СТАТИСТИЧЕСКОЕ ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. И. Мокин

Кривой Рог

Постановка задачи и исходные предпосылки

Все динамические системы в процессе эксплуатации изменяют свои параметры. Причины этого могут быть различными. Мы рассмотрим только те системы, изменения параметров которых обусловлены износом либо изменением рабочего режима по технологическим условиям, т. е. системы, которые в обычном смысле считаются стационарными.

Очевидно, что даже при очень медленных изменениях в процессе эксплуатации необходим анализ динамики систем с целью выявления новых границ областей устойчивости и изменений характера протекания переходных процессов. Чтобы произвести такой анализ, необходимо знать динамические характеристики исследуемой системы, точное значение которых определяется с помощью решения задачи идентификации.

Методы идентификации динамических систем с указанием преимуществ и недостатков наиболее полно представлены в работах [1, 2]. Определение точных значений характеристик динамических систем сопряжено с большими трудностями, поэтому иногда целесообразнее определять их более простые эквивалентные аналоги, позволяющие проводить исследования без существенных погрешностей.

Если исследуемая система относится к классу диссипативных, а ее входным воздействием является эргодический стационарный случайный процесс (очень часто встречающийся на практике случай), ее эквивалентные динамические характеристики целесообразно определять с помощью метода статистического эквивалентирования, алгоритм которого основан на следующих исходных предпосылках.

1. Передаточная функция системы аппроксимируется выражением

$$W(s) = \frac{K(cs+1)}{bs^2+as+1}, \qquad (1)$$

которое характеризует все физические свойства линейной диссипативной динамической системы, а именно: усиление, инерционность, колебательность и дифференцирование. Большинство линеаризуемых динамических систем в рабочем диапазоне допускают подобную аппроксимацию без существенных погрешностей. Условия применимости выражения (1) для аппроксимации при эквивалентировании будут приведены ниже.

2. Корреляционная функция $R_x(\tau)$ входного воздействия $x(t)$ аппроксимируется экспоненциальным рядом

$$\sum_{l=1}^{(n)} A_l e^{-\alpha_l|\tau|}, \quad \alpha_l = \nu_l + j\mu_l, \tag{2}$$

а взаимная корреляционная функция $R_{yx}(\tau)$ в области $\tau \geqslant 0$ — экспоненциальным рядом

$$\sum_{q=1}^{m} A_q e^{-\gamma_q \tau}, \quad \gamma_q = \nu_q + j\mu_q; \tag{3}$$

$y(t)$ — реакция системы на входное воздействие $x(t)$.

Доказательство возможности такой аппроксимации и рекомендации по определению коэффициентов рядов (2), (3) изложены в работах [3, 4].

3. Значение взаимной корреляционной функции в нуле определяется интегралом

$$R_{yx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,[W(j\omega)]\, S_x(\omega)\, d\omega, \tag{4}$$

отличающимся от приведенного в работе [3] только коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$, в котором $\mathrm{Re}\,[W(j\omega)]$ — вещественная часть АФХ системы $W(j\omega)$; $S_x(\omega)$ — спектральная плотность входного воздействия.

Вывод расчетных соотношений и построение алгоритма

Вследствие того, что

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \tag{5}$$

где $|W(j\omega)|^2$ — квадрат модуля АФХ системы;

$S_y(\omega)$ — спектральная плотность реакции $y(t)$, ее выражение (4) можно представить в виде

$$R_{yx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,[W(j\omega)]}{|W(j\omega)|^2} S_y(\omega)\, d\omega. \tag{6}$$

Определяя $\mathrm{Re}[W(j\omega)]$ и $|W(j\omega)|^2$ для АФХ, соответствующей передаточной функции (1), и подставляя в выражение (6), получим

$$R_{yx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\omega^2(b-ac)}{K(1+\omega^2c^2)} S_y(\omega)\,d\omega = \frac{1}{K}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)\,S_y(\omega)\,d\omega - \right.$$

$$\left. - \frac{b-ac}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega)\,S_y(\omega)\,d\omega\right], \qquad (7)$$

