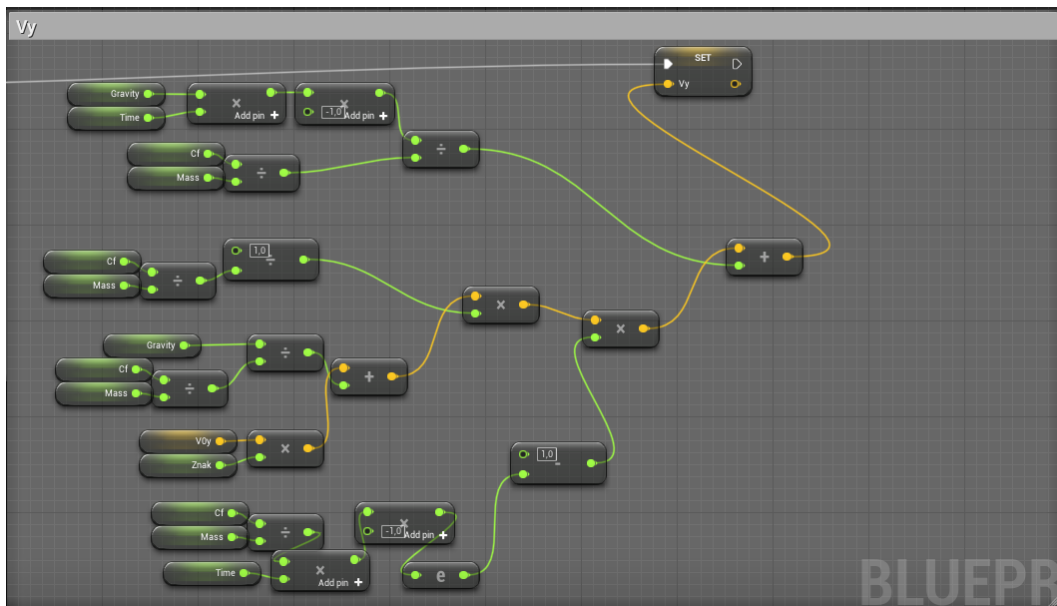


Рисунок 4.3 – Розрахунок координати  $v_y$

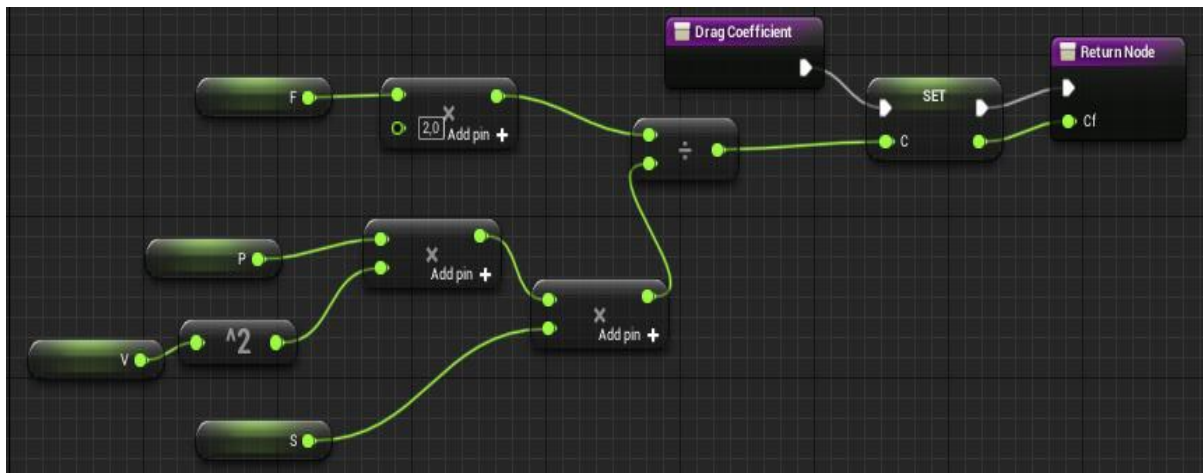


Рисунок 4.4 – Розрахунок опору повітря

Хоча деривація була розглянута в даній дипломній роботі, на даному етапі розробки вона нам непотрібно так як ми вико один тип снарядів що не обертаються при пострілі. Аналогічно до опорної площини для снаряду, вона не обчислюється а приймає у вигляді параметру, так як дана інформація засекречена.

