

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ПРИ ПАЗОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ  
СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ**

В настоящее время наблюдается интенсивное освоение нанодиапазона на молекулярном и атомном уровнях (наномир и нанотехнология). При разработке электронных схем и наномашин существуют определенные трудности, связанные с применением известных теоретических подходов и технических средств, что вызывает необходимость разработки как математического аппарата, так и экспериментальных методов исследования характеристик активных элементов и явлений наномира.

Известны исследования интенсивных резонансных взаимодействий в квантовой электронике [1], параметрического воздействия мощных излучений на твердое тело [2], оптических генераторов на 4-х волновом смещении [3]. Предложена реляционная теория физических взаимодействий в микро- и макромире [4]. Ведутся исследования логических одноэлектронных параметронов [5] и создаются полупроводниковые приборы, в основе которых лежит волновая природа [6]. Однако известные подходы не используют возможности теории подобия и моделирования состояния квантовой системы путем применения соответствующих моделей электрических схем, которые описываются хорошо изученными дифференциальными уравнениями.

Целью работы является определение зависимостей между параметрами физических процессов в квантовой и классической системах, при которых эти процессы будут подобны и воспроизводимы параметрической зонной системой.

В работе [7] показано, что имеется аналогия между уравнениями Маттье и Шредингера, и при определенных условиях решение линейного уравнения Шредингера приводится к классическому результату, полученному для решения уравнения Маттье. Воспользуемся основным уравнением квантовой теории – амплитудным уравнением Шредингера:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - P)\Psi = 0, \quad E = \frac{8\pi^2 m E'}{h^2}, \quad P = \frac{8\pi^2 m P'}{h^2} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\text{при } x=0, \quad \Psi = \Psi_0, \quad \frac{d\Psi}{dx} = 0, \quad x = [-x_0, x_0], \quad \Psi = 0, \quad \Psi' \neq 0, \quad (2)$$

где  $\Psi$  и  $\Psi_0$  – волновая функция системы и ее начальное значение;  $E'$  и  $P'$  – полная и потенциальные энергии системы;  $m$  – масса микрочастицы;  $h$  – постоянная Планка.

В работе [8] установлена возможность моделирования квантовых явлений физическими процессами, происходящими в параметрической зонной (пазонной) системе (PZnS), представляющей собой два магнитных сердечника с обмотками накачки ( $w_1$ ), соединенными последовательно и согласно, а также резонансными ( $w_2$ ) обмотками, соединенными последовательно и встречно (принимается  $w_1 = w_2 = w$ ). Модулируется индуктивность системы контуром накачки, подключенным к выходу генератора накачки. Последовательно с резонансными обмотками включены резистор (активные потери) и линейный конденсатор (рис. 1).

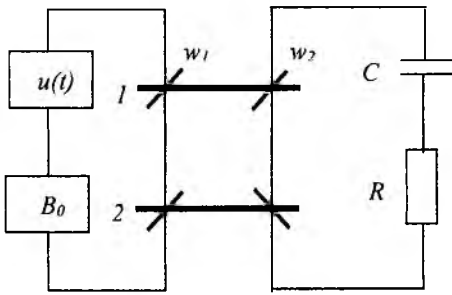


Рис. 1

Процессы в резонансном контуре PZnS без учета потерь на гистерезис и токи Фуко в магнитных сердечниках на основе закона Кирхгофа описываются уравнением [9]:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta(t) \frac{di}{dt} + \omega_0^2(t) i = 0, \quad (3)$$

$$\delta(t) = \frac{L'}{L} - \frac{R}{2L}, \quad \omega_0(t) = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{L''}{L}}, \quad (4)$$

где  $i$  и  $\delta(t)$  – соответственно ток и потери в контуре;  $\omega_0(t)$  – мгновенная частота контура;  $L, L', L''$  – соответственно динамическая индуктивность, ее первая и вторая производные;  $t$  – время.

