

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Семикіній Анастасії Андріївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР
(зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи задача Діріхле для рівняння Пуассона
 $\Delta u(x, y) = f(x, y) = -2$, $(x, y) \in D$, $u(x, y) = 0$,

де D – область прямокутної форми, $D = [(-a, a) \times (-b, b)]$, $a = b = \frac{1}{2}$.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Литвин О.М.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 56 с., 9 табл., 14 рис., 3 дод., 12 джерела.

МЕТОД НІДР, ЗАДАЧА ПУАССОНА, КРАЙОВІ УМОВИ, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, СИСТЕМА НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Об'єкт дослідження – метод НІДР.

Мета роботи – дослідити метод НІДР при розв'язанні крайової задачі кручення стержня прямокутної форми в перерізі.

Методи дослідження – метод ЛІДР, метод НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь).

Атестаційна робота присвячена дослідженню методу НІДР, знаходження точних оцінок наближення диференційовних функцій, знаходження сталих для розрахунку наближеного розв'язку задачі Пуассона, обґрунтування методу НІДР для випадку кручення стержня прямокутної форми в перерізі, що зводиться до нелінійної інтерлінації, системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, розробка алгоритмів розв'язання крайових задач методом НІДР у випадку прямокутної області дослідження, надання результатів обчислення, порівняно з точним розв'язком задачі Пуассона.

ABSTRACT

Introductory note: 56 pages, 9 tables, 14 figures, 3 appendixes, 12 sources.

METHOD NIDE, POISSON PROBLEM, BOUNDARY VALUES, THE DIRICLE TASK, THE SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Object of research – method NIDE.

Purpose of work – investigate the NIDE method in the development of boundary problems of twisting of the rod of the rectangular form in the recess.

Methods of research – method LIDE, method NIDE.

Diploma paper is devoted to the investigate of the NIDE method, finding accurate estimates of the approximation of differential functions, finding constants for calculating the approximate solution of the Poisson problem, substantiation of the NIDE method for the case of the rotation of a rectangular rod in cross section reduced to nonlinear interlinear equations, development of algorithms for solving boundary value problems by the method of NIDE in the case of a rectangular area of study, providing the results of the calculation, compared with the exact solution of the Poisson problem.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми розв’язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР та постановка задач дослідження	10
1.1 Системний аналіз проблеми розв’язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)	10
1.1.1 Вербальна модель системи	10
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	12
1.1.4 Інформаційна модель системи	14
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми розв’язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)	15
1.2.1 Модель аналізу проблеми	15
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	17
1.2.3 Модель вирішення проблеми	22
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	22
1.3.1 Змістовна постановка задачі	22
1.3.2 Формальна постановка задачі	23
1.4 Постановка задач дослідження	23
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	26
2.1 Основні відомості з теорії зведення до систем інтегро-Диференціальних рівнянь, метод НІДР	26
2.2 Метод НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)	27
2.3 Застосування методу НІДР до розв’язання задачі Пуассона	

	7
в прямокутній області	28
3 Програмна реалізація	33
3.1 Mathcad 15.0 як система символної математики.....	33
3.2 Опис програми.....	34
4 Результати обчислювального експерименту	36
5 Аналіз можливих застосувань	47
Висновки	48
Перелік джерел посилання	49
Додаток А Ітерація №1	51
Додаток Б Ітерація №2.....	53
Додаток В Точний розв'язок.....	56

ВСТУП

Атестаційна робота присвячена викладенню основних положень методу нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь (НІДР) та демонстрації його прикладних можливостей на прикладі розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області.

Як відомо, при розв'язанні крайових задач такі методи, як метод розділення змінних, можуть бути ефективним тільки для обмежених класів областей – прямокутника, паралелепіпеда, круга, кулі, циліндру, кільця і т.п.

З іншого боку, варіаційні методи та метод скінчених елементів дозволяють знаходити наближені розв'язки з потрібною точністю як для областей простої форми, так і для областей складної форми, які є об'єднанням заданих класів областей.

Крім того, в класичному методі розділення змінних, як правило, точним розв'язком вважається подання його у вигляді ряду, члени якого є добутками функцій різних змінних. Описане підхід подання розв'язку задачі призводить до необхідності використання спеціальних функцій – функцій Бесселя, Неймана, еліптичних функцій, сферичних поліномів Лежандра та ін.

У результаті описаних вище підходів до розв'язання задачі Пуассона, знаходження наближеного розв'язку з потрібною кількістю значущих цифр після коми, потребує додавання великої кількості членів функціонального ряду.

Актуальність даної роботи полягає у проведенні аналізу результатів обчислюваного експерименту, які показують, що метод зведення до систем НІДР для класичної області – прямокутника дає високу точність наближення до розв'язку задачі Пуассона, яка порівняна з точністю, що отримується при додаванні десятків членів ряду, відповідного класичному методу розділення змінних.

Порівняння наближеного розв'язку з точним проводиться за такими характеристиками, як максимальне значення точного розв'язку в області інтегрування (у механіці це має зміст жорсткості кручення стержня) і максимальне значення диференціального оператора з частинними похідними (що у механіці

має зміст максимального напруження стержня).

Крім того, у даній роботі викладається загальний підхід до розв'язання задачі Пуассона методом НІДР в областях прямокутної форми, паралельними осям координат. В основі цього підходу лежить метод зведення до систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (ЛІДР), який суттєво використовує інтерлінацію функцій.

Результати дослідження, проведеного в даній атестаційній роботі, можуть бути використані для розв'язання проблеми кручення стержня складених областей в перерізі.

Описаний підхід розв'язку задачі методом НІДР також може бути узагальненим для різних значень вхідних даних.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПУАССОНА В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ МЕТОДОМ НІДР ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Задача Діріхле для рівняння Пуассона».

Предмет аналізу – «Аналіз проблеми розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною».

Точка зору: дослідник.

Ціль: Дослідити метод НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь) розв'язання поставленої задачі та подібних до неї задач.

Головним входом для системи, що була досліджена в атестаційній роботі, є система диференціальних рівнянь, крайові умови та вхідні дані до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутній області методом НІДР.

Використавши досліджену систему розв'язання задачі Діріхле, на виході дослідник отримає чисельний розв'язок задачі.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи включає опис зовнішнього середовища, модель «чорний ящик» та модель «білий ящик».

Морфологічний опис системи розглянемо з опису зовнішнього середовища, що приведений на рис. 1.1, та моделі типу «чорний ящик».

