

УДК 519.23-25

Н.И. ЧИСЛИН

## ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕПЕЙ МАРКОВА С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ И МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ ПСИХИКИ

Психика человека характеризуется последовательной сменой состояний, происходящей вследствие воздействия внешних факторов (которые можно считать случайными) и в зависимости от состояния, в котором она до этого находилась. Очевидно, что для математического описания процесса смены психических состояний можно использовать аппарат цепей Маркова. Устойчивость психики можно охарактеризовать как примерное постоянство отношения долей времени нахождения в различных психических состояниях, или, на языке описания марковских процессов, стационарность распределения цепи. Условия стационарности распределений цепей Маркова достаточно хорошо разработаны в классической теории, но следует заметить, что число возможных психических состояний, особенно на начальных этапах развития, непрерывно меняется, т.е. стационарность в общепринятом понимании невозможна. Однако если использовать модель цепей Маркова с переменным числом состояний, то в этом случае можно выделить классы распределений, аналогичные по своему значению стационарному распределению классической модели. Такие цепи рассматривались нами ранее, причем были получены условия эргодичности для специального класса таких цепей [1]. Здесь рассматриваются более общие условия эргодичности, аналогичные условиям, полученным Дж. Хайналом [2] для неоднородных цепей Маркова с постоянным числом состояний.

Прежде чем анализировать условия эргодичности для цепей Маркова с переменным числом состояний, заметим, что используемые далее понятия согласованного класса и представителя класса определены в [1]. Потребуется также следующие определения.

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть вероятности переходов в цепи с переменным числом состояний, принимающей в моменты времени  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) значения из множества состояний  $I_k$ , задаются последовательностью прямоугольных стохастических матриц  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Если для всех  $k \geq 0, n \geq 1$  элементы  $h_{ij}^{(k,n)}$  матриц

$$H_{k,n} = \prod_{j=1}^{k+n} P_j$$

удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{j \in I_{k+n+1}} \max_{i, l \in I_k} |h_{ij}^{(k,n)} - h_{lj}^{(k,n)}| = 0,$$

то такую цепь будем называть эргодической в слабом смысле.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть цепь Маркова с переменным числом состояний, в которой вероятности переходов в моменты времени  $k = 1, 2, \dots$ , между множествами состояний  $I_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) задаются последовательностью прямоугольных стохастических матриц  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ , является эргодической в слабом смысле. Пусть также существует согласованный класс распределений  $\pi$ , представители которого  $\pi_k$  заданы на соответствующих множествах состояний  $I_k$ . Если для распределений вероятностей состояний цепи  $p_k$  в моменты времени  $k$  ( $p_{k+n+1} = p_k H_{k,n}, k \geq 0$ ), независимо от характера начального распределения  $p_0$ , выполняются предельные соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{i \in I_k} |p_{ki} - \pi_{ki}| = 0,$$

где  $p_{ki}$ ,  $\pi_{ki}$  —  $i$ -е компоненты векторов распределений  $p_k$  и  $\pi_k$  соответственно, то такую цепь будем называть эргодической в сильном смысле с предельным распределением из согласованного класса распределений  $\pi$ .

Рассмотрим условия, при которых марковская цепь с переменным числом состояний будет эргодической в слабом смысле. Для этого необходимо выделить классы прямоугольных стохастических матриц, которые удовлетворяли бы следующим требованиям: 1) произведение двух матриц из которых хотя бы одна принадлежит такому классу, также будет принадлежать этому классу; 2) наличие в последовательности матриц переходных вероятностей за единицу времени некоторой цепи Маркова с изменяющимся числом состояний бесконечного числа матриц, принадлежащих такому классу, гарантирует слабую эргодичность этой цепи.

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть в прямоугольной стохастической матрице  $P = \|p_{ij}\|_{i \in I', j \in I''}$  для любых двух строк  $l, m \in I'$  существует по крайней мере один столбец  $n \in I''$  такой, что одновременно выполняются

неравенства  $p_{ln} > 0$ ,  $p_{nn} > 0$ . Такие матрицы будем называть перемешивающими.