где

$$S_1(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{c}\right)^2+\omega^2} = \frac{2D_1\eta_1}{\eta_1^2+\omega^2}, \qquad (8)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{c}, \quad D_1 = \frac{1}{2c}.$$

Но, как показано в работах [3, 4],

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)\,S_y(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau)\,R_y(-\tau)\,d\tau, \qquad (9)$$

а

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega)\,S_y(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau)\,R_y^*(-\tau)\,d\tau. \qquad (10)$$

Из выражений (8) — (10) следует, что

$$R_1(\tau) = D_1 e^{-\eta_1|\tau|};$$

$$R_y^*(-\tau) = \frac{d^2R_y(-\tau)}{d\tau^2}. \qquad (11)$$

Подставляя соотношения (11) в правую часть выражений (9) и (10) и учитывая, что $R_y(\tau)$ и $R_y^*(\tau)$ функции четные, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)\,S_y(\omega)\,d\omega = 2D_1\int_0^{\infty} R_y(\tau)\,e^{-\eta_1\tau}d\tau = \frac{1}{c}[L_y(s)]_{s=\frac{1}{c}}; \qquad (12)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega)\,S_y(\omega)\,d\omega = 2D_1\int_0^{\infty} R_y^*(\tau)\,e^{-\eta_1\tau}d\tau = \frac{1}{c}[L_{y'}(s)]_{s=\frac{1}{c}}, \qquad (13)$$

где $L_y(s)$, $L_{y'}(s)$ — преобразование Лапласа корреляционной функции $R_y(\tau)$ и ее второй производной $R_y^*(\tau)$.

Подставляя выражения (12) и (13) в (7), получим

$$R_{yx}(0) = \frac{1}{K}\left[\frac{1}{c} L_y(s) + \frac{b-ac}{c} L_{y'}(s)\right]_{s=\frac{1}{c}}. \qquad (14)$$

Значение взаимной корреляционной функции в нуле можно также получить, если функцию $R_x(\tau)$ в уравнении Винера—Хопфа

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau-\theta)\, g(\theta)\, d\theta \qquad (15)$$

представить в виде экспоненциального ряда (2) при $\tau = 0$, т. е.

$$R_{yx}(0) = \int_0^\infty \sum_{l=1}^{n} A_l e^{-\alpha_l|-\theta|} g(\theta)\, d\theta = \sum_{l=1}^{n} A_l [W(s)]_{s=\alpha_l}. \qquad (16)$$

Если в уравнение (16) подставить соотношение (1), получим

$$R_{yx}(0) = \sum_{l=1}^{n} \frac{A_l K(c\alpha_l + 1)}{b\alpha_l^2 + a\alpha_l + 1}. \qquad (17)$$

Известно [2, 3, 4], что коэффициент передачи K диссипативной динамической системы может быть определен по одной из формул:

$$K = \frac{m_y}{m_x}; \qquad (18)$$

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)d\tau}; \qquad (18')$$

$$K = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)\, d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, d\tau}}. \qquad (18'')$$

Следует отметить, что формула (18), связывающая математические ожидания m_x, m_y процессов $x(t)$, $y(t)$, и (18″) может быть использована только для одномерных динамических систем.

Так как передаточная функция (1) содержит четыре неизвестных коэффициента, то кроме уравнений (14), (17) и (18) для построения алгоритма их определения необходимо иметь еще одно уравнение. Для этой цели запишем уравнение Винера—Хопфа для выхода

$$R_y(\tau) = \int_0^\infty R_{yx}(\tau+\theta)\, g(\theta)\, d\theta \qquad (19)$$