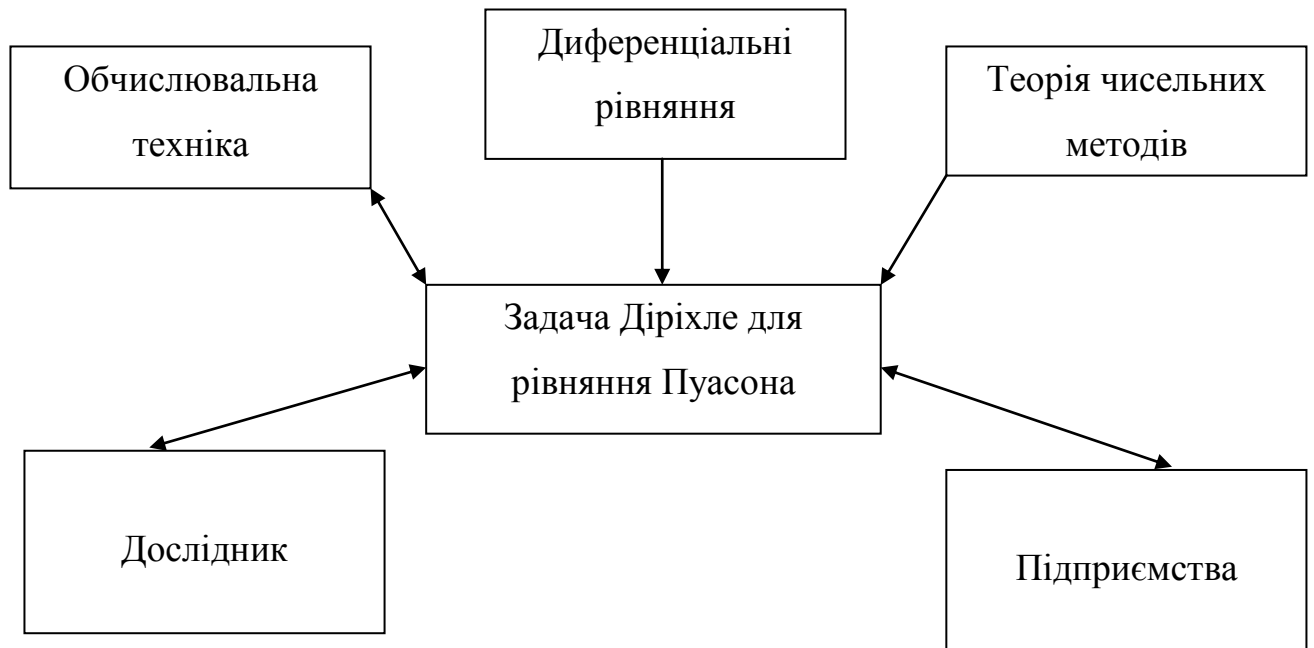


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – сукупність всіх об'єктів, що є за межами системи, зміна властивостей об'єктів зовнішнього середовища впливають на систему, а також ті об'єкти, чії властивості змінюються в результаті поведінки системи.

Модель типу «чорний ящик» на рис. 1.2 акцентує увагу на взаємодії системи із зовнішнім середовищем.

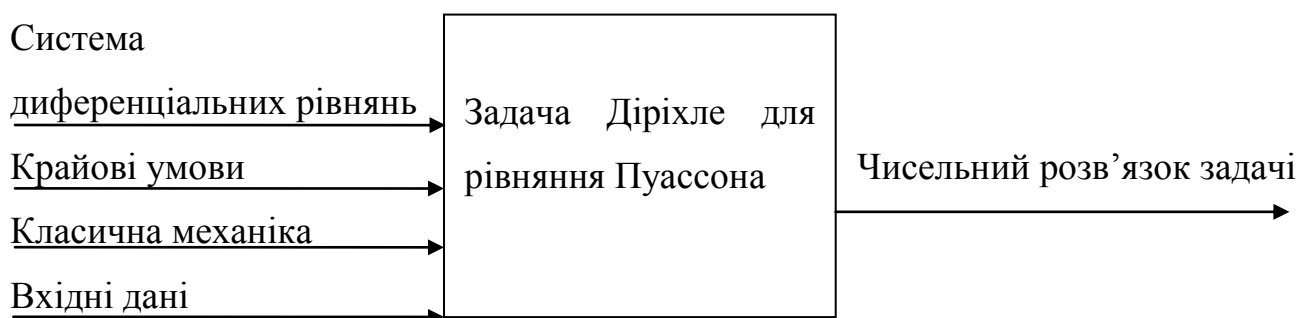


Рисунок 1.2 – Модель типу «чорний ящик»

У моделі типу «чорний ящик» виходами системи є її цільові продукти, а входи – це вплив середовища на систему. Зміст «чорного ящика» не розкривається, тому що увага звертається тільки на межу системи. Межа, в свою чергу,

підкреслює цілісність системи, відокремленість її від зовнішнього середовища і взаємодію системи і середовища.

1.1.3 Функціональна модель системи

Контекстна діаграма є вершиною деревовидної структури діаграм IDEF0 та являє собою загальний опис системи та її взаємодію із зовнішнім середовищем.

Контекстна діаграма зображує функціонування системи в цілому, рис. 1.3. В рамках методології IDEF0 процес представляється у вигляді набору елементів, що взаємодіють між собою, а також відображаються ресурси, що споживаються кожною роботою.

Після опису системи в цілому проводиться розбиття її на великі фрагменти. Цей процес має назву функціональної декомпозиції, а діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодія фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції.

Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні до моменту досягнення потрібного рівня деталізації опису [1, с. 120].

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт на попередній діаграмі. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона». Декомпозиція контекстної діаграми на рис. 1.4 демонструє основні функції системи та їх деталізації за рівнями на рис. 1.5.

IDEF3 – це метод, який за основну мету має дати можливість аналітикам описати ситуацію, коли процеси виконуються в певній послідовності, а також описати об'єкти, які спільно беруть участь в одному процесі.