Нелинейную зависимость напряженности  $H$  и индукции  $B$  магнитного поля в сердечниках аппроксимируем функцией гиперболического синуса  $H = \alpha \cdot sh \beta \cdot B$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные коэффициенты. Пусть напряжение накачки  $u = U_m \cos \omega t$  создает в сердечниках индукцию  $B = B_0 + B_n \sin \omega t$ ,  $B_n = \frac{\beta U_m}{s w}$ , где  $U_m$  и  $\omega$  – амплитудное значение и частота напряжения накачки;  $B_0$  и  $B_n$  – постоянная интегрирования и приведенное амплитудное значение магнитной индукции. Используя законы Кирхгофа и полного тока, получим выражение для динамической индуктивности:

$$L = L_g + \frac{L_0}{ch(B_0 + B_n \sin \omega t)}, \quad L_0 = \frac{s w^2}{\alpha \beta l}, \quad (5)$$

где  $L_g$  – индуктивность воздушной обмотки при  $B_0 = B_n = 0$ ;  $s$  – сечение магнитного сердечника;  $w$  – число витков обмотки накачки;  $l$  – средняя линия магнитного поля сердечника.

Зависимости  $L = f(\omega t)$ , рассчитанные по выражению (5) для значения индукции  $B_0 = B_H = 0$ ;  $B_H = 2, 4, 6$ , приведены на рис. 2а (соответственно кривые 1, 2, 3, 4). Видно, что с увеличением индукции накачки  $B_H$  кривая  $L$  приближается к прямоугольной форме и при  $B_H > 4$  ее уже можно представить в виде прямоугольных импульсов (как приведено на рис. 2б).

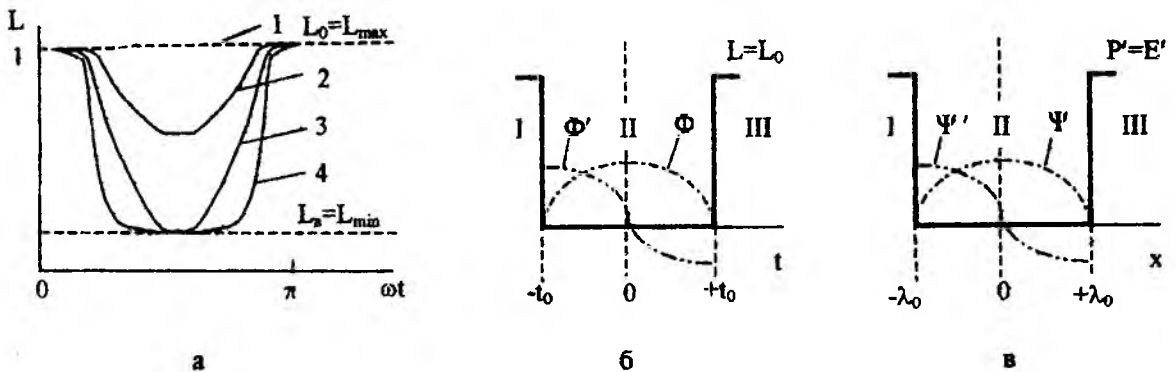


Рис. 2

С помощью преобразования  $i = \Phi_0 \exp\left(-\int_0^t \delta(t) dt\right)$  уравнение (3) приводим к уравнению Хилла:

$$\Phi'' + F(t)\Phi = 0, \quad (6)$$

$$F(t) = \omega_0(t) - \delta^2(t) - \delta'(t). \quad (7)$$

Если в выражении (7) принять  $\delta(t) = \text{const}$ , тогда оно примет более простой вид:  $F(t) = \omega_0(t) - \delta^2(t)$ , причем, при  $u = U_m \cos 2\omega t$  уравнение Хилла сводится к уравнению Матье:

$$\Phi'' + (W - U)\Phi = 0. \quad (8)$$

$$\text{Введем граничные условия в виде: при } t=0, \Phi = \Phi_0, \frac{d\Phi}{dt} = 0, t = [-t_0, t_0] \Phi = 0, \frac{d\Phi}{dt} \neq 0, \quad (9)$$

где  $\Phi_0$  – начальное значение новой переменной.