Деривація нам не потрібно знаходити так як в нашому випадку ми маємо танк з гладко ствольною гарматою, та використовуємо оперенні боеприпаси. Опорна площа для снаряду не обчислюється в даній роботі а приймає у вигляді параметру.

Для реалізації розсіювання снарядів було використано нормальний розподіл Гаусса. Який виражається за формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

де  $\mu$  - математичне очікування (середнє значення), медіана і мода розподілу,  $\sigma$  - середньоквадратичне відхилення розподілу.

Розсіювання снарядів дотримується правила трьох сигм ( $3\sigma$ ) - практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини лежать в інтервалі  $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$  де  $\mu$  - математичне очікування і параметр нормальної випадкової величини. Більш точно - приблизно з ймовірністю 0,9972 значення нормально розподіленої випадкової величини лежить в зазначеному інтервалі (див. рис. 4.5).

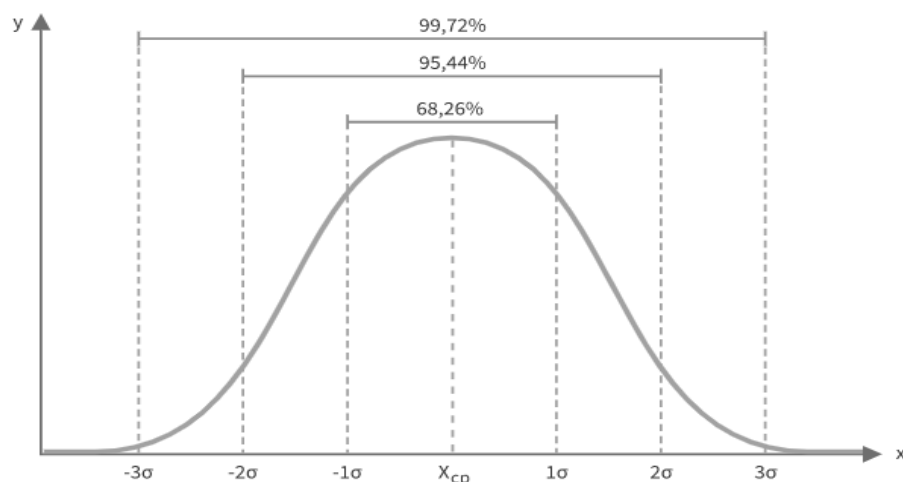


Рисунок 4.5 – Правила трьох сигм

## ВИСНОВКИ

В результаті виконання даної дипломної роботи було визначено вимоги до програмного продукту, проведено проектування ігрового програмного забезпечення з використанням віртуальної реальності, дана оцінка актуальності роботи. У даній роботі було детально розглянуто рух тіла - матеріальної точки в однорідному гравітаційному полі Землі, поняття зони безпеки польотів, особливості та етапи розробки під віртуальну реальність. Вдосконалено навички з питань модулювання та проектування. Для реалізації всього необхідного функціоналу було проаналізовано предметну область, виявлено взаємо відносини між основними об'єктами системи.

Для вирішення даного завдання було необхідно ознайомлення з такими розділами як:

- рішення алгебраїчних рівнянь і систем рівнянь;
- теорія меж і практичне її застосування;
- диференціальні і інтегральні обчислення;
- рішення диференціальних рівнянь першого та другого порядку і систем диференціальних рівнянь;
- закони Ньютона для однорідного гравітаційного поля;
- поняття центру інерції і моменту інерції;
- врахування обертання твердого тіла з застосуванням кутів Ейлера.
- врахування опору середовища руху твердого тіла;

Було побудовано послідовна теорія руху тіл, кинутих під кутом до горизонту з урахуванням розмірів снаряда, його форми і опору середовища. В рамках дипломного проекту були проведені наступні заходи і розроблені практично аспекти балістики:

- аналіз існуючих алгоритмів в балістичних завданнях;
- збір відомостей і аналіз математичних систем для вирішення рівняння руху снаряда;

– була досконально розглянуті проблеми з траєкторію стрільби та занурення в віртуальну реальність, та були знайдені рішення.