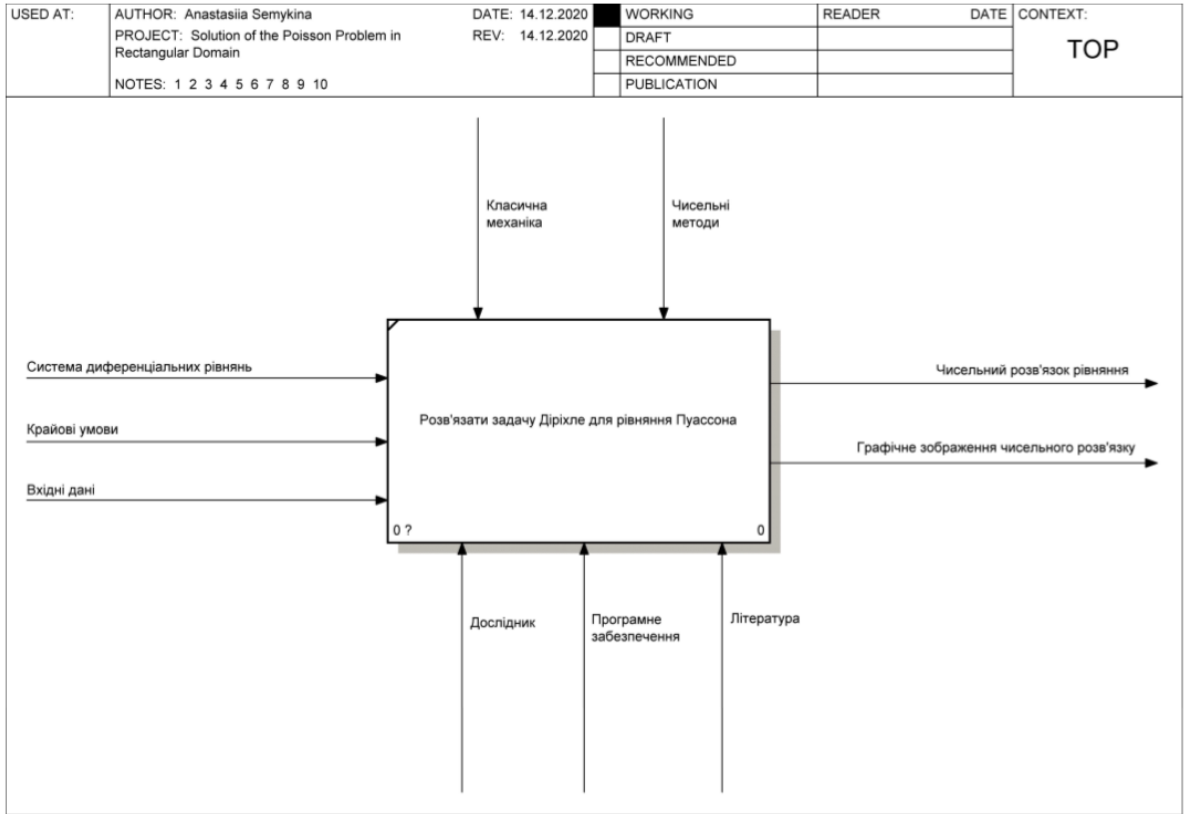


Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма: рівень A0

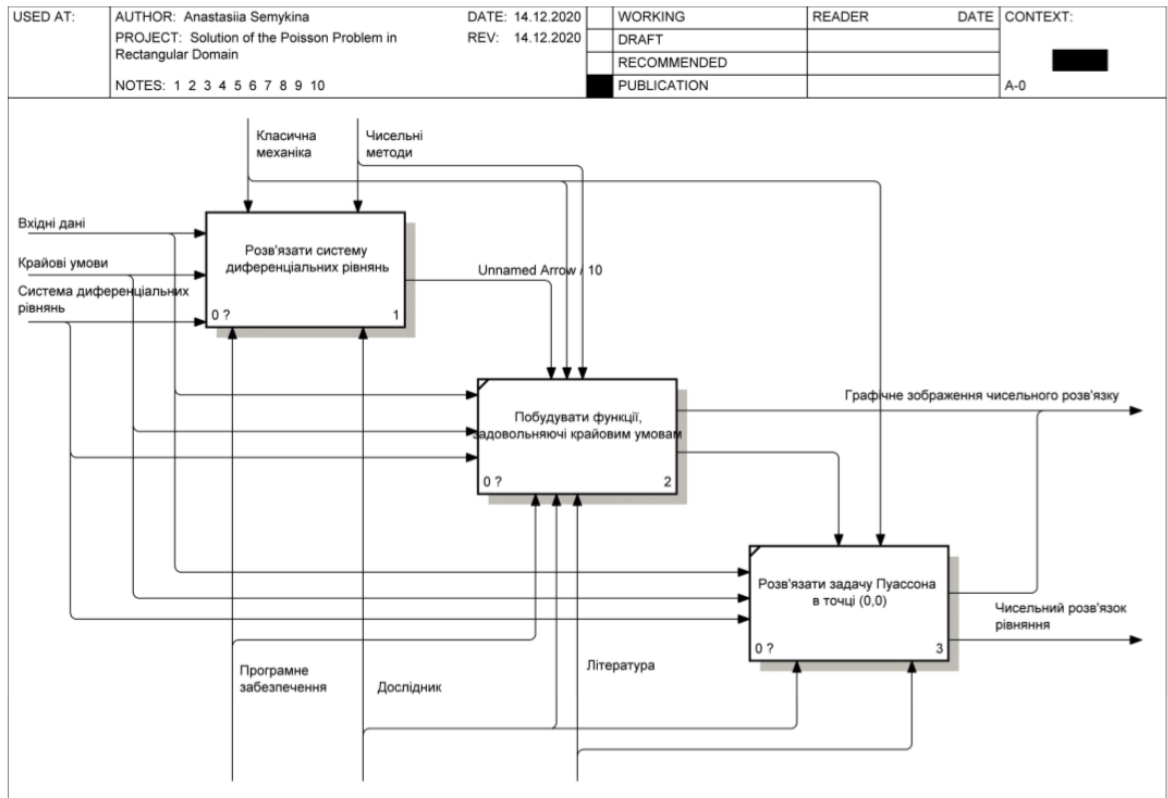


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона»: рівень A0

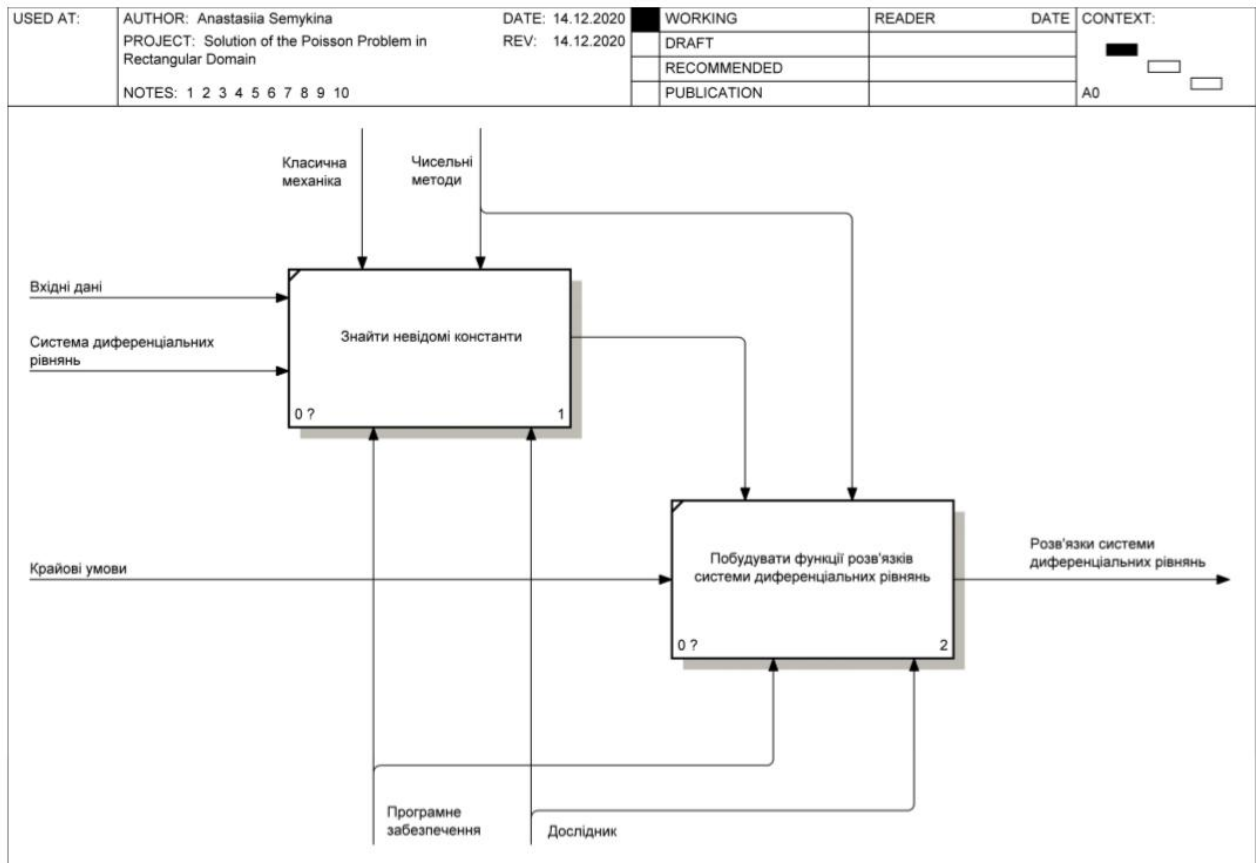


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Розв'язати систему диференціальних рівнянь»: рівень A1

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель системи відображає відносини між елементами системи у вигляді структур даних, акцентуючи увагу дослідника на складі і взаємозв'язку потоків даних [2, с. 132].

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD) застосовуються для опису документообігу та обробки інформації. Подібно до IDEF0, DFD представляє модельну систему як мережу пов'язаних між собою робіт, котрі можна використовувати як доповнення до моделі IDEF0 задля більш наочного відображення поточних операцій.

Головною метою DFD діаграми – є показати, як кожна робота перетворює

свої вхідні дані у вихідні, крім того виявити відносини між роботами. Будь-яка DFD-діаграма може містити роботи, стрілки (потоки даних), зовнішні сутності і сховища даних. DFD-діаграма представлена на рис. 1.6 [3, с. 59].