Принимаем, что в полученном уравнении (8) величины  $\Phi$ ,  $W$ ,  $U$  соответственно волновая функция  $\Psi$ , полная энергии  $E'$ , потенциальной энергии  $P'$ , а время  $t$  – координата  $x$ . Приведем уравнения (1) и (8) к безразмерному виду с учетом следующих преобразований  $\Psi = \bar{\Psi}\Psi_0$ ,  $\Phi = \bar{\Phi}\Phi_0$ , где  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Phi}$  – безразмерные переменные. На рис. 2в приведено грубое приближение потенциальной энергии электрона в атоме в функции координаты  $x$ . Считаем, что “стенки ямы” круты и высоки, но конечны. Базисные постоянные координаты  $x$  и времени  $t$  определены соответственно как расстояние  $\lambda_0$  и время  $t_0$ , в течение которых собственные значения величин были бы постоянными. Для уравнения (1) это соответствует расстоянию  $x$ , для уравнения (8) –  $t$ , т.е. время, равное половине периода изменения динамической индуктивности (рис. 2а, б). В конечных областях  $x = [-\lambda_0, \lambda_0]$  и  $t = [-t_0, t_0]$  переменные  $\Psi$  и  $\Phi$  и их производные гладкие, непрерывные, дифференцируемые, при этом принимаем  $x = \bar{x}\lambda_0$ ,  $t = \bar{t}t_0$ , где  $\bar{x}, \bar{t}$  – безразмерные координаты и время.

После нормализации и соответствующих преобразований уравнений (1) и (8) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\Psi}}{d\bar{x}^2} + [\lambda_0^2(E - P)]\bar{\Psi} &= 0, \\ \frac{d^2\bar{\Phi}}{d\bar{t}^2} + [t_0^2(W - U)]\bar{\Phi} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти уравнения содержат безразмерные переменные и безразмерные параметры, заключенные в квадратные скобки, которые называют комплексами (инвариантами или критериями подобия) соответственно:

$$\pi_\Psi = [\lambda_0^2(E - P)], \quad \pi_\Phi = [t_0^2(W - U)]. \quad (11)$$

В критерии подобия входят физические параметры (свойства системы), масштабы и граничные условия рассматриваемых систем. Проведенные преобразования не изменяют физического смысла уравнений (10) и граничных условий. Функциональная форма решений уравнений (10) зависит от  $\pi$ -комплексов (11), т.е. тождественные решения имеют место в фиксированных (сходственных) точках. Сходственные точки двух систем данного класса задач будут характеризоваться одинаковыми безразмерными переменными.

Отсюда следует, что в сходственных точках двух систем одного класса задач явления развиваются подобным образом при условии равенства  $\pi$ -комплексов (11)  $\pi_\Psi = \pi_\Phi$  или

$$[\lambda_0^2(E - P)] = [t_0^2(W - U)] = idem. \quad (12)$$

Учитывая, что величина  $(E - P)$  имеет размерность волнового числа  $k$ , а величина  $(W - U)$  размерностью частоты  $\omega$ , выражение (12) преобразуем к виду:

$$[k\lambda_0] = [\omega t_0] = idem \text{ или } ch = \left[ \frac{k\lambda_0}{\omega t_0} \right] = 1.$$

Полученный критерий по параметрам оригинала квантовой системы  $k$  и  $\lambda_0$  позволяет определить частоту накачки  $\omega$  и четверть периода модуляции  $t_0/2$  параметра параметрической модели. Кроме того, этот критерий показывает, что существует формальная аналогия исследуемых квантовых и электрических процессов соответственно в пространстве и времени. Если обозначить угловую частоту колебаний в контуре через  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и перейти от времени  $t_0$ , в течение которого параметры системы остаются неизменными к частоте накачки  $\omega_m$ , т.е.  $t_0 = \frac{T_n}{2} = \frac{\pi}{\omega_n}$ , то из правила квантования  $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\pi_n}{2t_0}, n \in Z$ , получим известное соотношение для параметрических зонных систем:

$$\omega_n = \frac{n}{2} \omega_m,$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$  - номер зоны неустойчивости.

Определим связь между условиями квантования в микро- и макросистемах. Из квантовой теории известно, что условия квантования в микросистеме можно записать в виде:

$$n' \lambda_{n'} = 2\pi r = 2\lambda_r, \quad \lambda_r = \pi_r, \quad (13)$$

где  $n'$ -главное квантовое число;  $\lambda_{n'}$ -стационарная длина волны частицы;  $r$ -радиус орбиты;  $\lambda_{nr}$ -длина волны, равная половине длины орбиты с радиусом  $r$ . Переходя в выражении (14) от частоты к периодам соответствующих колебаний, получим  $nt_n = 2t_m$ , где  $t_n$  и  $t_m$  - период пазонных колебаний накачки.