В качестве характеристики “перемешивающей силы” матриц  $P_k$  и  $H_{k,n}$  используем меру

$$\mu_S(P) = \min_{l, m \in I^n} \sum_{n \in I^n} \min(p_{ln}, p_{mn}).$$

Мера  $\mu_S(\cdot)$  обладает такими свойствами: 1)  $0 \leq \mu_S(P) \leq 1$  для любой стохастической матрицы  $P$ ; 2)  $\mu_S(P) = 0$  только в том случае, когда матрица  $P$  – не перемешивающая; 3)  $\mu_S(P) = 1$  тогда и только тогда, когда все строки матрицы  $P$  идентичны.

Следующие леммы показывают, что класс перемешивающих матриц замкнут по умножению.

**Лемма 1.** Если  $L$  и  $M$  – прямоугольные стохастические матрицы такие, что для них определено произведение  $Q = LM$ , то  $\mu_S(Q) \geq \mu_S(L)$ .

**Лемма 2.** Если  $L$  и  $M$  – прямоугольные стохастические матрицы такие, что для них определено произведение  $Q = LM$ , и хотя бы одна из них – перемешивающая, то перемешивающей является и матрица  $Q$ .

Далее потребуются не только мера “перемешивающей силы” отдельной матрицы, но и мера “аккумулированной перемешивающей силы” произведения матриц. Для этого воспользуемся мерой  $\mu_D(\cdot)$ , которая определяется следующим образом: для всякой матрицы  $P = \|p_{ij}\|_{i \in I^n, j \in I^n}$

$$\mu_D(P) = \max_{j \in I^n} \max_{i, k \in I^m} |p_{ij} - p_{kj}|.$$

Заметим, что для любых  $k$  и  $n$   $\mu_D(H_{k,n}) = 0$  только тогда, когда все строки матрицы  $H_{k,n}$  идентичны, т.е.  $\mu_D(H_{k,n})$  является грубым аналогом для  $1 - \mu_S(H_{k,n})$ . Но, если  $1 - \mu_S(H_{k,n})$  с ростом  $n$  может только убывать,  $\mu_D(H_{k,n})$  может как убывать, так и возрастать.

**Лемма 3.** Если  $F = PG$ , где  $P$  и  $G$  – прямоугольные стохастические матрицы, то

$$\mu_D(F) \leq (1 - \mu_S(P))\mu_D(G).$$

Доказательства лемм 1–3 строятся по схеме доказательств соответст-

вующих лемм в [2].

Чтобы сформулировать общие условия слабой эргодичности, необходимо рассмотреть следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для любой цепи Маркова с переменным числом состояний и для любых  $k$  и  $n$  справедливы неравенства

$$\mu_D(H_{k,n}) \leq \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \mu_S(P_{k+j})) \mu_D(P_{k+n}).$$

Доказательство следует из леммы 3.

**Теорема 2.** Цепь Маркова с переменным числом состояний является эргодической в слабом смысле в том и только в том случае, когда из последовательности матриц переходных вероятностей за один шаг  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$  можно выделить такую подпоследовательность  $\{P_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ , что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_S(H_{k_i, k_{i+1}-k_i}) \text{ расходится.}$$

Доказательство. Известно, что ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_S(H_{k_i, k_{i+1}-k_i})$  расходится в том и только в том случае, когда

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \mu_S(H_{k_i, k_{i+1}-k_i})) = 0.$$

Отсюда, исходя из теоремы 1 и из того, что для всякого  $k$  справедливо неравенство  $\mu_D(P_k) \leq 1$ , следует достаточность условия теоремы.

Чтобы доказать его необходимость, предположим, что цепь эргодична. Тогда, по определению,  $\mu_S(H_{i,n}) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $i$ . Пусть  $\delta > 0$  – произвольная малая постоянная. Можно выбрать  $k_1, k_2, \dots$  таким образом, что

$$\mu_S(H_{k_1, k_2-k_1}) \geq \delta, \mu_S(H_{k_2, k_3-k_2}) > \delta, \mu_S(H_{k_3, k_4-k_3}) > \delta, \dots,$$

т.е. условие теоремы выполняется, что и завершает доказательство.

**Теорема 3.** Если последовательность матриц переходных вероятностей за один шаг  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$  некоторой цепи Маркова с переменным числом состояний содержит подпоследовательность перемешивающих матриц  $\{P_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ , то такая цепь является эргодической в слабом смысле.

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2 и лемм 2 и 3 очевидным образом.