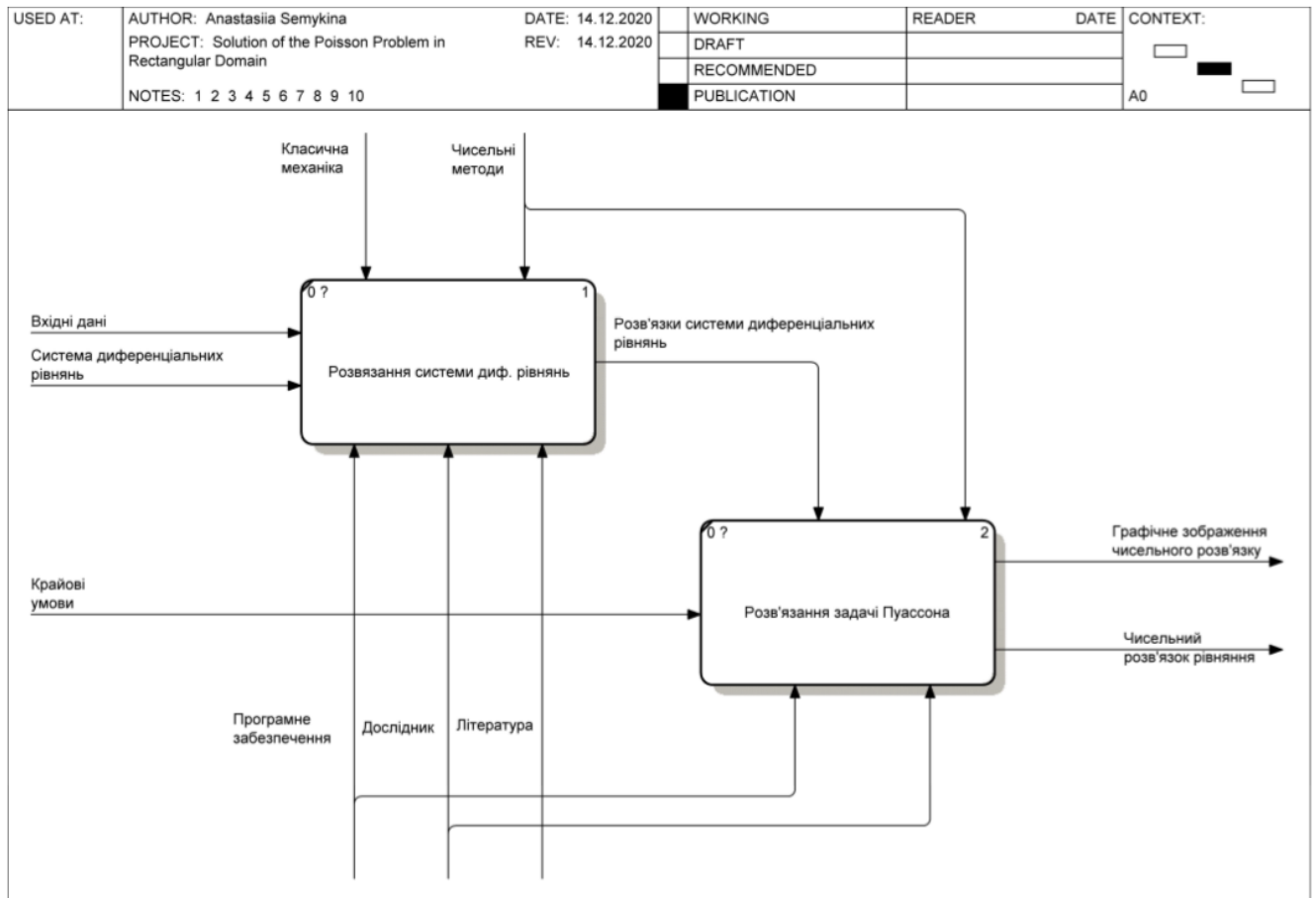


Рисунок 1.6 – DFD-діаграма

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Одним з методів, що застосовують ієрархічний підхід до структуризації

проблеми, є метод аналітичної ієрархії (МАІ) (англ. Analytic Hierarchy Process – АНР), розроблений Т. Сааті (США, 1980 р.) і розвинений його учнями. Метод аналітичної ієрархії реалізує декомпозицію задачі експертного оцінювання на більш прості складові частини. У результаті декомпозиції визначається відносна значимість альтернатив за ієрархічною системою критеріїв. Відносна значимість відображається чисельно у виді векторів пріоритетів.

Отримані значення векторів пріоритетів є оцінками в шкалі відношень та відповідають так названим жорстким оцінкам. Існує ряд модифікацій методу аналітичної ієрархії, які визначаються характером зв'язків між альтернативами і критеріями, а також методом порівняння альтернатив.

Необхідно дослідити задачу про вибір методу, яким буде розв'язана задача Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною в прямокутній області.

Проблема буде вирішуватися за наступними критеріями:

- критерій 1: точність розв'язання;
- критерій 2: задовільність граничних умов;
- критерій 3: середня швидкість обчислень;
- критерій 4: оптимальність.

Обирати будемо з множини альтернатив:

- альтернатива 1: метод НІДР (зведення до системи нелінійних інтегродиференціальних рівнянь);
- альтернатива 2: МСЕ;
- альтернатива 3: метод сіток.

Ідея методу аналізу ієрархій полягає в структуризації задач прийняття рішень шляхом побудови багаторівневої ієрархії, що об'єднує усі компоненти задачі. Таким чином, стає можливим отримання чисельних оцінок інтенсивності взаємовпливу елементів ієрархії, на основі яких оцінюються ступені переваги альтернатив відносно головної мети.

Побудуємо ієрархічну структуру, використовуючи метод парних порівнянь. Ієрархічна структура приведена на рис. 1.7.

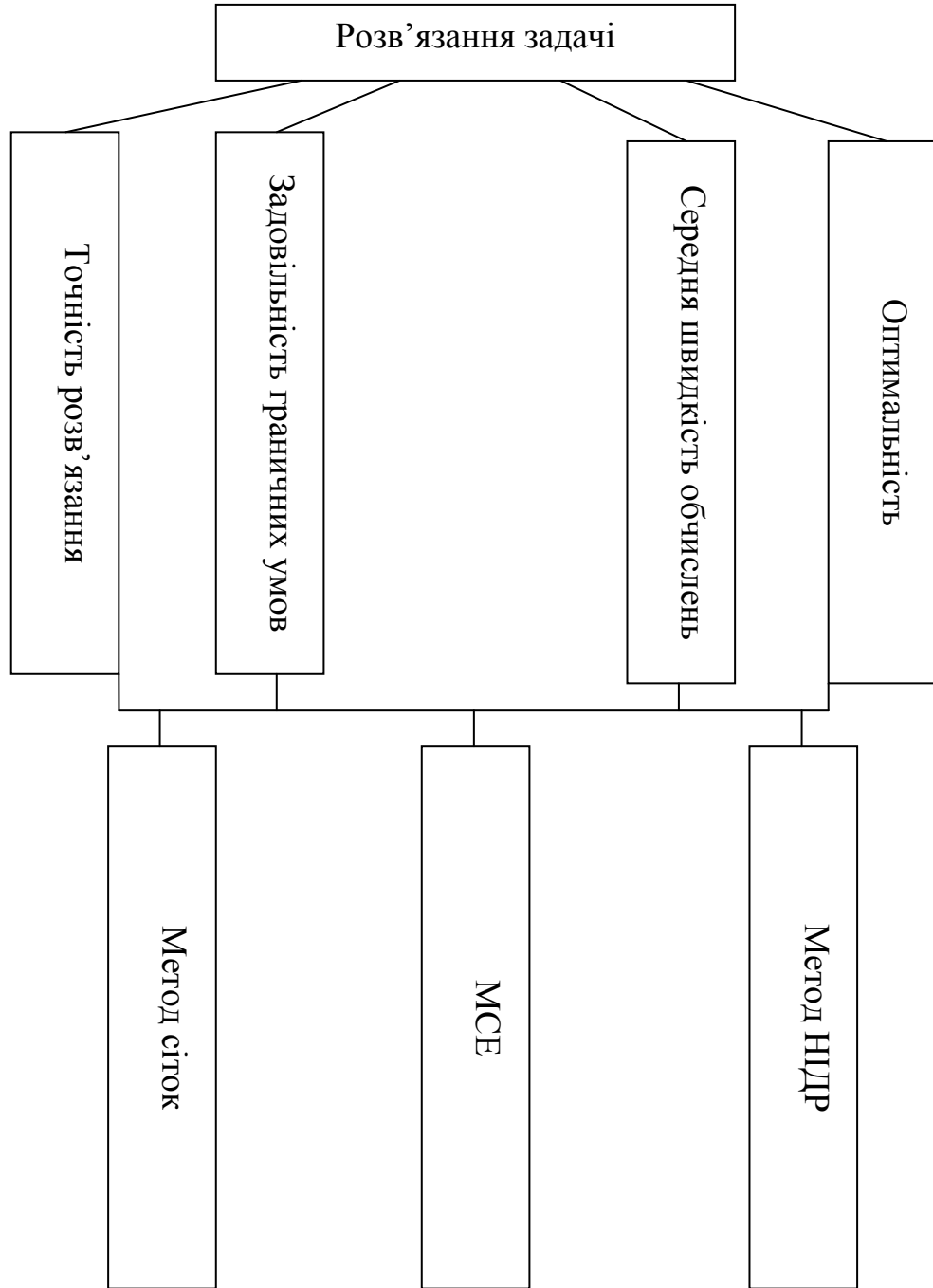


Рисунок 1.7 – Ієрархічна модель процесу аналізу розв'язання задачі

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу методом аналізу ієрархій необхідно побудувати