Введем масштабные преобразования:

$$\lambda_{n'} = \lambda_{n'_0} \lambda'_{n'}, \quad t_n = t_{n_0} \bar{t}_n, \quad \lambda_r = \lambda_0 \lambda_r, \quad t_m = t_0 t_m, \quad (14)$$

где  $\lambda_{n'_0}$  -длина волны, соответствующая частоте с боровским радиусом орбиты;  $t_{n_0}$  - период пазонных колебаний синхронного режима;  $\lambda_0$  и  $t_0$  -длина волны и время, в течение которых собственные значения величин  $E'$  и  $W$  были бы постоянными (рис. 2б,в);  $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_m, \bar{t}_n, \bar{t}_m$  безразмерные величины соответствующих переменных параметров.

С учетом преобразований (13) нормализуем уравнения (14):

$$[n' \lambda_{n'_0}] \bar{\lambda}_{n'} - [2\lambda_0] \bar{\lambda}_r = 0, \quad [V_{\lambda'} n t_{n_0}] \bar{t}_n - [2V_{\lambda'} t_0] t_m = 0, \quad (15)$$

где  $V_{\lambda'}$  - функция преобразования.

Эти уравнения подобны, если равны соответствующие масштабные коэффициенты:

$$[n' \lambda_{n'_0}] = [V_{\lambda'} n t_{n_0}], \quad [\lambda_0] = [V_{\lambda'} t_0].$$

Полученные индикаторы позволяют найти коэффициенты преобразования, определяющие связи микро- и макросистем:

$$V_{\lambda t} = \left[ \frac{n' \lambda_{n_0}'}{n t_{n_0}} \right] = \left[ \frac{\lambda_0}{t_0} \right] = idem. \quad (16)$$

Выражение  $V_{\lambda t} = \left[ \frac{\lambda_0}{t_0} \right]$  было получено при анализе уравнений (1) и (11).

После нормализации и соответствующих преобразований приведем уравнения (15) к безразмерному виду

$$\bar{\lambda}_{n'} - \left[ \frac{2\lambda_0}{n' \lambda_{n_0}'} \right] = 0, \quad \bar{t}_n - \left[ \frac{2t_0}{n t_{n_0}} \right] t_m = 0$$

и получим критерии подобия систем:

$$\pi_{\lambda'} = \left[ \frac{2\lambda_0}{n' \lambda_{n_0}'} \right], \quad \pi_{t'} = \left[ \frac{2t_0}{n t_{n_0}} \right],$$

которые связывают соответствующие масштабные коэффициенты и параметры систем. Условия подобия определяются равенством полученных критериев:

$$\left[ \frac{\lambda_0}{n' \lambda_{n_0}'} \right] = \left[ \frac{t_0}{n t_{n_0}} \right] = idem \quad \text{или} \quad \left[ \frac{\lambda_0}{t_0} \frac{n t_{n_0}}{n' \lambda_{n_0}'} \right] = 1. \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) позволяют установить связь условий квантования микро- и макросистем, которая заключается в том, что для подобных систем главное квантовое число  $n'$  и номер зоны неустойчивости  $n$  совпадают. Кроме того, полученный критерий подобия (17) после преобразования легко приводится к критерию подобия (16), полученному при эквивалентности уравнений (1) и (8).

Для установления характера энергетического спектра коллективизированных электронов в кристалле методом слабой связи используют метод Кронига-Пенни. В основу этой модели положена правильная цепочка прямоугольных потенциальных ям (рис. 3а), рассмотренных выше (рис. 2в). Ширина ям равна  $a'$  (область II). Ямы отделены друг от друга потенциальными барьерами толщиной  $b'$  (области I, III) и высотой  $P$ . Постоянная решетки  $c' = a' + b'$ .