– була розроблена достатньо повна механіки балістики снарядів в реальному середовищі з урахуванням опору і розмірів (геометрії) тіла. Яка була реалізована в ігровому продукті.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Тезис ЧОМУ ІЛЮЗІЯ ВИБОРУ КРАЩЕ, НІЖ ВИБІР.  
Агарков Егор Сергеевич, Новиков Юрий Сергеевич URL [https://drive.google.com/file/d/1sJh5kR40tNDKGVggxdP\\_TCIy6XE4ueNz/](https://drive.google.com/file/d/1sJh5kR40tNDKGVggxdP_TCIy6XE4ueNz/)
2. TANK SIMULATOR IN VIRTUAL REALITY AS A METHOD OF TRAINING THE MANAGEMENT OF GROUND MILITARY EQUIPMENT CADETS MILITARY FORCES Artyukhov O.D. Публикация - Wydawca: Sp. z o.o. «Diamond trading tour» Warszawa, 2018.
3. Энциклопедия Кругосвет. Универсальная научно-популярная энциклопедия URL: [https://www.krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/voennaya\\_tehnika/BALLISTIKA.html#1001238-L-102](https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/voennaya_tehnika/BALLISTIKA.html#1001238-L-102).
4. Методичні вказівки до виконання атестаційної роботи магістра від 5.11.2019р  
З.В. Дудар, В.В. Голян, В.І Каук, І.А. Ревенчук – Харків: ХНУРЕ, 2020 – 50с.
5. ЗВІТИ У СФЕРІ НАУКИ І ТЕХНІКИ ДСТУ 3008:2015 Київ ДП УкрНДНЦ 18.04.2016.
6. Залеткін С.Ф., Чисельне розв'язування лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами на великих проміжках інтегрування. - В сб .: Питання конструювання бібліотек програм. М .: Изд - во МГУ, 1985.
7. Зельдович Я.Б., Мишкіс А.Д. Елементи прикладної математики. - М .: Наука, 1965.
8. Ольховський І.І., Курс теоретичної механіки для фізиків. М., Изд-во Моск. ун-ту, 1978; Ольховський І.І., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С., Завдання з теоретичної механіки для фізиків. М., Изд-во Моск. ун-ту, 1977.
9. Курош А.Г., Курс вищої алгебри, М., «Наука», 1971.
10. Яворський Б.М., Детлаф А.А., Довідник з фізики, М., «Наука», 1980.
11. Вержбицький В.М., Чисельні методи. Математичний аналіз і звичайні диференціальні рівняння, М .: «Вища школа», 2001.

12. Деякі завдання балістики як база експериментальних робіт групи додаткової освіти ДНТТМ, що займається за програмою "Практична фізика" Екелекян В.Л.
13. Залеткін С.Ф., О чисельному рішенні задачі Коші для звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь на великих відрізках інтегрування. - В сб .: Обчислювальні методи і програмування. Вип. XXVI. М .: Изд - во МГУ, 1977.
14. Граве І. П., Внутрішня балістика. Піродінаміка, в. 1-4, Л., 1933-37;
15. Гмурман В.Є., Теорія ймовірностей і математична статистика, М., «Вища школа», 1977;
16. Навчання C ++ шляхом створення ігор з UE4 by William Sherif (Автор) 344 стор. February 24, 2015;
17. Unreal Engine розробки ігор за допомогою Blueprints. 354 стор. автор: Нікола Валкасара . 29, 2015;
18. Unreal Engine VR для розробників 256 стор. автор: Митч Макеффри 13 травня 2019 року.