матриці попарних порівнянь моделі та критеріїв системи. За шкалою Т. Сааті побудована матриця попарних порівнянь критеріїв, результати наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь

	K1	K2	K3	K4	Середнє геометричне за рядками	Вектор пріоритетів
K1	1	4	7	8	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} = 3,86867$	$p_1^K = \frac{x_1}{\Sigma} = 0,582$
K2	$\frac{1}{4}$	1	8	9	$x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 2,05977$	$p_2^K = \frac{x_2}{\Sigma} = 0,310$
K3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$x_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = 0,30739$	$p_3^K = \frac{x_3}{\Sigma} = 0,046$
K4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	2	1	$x_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 1} = 0,40824$	$p_4^K = \frac{x_4}{\Sigma} = 0,061$
					$\Sigma = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ $= 6,64407$	

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,463 - 4}{4 - 1} = 0,154.$$

Випадкова узгодженість = 0,13.

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,154}{0,19} = 0,15 = 15\%.$$

Для прийняття рішення про використання методу, необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив. В даній модифікації МАІ розглядається як ієрархія з однаковими числом і функціональним складом альтернатив.

Шкала відношень Сааті використовується з метою встановлення відносної важливості елементів ієрархії. Отримаємо дані, що представлені в таблицях 1.2 – 1.5, скористувавшись шкалою, що дозволяє експерту ставити у відповідність ступеням переваги одного порівнюваного об'єкта над іншим деяке число,

оцінивши їх щодо кожної з альтернатив.

Випадкова узгодженість для матриць є рівною 0,58.

Таблиця 1.2 – Порівняння альтернатив за першим критерієм

K1	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
A2	6	1	3
A3	7	$\frac{1}{3}$	1

Таблиця 1.3 – Порівняння альтернатив за другим критерієм

K2	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
A2	8	1	5
A3	6	$\frac{1}{5}$	1

Таблиця 1.4 – Порівняння альтернатив за третім критерієм

K3	A1	A2	A3
A1	1	4	$\frac{1}{6}$
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{7}$
A3	6	7	1

Результати порівнянь альтернатив за четвертим критерієм наведені у таб-

лиці 1.5.

Таблиця 1.5 – Порівняння альтернатив за четвертим критерієм

K4	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{3}$	4
A2	3	1	5
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1

Для кожної наведеної вище матриці розраховуємо вектор пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,066 \\ 0,619 \\ 0,315 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,057 \\ 0,719 \\ 0,224 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,187 \\ 0,070 \\ 0,743 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,280 \\ 0,627 \\ 0,094 \end{pmatrix}.$$

Оскільки наведені матриці попарних порівнянь альтернатив – це є матриці третього порядку, то $RI^A = 0,58$. Індеси узгоджені і відносини узгодженості для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним критерієм рівні:

$$CI_{K1}^A = 0,079, \quad CI_{K2}^A = 0,0945, \quad CI_{K3}^A = 0,086, \quad CI_{K4}^A = 0,043,$$

$$CR_{K1}^A = 0,136, \quad CR_{K2}^A = 0,162, \quad CR_{K3}^A = 0,147, \quad CR_{K4}^A = 0,074.$$

Усі розраховані відносини узгодженості близькі до 0,1, що свідчить про високу узгодженість висловлювань експерта.

Обчислимо вектор глобальних пріоритетів альтернатив. З цією метою складемо матрицю з векторів локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,066 & 0,057 & 0,187 & 0,280 \\ 0,619 & 0,719 & 0,070 & 0,627 \\ 0,315 & 0,224 & 0,743 & 0,094 \end{pmatrix},$$

та скористаємося рівнянням

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K.$$

Отже, вектор глобальних пріоритетів дорівнює

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,066 & 0,057 & 0,187 & 0,280 \\ 0,619 & 0,719 & 0,070 & 0,627 \\ 0,315 & 0,224 & 0,743 & 0,094 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,582 \\ 0,310 \\ 0,046 \\ 0,061 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,082 \\ 0,625 \\ 0,292 \end{pmatrix}.$$

Розрахуємо індекс узгодженості і відношення узгодженості для всієї наведеної ієрархії:

$$\begin{aligned}
 CI &= CI^K + \left(\vec{p}^K, \overrightarrow{CI^A} \right) = 0,154 + 0,582 \cdot 0,079 + 0,310 \cdot 0,0945 + \\
 &+ 0,046 \cdot 0,086 + 0,061 \cdot 0,043 = 0,23585, \\
 RI &= RI^K + RI^A = 0,90 + 0,58 = 1,48, \\
 CR &= \frac{CI}{RI} = 0,159,
 \end{aligned}$$

що також можна вважати гарним показником узгодженості.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

У таблиці 1.6 наведені результати, що свідчать про те, що максимальна компонента вектору глобальних пріоритетів відповідає першій альтернативі, тобто методу НІДР.

Таблиця 1.6 – Кінцеві дані

Критерій /Альтернатива	К1	К2	К3	К4	Узагальнені пріоритети
A1	0,066	0,057	0,187	0,280	0,082
A2	0,619	0,719	0,070	0,627	0,625
A3	0,315	0,224	0,743	0,094	0,292

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

У атестаційній роботі був розглянутий пружний стержень з поперечним

перерізом у формі квадрату.

Нехай бокова поверхня стержня є вільною від зовнішніх зусиль, а к його торцям прикладені зовнішні сили, що статично еквівалентні моментам кручення стержня.

Отже, в атестаційній роботі розв'язується задача накручення стержня квадратної форми в перерізі за допомогою зведення її до вирішення системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь [4, с. 15].

1.3.2 Формальна постановка задачі

Необхідно знайти розв'язок $u(x, y)$ диференціального рівняння

$$u''_{xx} + u''_{yy} = -2, \quad (1.1)$$

де $x, y \in D$, $D = [-a, a] \times [-b, b]$.

Розв'язок $u(x, y)$ рівняння (1.1) повинен задовольняти граничній умові Діріхле

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in D,$$

та мати вигляд

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \psi_k(y), N \geq 1, \quad (1.2)$$

де $\varphi_k(x), \psi_k(x), k = \overline{1, N}$, – невідомі функції, що повинні задовольняти наступним граничним умовам

$$\varphi_k(\pm a) = 0, \quad (1.3)$$

$$\psi_k(\pm b) = 0. \quad (1.4)$$

1.4 Постановка задач дослідження

Метою дослідження є розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР (зведення задачі до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь) [5, с. 378].

В рамках атестаційної роботи необхідно провести дві ітерації розрахунків, описаних в розділі 2.3. З метою оцінки результатів дослідження отримані наближені розв'язки $\tilde{u}_1(x, y)$ та $\tilde{u}_2(x, y)$ повинні бути порівняні з точним розв'язком задачі $u_m(x, y)$ за умови, що $x = y = 0$. Точні значення розв'язку задачі Пуассона розраховуються за формулою

$$u_m(x, y) = b^2 - y^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \frac{\cosh \frac{(2k-1)\pi x}{2b}}{\cosh \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2b}. \quad (1.5)$$

Доцільність отриманих результатів має бути досліджена порівнянням значень жорсткості накручення стержня для точного і наближених розв'язків $\tilde{u}_1(x, y)$ та $\tilde{u}_2(x, y)$ при $x = y = 0$. Жорсткість накручення стержня розраховується за формулою

$$J_T = 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a u(x, y) dx dy. \quad (1.6)$$

Максимальне напруження стержня в точці $(-a, 0)$ також має бути розраховано як і для точного розв'язку задачі Пуассона, так і для її наближених

розв'язків $\tilde{u}_1(x, y)$ та $\tilde{u}_2(x, y)$. Максимальне напруження стержня розраховується за формулою

$$\tau = \left. \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} \right|_{x=-a}. \quad (1.7)$$

Результати, отримані у продовж дослідження, повинні бути представлені у вигляді порівняльних таблиць, графіків функцій и поверхонь [6, с. 35].