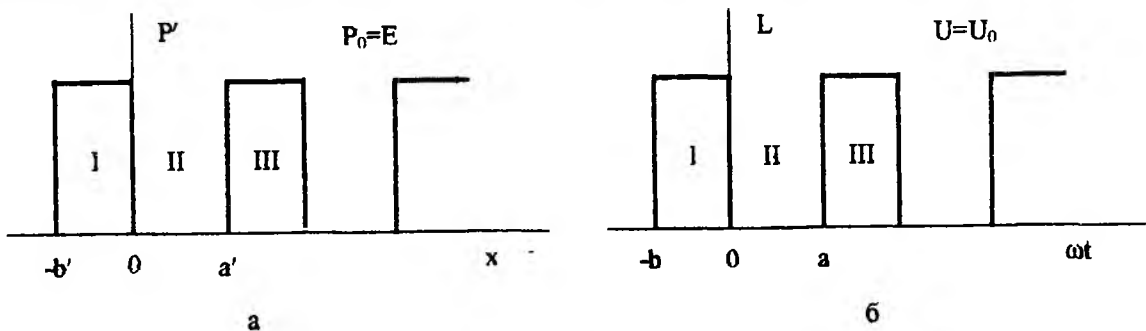


Рис. 3

На рис. 3б приведено прямоугольное приближение изменения динамической индуктивности, рассчитанное по зависимости (5). Участок, соответствующий  $U = 0$  (дно ямы), обозначим через  $a$  (область II),  $U \neq 0$  - аналог потенциальной энергии, будет наблюдаться на участке  $b$  (области I, III), тогда период изменения  $L$  равен  $c = a + b$ .

Опуская простые, но довольно громоздкие преобразования путем «сшивания» решений в областях I, II, III, получим критерий подобия для модели Кронига-Пенни и PZnS в виде

$$ch_{ab} = \left[ \frac{8\pi^2 m a' b' U'}{ab U h^2} \right] = 1.$$

Таким образом, процессы в рассмотренных PZnS могут также описываться уравнением (1), если в качестве независимой переменной  $x$  взять время  $t$ . На основе аналогии определена связь между условиями квантования в микро- и макросистемах, заключающаяся в том, что для подобных систем главное квантовое число  $n'$  и номер зоны неустойчивости  $n$  совпадают. Полученные критерии подобия квантовых микросистем и электрических пазонных систем позволили уточнить условие квантования параметров в классической PZnS, обусловленное интегральной модуляцией реактивного параметра непрерывной накачкой.

Экспериментально подтверждено, что совпадает не только теоретическое описание процессов в PZnS и квантово-механических системах, но и экспериментальные кривые  $L(t)$  или  $\bar{U}(t)$  и  $\Phi(t)$  с большей точностью совпадают с видом кривых  $P'(x)$  и  $\Psi(x)$ . Полученная аналогия дает возможность изучать поведение квантовых частиц в сложных потенциальных полях, математическое описание которых в настоящее время является затруднительным или невозможным.

Полученные результаты можно обобщить следующим образом. Применение методов формализации с одной стороны позволило уточнить свойства и состояние квантовой системы посредством изучения процессов и явлений, происходящих в классической PZnS. С другой стороны устойчивые закономерности, полученные для квантовых систем, можно связать с поведением и состоянием классической PZnS. Это означает, что уравнения Шредингера и Матье играют не только роль языка, описывающего соответствующие процессы, но и подтверждающие их формальную аналогию.

**Список литературы:** 1. Акулин В.Н., Карпов И.В. Интенсивные резонансные взаимодействия в квантовой электронике. М.: Наука, 1987. 312с. 2. Во Хонг Ань. Теория параметрического воздействия электромагнитного излучения большой мощности на твердое тело. М.: Наука, 1985. 200с. 3. Одулов С.Г. и др. Лазеры на динамических решетках. М.: Наука, 1990. 272с. 4. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть. Теория физических взаимодействий. М.: МГУ, 1998. 448с. 5. Коротков А.А., Лихарев К.К. Логический одноэлектронный параметрон // J.Appl.Phys. 1998. 84. P.6114. 6. Транзисторы будущего: использование волновых свойств электронов // Electronics & Wireless World. 1989. V.95. N 1641. P.645. 7. Бриллюэн Л., Пароди Н. Распространение волн в периодических структурах: Пер. с франц.; Под ред. П.Я.Резина. М.: ИИЛ, 1959. 450с. 8. А.с. №1457657 СССР. G 09 B 23/20. Устройство для моделирования состояния микрочастицы в силовом поле. / П.И.Чередников. Опубл. 06.02.85. 9. Чередников П.И. Расчет и проектирование параметрических систем на высших гармониках: Учеб.пос. Харьков: ХПИ. 1980. 98с.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 11.11.2001