Из определения 2 видно, что слабая эргодичность служит необходимым условием для сильной эргодичности цепей Маркова с переменным числом состояний. Рассмотренные выше теоремы позволяют определить условия, при которых такие цепи будут эргодическими в сильном смысле.

**Теорема 4.** Пусть цепь Маркова, определенная на последовательности множеств состояний  $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ , вероятности переходов между которыми задаются прямоугольными стохастическими матрицами из последовательности  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяет следующим условиям:

1) существует последовательность векторов-распределений  $\{\bar{p}_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $\bar{p}_k = \|\bar{p}_i(k)\|_{i \in I_k}$ , такая, что:

$$а) \sum_{k=1}^{\infty} \max_{j \in I_k} \left| \bar{p}_j(k) - \sum_{i \in I_{k-1}} \bar{p}_i(k-1) p_{ij}(k) \right| < \infty;$$

б)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{i \in I_k} |\bar{p}_i(k) - \pi_{ki}| = 0$ , где  $\pi_{ki}$  —  $i$ -я компонента вектора-распределения  $\pi_k$  — представителя согласованного класса распределений  $\pi$ ;

2) цепь эргодична в слабом смысле.

Тогда такая цепь является эргодической в сильном смысле с предельным распределением из согласованного класса  $\pi$ .

**Доказательство.** В силу слабой эргодичности  $\mu_S(H_{i,n}) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $i$ , т.е. при достаточно больших  $n$  матрица  $H_{i,n}$  достаточно близка к некоторой матрице с идентичными строками  $S_{i,n}$ , или, что то же самое, матрица  $V_{i,n} H_{i,n} = H_{i,n} - S_{i,n}$  стремится к нулевой матрице. С другой стороны, каждую матрицу переходных вероятностей  $P_k$  можно представить в виде  $P_k = S_k + V_k$ , где  $S_k$  — матрица с идентичными строками, которые совпадают с соответствующим вектором-распределением  $\bar{p}_k$ . Исходя из этого, для  $H_{i,n}$  получим выражение

$$H_{i,n} = \prod_{k=1}^n S_{i+k} + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j S_{i+k} \prod_{l=j+1}^n V_{i+l} + \prod_{j=1}^n V_{i+j}. \quad (1)$$

Заметим, что в (1) из всех слагаемых только  $\prod_{k=1}^n S_{i+k}$  является стохастической матрицей, а у остальных слагаемых суммы элементов каждой строки равны нулю. Возвратившись к представлению  $H_{i,n} = S_{i,n} + V_{i,n}$ , отметим, что здесь стохастической является матрица  $S_{i,n}$ , а у матрицы  $V_{i,n}$  суммы элементов каждой строки равны нулю. Кроме того, норма матрицы  $V_{i,n}$  (т.е. величина, равная наибольшему из абсолютных значений ее элементов) и норма матрицы  $\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j S_{i+k} \prod_{l=j+1}^n V_{i+l} + \prod_{j=1}^n V_{i+j}$  с ростом  $n$  стремятся к нулю, поскольку из условия 1 теоремы следует, что при  $k \rightarrow \infty$  к нулю стремится норма матрицы  $V_k$ , а значит, матрицы  $S_{i,n}$  и  $\prod_{k=1}^n S_{i+k}$  при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к одной и той же матрице. Поэтому при достаточно больших  $n$  можно положить

$$S_{i,n} = \prod_{k=1}^n S_{i+k}. \quad (2)$$

Таким образом, при всяком  $i$  распределение цепи  $p_{i+n}$  в случае  $n \rightarrow \infty$  стремится к распределению  $\bar{p}_{i+n}$ , а в силу условия 1, б теоремы – к распределению  $\pi_{i+n}$  из согласованного класса распределений  $\pi$ .

Рассмотренная модель, благодаря ее эргодическим свойствам, может быть, в частности, использована для задания правил относительно устойчивого поведения систем искусственного интеллекта при меняющемся составе множества возможных альтернатив.

Автор выражает признательность проф. В. А. Дикареву за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Список литературы: 1. *Методы и алгоритмы фокусировки распределений марковских процессов* / А.Е. Веприк, С.Н. Герасин, В.А. Дикарев, А.А. Родзинский, Н.И. Числин. Х.: Харьк. техн. ун-т радиоэлектроники, 1997. 160 с. 2. Hajnal J. Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957. Vol. 52. P. 239–265.

Поступила в редколлегию 03.04.98