и, подставив в него экспоненциальное разложение (3) функции $R_{yx}(\tau)$ в области $\tau \geqslant 0$, определим дисперсию $R_y(0)$

$$R_y(0) = \int_0^\infty \sum_{q=1}^{m} H_q e^{-\gamma_q \theta} g(\theta)\, d\theta = \sum_{q=1}^{m} H_q [W(s)]_{s=\gamma_q}. \qquad (20)$$

Если подставить в соотношение (20) выражение (1), получим нужное нам четвертое уравнение

$$R_y(0) = \sum_{q=1}^{m} \frac{H_q K (c\gamma_q + 1)}{b\gamma_q^2 + a\gamma_q + 1}. \qquad (21)$$

В результате алгоритм статистического эквивалентирования диссипативных динамических систем можно построить следующим образом:

а) по известной методике [5] рассчитать корреляционные функции $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$, $R_{yx}(\tau)$, а в случае необходимости и математические ожидания m_x, m_y;

б) по одной из формул (18—18″) определить коэффициент K;

в) по известной $R_y(\tau)$ определить $R_y^*(0)$, воспользовавшись любым известным методом ее аппроксимации в окрестности точки $\tau = 0$, следует отметить, что $R_y^*(0)$ — дисперсия производной выходного процесса, поэтому для ее определения можно воспользоваться также простейшим устройством, состоящим из дифференцирующей цепочки и интегратора;

г) определить коэффициенты экспоненциальных рядов (2) и (3) по заданным графически или численно функциям $R_x(\tau)$, $R_{yx}(\tau)$;

д) рассчитать коэффициенты a, b, c, решив систему трех уравнений (14), (17), (21).

Если передаточная функция динамической системы не может быть заменена эквивалентной даже в рабочем режиме, система уравнений (14), (17), (21) будет несовместной, т. е. не имеющей решения.

Предложенный метод статистического эквивалентирования относится к классу корректных, а в данном классе — к числу самых простых, так как его алгоритм не требует регуляризации. В связи с тем, что доказательство корректности данного класса методов представляет собой самостоятельную работу, которая вдвое увеличивала бы объем данной статьи, оно будет опубликовано отдельно.

ВЫВОД

Предложен корректный метод статистического эквивалентирования диссипативных динамических систем, позволяющий, в отличие от методов идентификации, определять не точные (часто очень сложные) выражения для динамических характеристик, а эквивалентные, использование которых намного упрощает анализ исследуемых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Ордынцев. Математическое описание объектов автоматизации. Изд-во «Машиностроение», 1965.
2. Я. А. Гельфандбейн. Методы кибернетической диагностики динамических систем. Изд-во «Зинатне», Рига, 1967.
3. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Изд-во «Советское радио», 1963.
4. А. Н. Скляревич. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем. Изд-во «Наука», 1965.
5. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.

ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ОБОГАТИТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

В. И. Салыга, А. Т. Акулов, Н. Р. Хаджиков

Харьков

В последнее время значительно увеличивается число задач, для решения которых необходимо применение адаптивных принципов управления. Это обусловлено сложностью новых объектов автоматизации и изменчивостью их характеристик, а также повышением требований к эффективности систем автоматического управления. В частности, к сложным стохастическим объектам относятся и обогатительные процессы, которые характеризуются многофакторностью, наличием на входе и выходе неконтролируемых параметров, изменением характеристик основных воздействий в широких пределах, значительными запаздываниями по основным каналам управления, распределенностью параметров и т. д. [1]. Практическое применение методов адаптации неизбежно связано с исследованием целого комплекса проблем. Одной из основных проблем является получение информации об управляемом объекте, оценка параметров, т. е. его идентификация. Эта задача представляет собой самостоятельную сложную проблему теории автоматического управления. Однако ее решение во многом определяет структуру и качество работы автоматической системы управления.

В данной работе рассматривается применение вероятностных итеративных методов, в частности метода стохастической аппроксимации, при построении статистической модели флотопроцесса. Статическая модель процесса представлялась в виде [5]

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \qquad (1)$$

где x_i — входные параметры объекта;

a_i — неизвестные коэффициенты, описывающие объект.