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Основні відомості з теорії зведення до систем інтегро-диференціальних рівнянь, метод ЛІДР

Як відомо, формули інтерлінації функцій та їх похідних на лініях ректангуляції та триангуляції можуть бути використані для побудови структур наближених розв'язків крайових задач у випадку областей складеної форми, тобто областей, що є обмеженими дугами відомих кривих [7, с. 128].

Також формули інтерлінації функцій можуть бути використані для знаходження наближених розв'язків. Нижче викладено методику наближеного розв'язання граничних задач за допомогою інтерлінації методом ЛІДР.

Загальна ідея методу ЛІДР полягає в наступному: область інтегрування розбивається на елементи (прямокутники, трикутники). Граничні елементи можуть мати криволінійну сторону, яка є частиною межі. Шуканий наближений розв'язок у кожному з цих елементів зображується у вигляді функцій, які забезпечують необхідний порядок диференційовності на лініях розділу різних елементів та забезпечують задовільнення граничним умовам.

Структура наближеного розв'язку залежить від невідомих функцій однієї змінної (як x , так і y), а також від невідомих сталих. Такий підхід дає рівноправність обох змінних при застосуванні методу ЛІДР.

Невідомі функції та сталі розраховуються за умови, що функціонал, відповідний даній граничній задачі, досягає мінімуму, або за умови ортогональності нев'язки до відповідної системи функцій однієї та двох змінних.

Рівноправність змінних у методі ЛІДР є важливою його перевагою перед загальновідомим методом Канторовича (метод ДР), який зводить двовимірну граничну задачу до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Важливим моментом у порівнянні методів є те, що у структуру наближеного розв'язку методу ДР входять невідомі функції тільки однієї змінної (як x або y), тобто змінні не є рівноправними.

Другою важливою перевагою методу ЛІДР є те, що він легко (як і метод скінченних елементів) поширюється на області складеної форми.

Третьою важливою перевагою є наявність можливості побудови наближених розв'язків, що точно задовольняють граничні умови крайової задачі у випадку областей складеної форми (обмежених дугами відомих кривих).

Четвертою, найсуттєвішою перевагою методу ЛІДР, є його висока точність: похибка методу ЛІДР (а також методу скінченних елементів, побудованому на основі сплайн-інтерлінації) при фіксованому розбитті області інтегрування на елементи дорівнює $O(\varepsilon^2)$. Класичний метод скінченних елементів має похибку, що дорівнює $O(\varepsilon)$ [8, с. 145].

2.2 Метод НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь)

Основна концепція методу НІДР полягає в знаходженні наближеного розв'язку крайової задачі. Розв'язок будується у вигляді сплайн-інтерлінанта для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Знайдений розв'язок повинен задовольняти граничним умовам.

Метод ЛІДР є різновидом методу ЛІДР, де основні і допоміжні функції є невідомими [9, с. 232].

Невід'ємною частиною методу НІДР є знаходження всіх сталих і функцій, які є частиною наближеного розв'язку з умови мінімуму функціонала. Функціонал повинен відповідати даній крайовій задачі.

Зазвичай метод НІДР використовується у випадках розбиття області інтегрування на прямокутні підобласті. Загальний випадок базується на використанні формул сплайн-інтерлінації з умовою точного задовільнення граничним умовам на границях областей.

2.3 Застосування методу НІДР до розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області

Метод НІДР буде застосований до розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області $D = [-a, a] \times [-b, b]$. Розглянемо застосування методу НІДР на прикладі першої ітерації розв'язання задачі Пуассона.

Крок 1. Нехай $N = 1$. Підставимо наближений розв'язок (1.2) у наступний функціонал

$$J(\tilde{u}_N) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[(\tilde{u}'_{Nx})^2 + (\tilde{u}'_{Ny})^2 + 4\tilde{u}_N \right] dx dy,$$

прирівняємо до нуля його варіації по функціях φ_1 та ψ_1 [10, с. 345].

В результаті ми отримаємо два нелінійних інтегро-диференціальних рівняння, котрим мають задовольняти наступні невідомі функції

$$\begin{aligned} A_1(\psi_1)\varphi_1''(x) - B_1(\psi_1')\varphi_1(x) &= -2C_1(\psi_1), \quad -a < x < a, \\ A_2(\varphi_1)\psi_1''(y) - B_2(\varphi_1')\psi_1(y) &= -2C_2(\varphi_1), \quad -b < y < b, \end{aligned}$$

де були застосовані наступні позначення

$$\begin{aligned} A_1(\psi_1) &= \int_{-b}^b \psi_1^2(y) dy, \\ B_1(\psi_1') &= \int_{-b}^b \psi_1'^2(y) dy, \\ C_1(\psi_1) &= \int_{-b}^b \psi_1(y) dy, \end{aligned}$$

та відповідно

$$A_2(\varphi_1) = \int_{-a}^a \varphi_1^2(x) dx,$$

$$B_2(\varphi_1') = \int_{-a}^a \varphi_1'^2(x) dx,$$

$$C_2(\varphi_1) = \int_{-a}^a \varphi_1(x) dx.$$

Враховуючи граничні умови, розв'язки рівнянь можна зобразити у наступному вигляді

$$\varphi_1(x) = \frac{2C_1}{B_1} \varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \left(1 - \frac{\cosh(\lambda x)}{\cosh(\lambda a)} \right), \quad (2.1)$$

$$\psi_1(y) = \frac{2C_2}{B_2} \psi_0(y), \quad \psi_0(y) = \left(1 - \frac{\cosh(\mu y)}{\cosh(\mu b)} \right), \quad (2.2)$$

де λ, μ – додатні корені наступних рівнянь

$$A_1 \lambda^2 - B_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$A_2 \mu^2 - B_2 = 0. \quad (2.4)$$

Розв'язок наведеної вище системи рівнянь (2.3) – (2.4) матиме наступний вигляд за умови, що $a = b$

$$\lambda = \frac{1,60611529880276736}{a},$$

$$\mu = \frac{1,60611529880276736}{b}.$$

Напишемо вирази, що є необхідними для розрахунку $\varphi_1(x)$ та $\psi_1(y)$:

$$C_1 = \frac{2C_1}{B_1} \int_{-b}^b \psi_0(y) dy = \frac{2C_1}{B_1} \left(2b - \frac{2 \sinh \mu b}{\mu \cosh \mu b} \right),$$

$$A_1 = \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \int_{-b}^b \psi_0^2(y) dy =$$

$$= \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \left[\cosh^{-2}(\mu b) \left(b + 2b \cosh^2(\mu b) - \frac{3 \sinh(2\mu b)}{2\mu} \right) \right],$$

$$B_1 = \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \int_{-b}^b \psi_0'^2(y) dy = \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \int_{-b}^b \left(\frac{\mu \sinh \mu y}{\cosh \mu b} \right)^2 (y) dy =$$

$$= \frac{\mu^2}{\cosh^2(\mu b)} \left(\frac{\sinh(2\mu b)}{2\mu} - b \right),$$

та відповідно

$$C_2 = \frac{2C_2}{B_2} \int_{-a}^a \varphi_0(x) dx = \frac{2C_2}{B_2} \left(2a - \frac{2 \sinh \lambda a}{\lambda \cosh \lambda a} \right),$$

$$A_2 = \left(\frac{2C_2}{B_2} \right)^2 \int_{-a}^a \varphi_0^2(x) dx =$$

$$= \left(\frac{2C_2}{B_2} \right)^2 \left[\cosh^{-2}(\lambda a) \left(a + 2a \cosh^2(\lambda a) - \frac{3 \sinh(2\lambda a)}{2\lambda} \right) \right],$$

$$B_2 = \left(\frac{2C_2}{B_2} \right)^2 \int_{-a}^a \varphi_0'^2(x) dx = \left(\frac{2C_2}{B_2} \right)^2 \int_{-a}^a \left(\frac{\lambda \sinh \lambda x}{\cosh \lambda a} \right)^2 (x) dx =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\cosh^2(\lambda a)} \left(\frac{\sinh(2\lambda a)}{2\lambda} - a \right).$$

З наведених вище виразів можна дійти до висновку, що система рівнянь

(2.3) – (2.4) еквівалентна

$$A_{10}\lambda^2 - B_{10} = 0, \quad (2.5)$$

$$A_{20}\mu^2 - B_{20} = 0, \quad (2.6)$$

де

$$A_{10} = \int_{-b}^b \psi_0^2(y) dy = \cosh^{-2}(\mu b) \left(b + 2b \cosh^2(\mu b) - \frac{3 \sinh(2\mu b)}{2\mu} \right), \quad (2.7)$$

$$B_{10} = \int_{-b}^b \psi_0'^2(y) dy = \frac{\mu^2}{\cosh^2(\mu b)} \left(\frac{\sinh(2\mu b)}{2\mu} - b \right), \quad (2.8)$$

$$C_{10} = \int_{-b}^b 2\psi_0(y) dy, \quad (2.9)$$

$$A_{20} = \int_{-a}^a \varphi_0^2(x) dx = \cosh^{-2}(\lambda a) \left(a + 2a \cosh^2(\lambda a) - \frac{3 \sinh(2\lambda a)}{2\lambda} \right), \quad (2.10)$$

$$B_{20} = \int_{-a}^a \varphi_0'^2(x) dx = \frac{\lambda^2}{\cosh^2(\lambda a)} \left(\frac{\sinh(2\lambda a)}{2\lambda} - a \right), \quad (2.11)$$

$$C_{20} = \int_{-a}^a 2\varphi_0(x) dx. \quad (2.12)$$

Крок 2. Покладемо $a = b = \frac{1}{2}$ та початкове наближення $\psi_{10}(y) = \cos \frac{\pi y}{2b}$

для знаходження λ_1 . Після розрахунку $A_{10}(\psi_{10})$, $B_{10}(\psi_{10}')$ та $C_{10}(\psi_{10})$ необхідне значення λ_1 може бути знайдено за формулою

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{B_{10}(\psi_{10}')}{A_{10}(\psi_{10})}}. \quad (2.13)$$

Завдяки розрахованим значенням ми маємо змогу скласти рівняння для

$\varphi_1(x)$, що матиме вигляд

$$\varphi_1(x) = \frac{C_{10}(\psi_{10})}{B_{10}(\psi'_{10})} \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{\cosh(\lambda_1 a)} \right). \quad (2.14)$$

Крок 3. Використаємо (2.14) та (2.10) – (2.12) для знаходження значення μ за наступною формулою

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{B_{20}(\varphi'_1)}{A_{20}(\varphi_1)}}. \quad (2.15)$$

Відповідно до отриманих розрахунків ми матимемо змогу розрахувати $\psi_1(y)$ за рівнянням, приведеним нижче

$$\psi_1(y) = \frac{C_{20}(\varphi_1)}{B_{20}(\varphi'_1)} \left(1 - \frac{\cosh(\mu_1 y)}{\cosh(\mu_1 b)} \right). \quad (2.16)$$

Крок 4. Розрахуємо значення розв'язку диференціального рівняння (1.2) при $x = y = 0$ за допомогою розрахованих значень (2.15) та (2.16).

Розв'язок диференціального рівняння на першій ітерації матиме вигляд

$$\tilde{u}_1(0,0) = \varphi_1(0) \cdot \psi_1(0).$$

Наведені вище кроки повторюються для наступних N ітерацій за умови, що розв'язок знаходиться у вигляді (1.2) та задовольняє граничним умовам (1.3) і (1.4).

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathcad 15.0 як система символної математики

Mathcad 15.0 – це система комп'ютерної математики, що є досить популярною в наш час. Система використовується для автоматизації вирішення різноманітних математичних задач в багатьох областях науки, техніки та освіти.

Інтерфейс Mathcad 15.0 є простим для використання користувачем системи. Введення формул і даних може відбуватись як за допомогою клавіатури, так і за допомогою спеціальної панелі інструментів. Робота з Mathcad 15.0 здійснюється в межах робочого листа, де вирази і рівняння відображаються графічно. Даний тип роботи з системою комп'ютерної математики є зручнішим порівняно з текстовим форматом записів в мовах програмування або аналогічних системах комп'ютерної алгебри, наприклад Wolfram Mathematica. В Mathcad 15.0 використовується принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get – «що бачиш, те й отримувеш») при створенні документів.

Сотні операторів і вбудованих функцій наявні в Mathcad 15.0 для вирішення різноманітних технічних задач. Система комп'ютерної математики Mathcad 15.0 надає змогу проводити операції зі скалярними величинами, виконувати чисельні і символні обчислення, працювати з векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші.

Використання Mathcad 15.0 схоже на звичний формат блокнота проектування, але в поєднанні зі зручним математичним представленням, обчислювальними функціями та аналізом одиниць вимірювання. Mathcad 15.0 – це є зручне програмне забезпечення для інженерних розрахунків.

Система Mathcad 15.0 дозволяє представляти результати розрахунків у різних форматах: діаграми, графіки, текст і навіть зображення [11, с. 70].

Серед значних переваг Mathcad 15.0 необхідно виділити наступні:

- розв'язання диференціальних рівнянь, в тому числі і за допомогою чисельних методів;

- можливість побудови двовимірних і тривимірних графіків функцій (доступні різні системи координат, такі як: контурні, векторні і т. д.);
- застосування грецького алфавіту як в тексті, так і в рівняннях;
- можливе виконання обчислень в символьному режимі та відповідно розв’язок систем рівнянь в символьному форматі;
- виконання операцій з матрицями і векторами;
- апроксимація кривих;
- розбиття на підпрограми та їх виконання;
- доступний пошук коренів функцій і многочленів;
- можливі розрахунки з розподілом ймовірностей та проведення інших статистичних обчислень;
- можливий пошук власних векторів і чисел;
- обчислення з різними одиницями вимірювання.

Якщо взяти до уваги всі перераховані вище переваги, то можна зробити висновок, що Mathcad 15.0 повністю задовольняє задачі програмної реалізації метода, котрий був описаний у розділі 2.

3.2 Опис програми

Програма для розв’язання задачі Пуассона методом НІДР (зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь) була виконана у математичному пакеті Mathcad 15.0. Структура програми була створена у Notebook середовища Mathcad 15.0.

Програма була поділена на три логічних блоки: «Ітерація №1» (Додаток А), «Ітерація №2» (Додаток Б) та «Точний розв’язок» (Додаток В).

У першому блоці програми було виконане знаходження невідомих функцій $\varphi_1(x)$ та $\psi_1(y)$, котрі є ключовими для подальшого розрахунку значення наближеного розв’язку $\tilde{y}_1(x, y)$.

У другому блоку програми була відображена друга ітерація розрахунків

наближеного розв'язку задачі Пуассона, знайдені константи, використані для побудови раніше невідомих функцій $\varphi_2(x)$ та $\psi_2(y)$. Функцій, знайдені в другому блоці програми були використані для розрахунку наближеного розв'язку задачі Пуассона при $N = 2$.

У третьому блоці програми був автоматизований розрахунок точного розв'язку задачі Пуассона у вигляді ряду з довільною кількістю членів. Кількість членів ряду можна задавати за допомогою змінної, що була додана до програми.

Кожний з блоків програми має графіки поверхонь, що є розв'язками задачі Пуассона. Тільки перший та другий блоки програми також мають графіки раніше невідомих функцій. Графіки для функцій $\varphi_1(x)$ та $\psi_1(y)$ були побудовані в першому блоці, а для $\varphi_2(x)$ та $\psi_2(y)$ відповідно у другому блоці програми.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Ітерація 1. Розрахунки обчислювального експерименту були проведені за алгоритмом, описаним в розділі 2.3.

Крок 1. Нехай $N = 1$, тоді наближений розв'язок (1.2) будемо шукати у вигляді

$$\tilde{u}_1(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y). \quad (4.1)$$

Крок 2. Покладемо $a = b = \frac{1}{2}$ та скористаємося початковим наближенням

$\psi_{10}(y) = \cos \frac{\pi y}{2b}$ для знаходження λ_1 . Наразі є всі необхідні данні для розрахунку параметрів (2.7), (2.8) та (2.9). Були отримані наступні значення

$$A_{10} = 0,500000,$$

$$B_{10} = 4,934802,$$

$$C_{10} = 1,273240,$$

підставивши отримані величини у (2.13), матимемо

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{4,934802}{0,500000}} = 3,141593,$$

що співпадає зі значенням π [12, с. 109].

Завдяки проведеним розрахункам складемо рівняння (2.14)

$$\varphi_1(x) = \frac{C_{10}(\psi_{10})}{B_{10}(\psi'_{10})} \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{\cosh(\lambda_1 a)} \right) = 0,258012 \left(1 - \frac{\cosh(3,141593x)}{\cosh(1,570797)} \right). \quad (4.2)$$

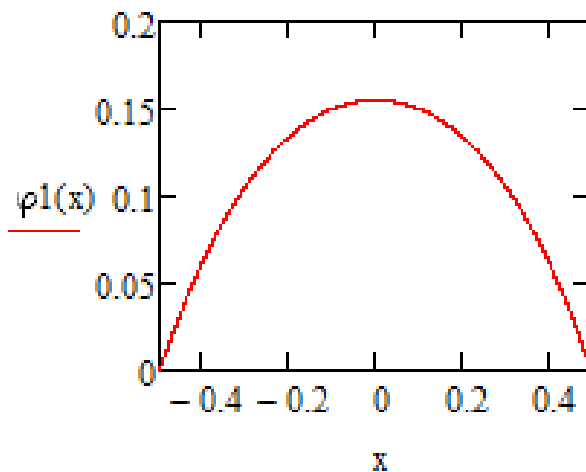


Рисунок 4.1 – Графік функції $\varphi_1(x)$

Крок 3. Використавши складене рівняння для $\varphi_1(x)$ в формулах розрахунків (2.10), (2.11) та (2.12), отримаємо наступні величини

$$A_{20} = 0,013554,$$

$$B_{20} = 0,139632,$$

$$C_{20} = 0,214730,$$

котрі надалі будуть застосовані до розрахунку сталої μ_1 за формулою (2.15)

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{0,139632}{0,013554}} = 3,209697,$$

та відповідно рівняння для $\psi_1(y)$ матиме вигляд

$$\psi_1(y) = \frac{C_{20}(\varphi_1)}{B_{20}(\varphi_1')} \left(1 - \frac{\cosh(\mu_1 y)}{\cosh(\mu_1 b)} \right) = 1,537820 \left(1 - \frac{\cosh(3,209697 y)}{\cosh(1,604849)} \right). \quad (4.3)$$

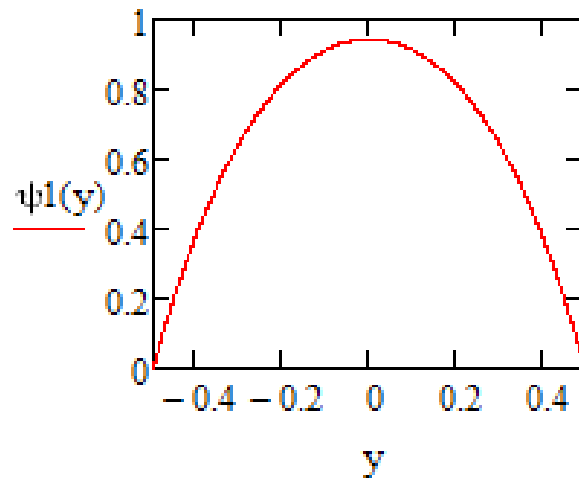
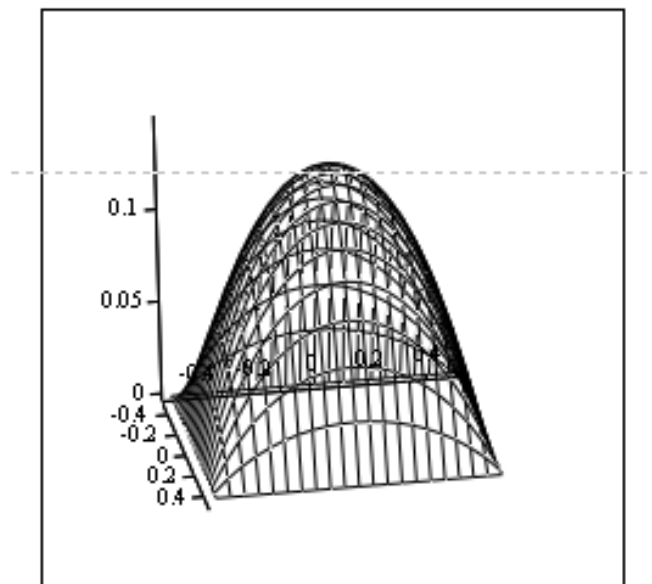


Рисунок 4.2 – Графік функції $\psi_1(y)$

Крок 4. За допомогою знайдених значень (4.2) та (4.3) розрахуємо розв'язок диференціального рівняння (4.1) в точці $x = y = 0$, матимемо наступний результат

$$\tilde{u}_1(0,0) = \varphi_1(0)\psi_1(0) = 0,155185 \cdot 0,943841 = 0,146470.$$



u_1

Рисунок 4.3 – Графік поверхні $\tilde{u}_1(x, y)$

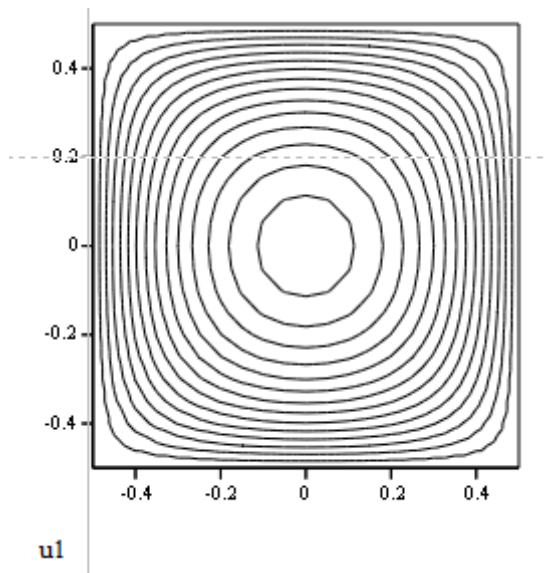


Рисунок 4.4 – Графік ліній рівня поверхні $\tilde{u}_1(x, y)$

З метою подальшої перевірки отриманого результату розрахуємо жорсткість накрученого стержня (1.6), отримаємо

$$\tilde{J}_{T1} = 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \tilde{u}_1(x, y) dx dy = 0,140422$$

та максимальне напруження стержня (1.7) в точці $(-a, 0)$ матиме значення

$$\tilde{\tau}_1 = \left. \frac{\partial \tilde{u}_1(x, 0)}{\partial x} \right|_{x=-a} = 0,701666.$$

Ітерація 2. Крок 1. Нехай $N = 2$, тоді наближений розв'язок (1.2) будемо шукати у вигляді

$$\tilde{u}_2(x, y) = \tilde{u}_1(x, y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y). \quad (4.4)$$

Крок 2. Покладемо початкове наближення $\psi_{20}(y) = y^2 \cos \frac{\pi y}{2b}$ для знахо-

дження λ_2 . Наразі є всі необхідні данні для розрахунку параметрів A_{30} , B_{30} та C_{30} . Були отримані наступні значення

$$A_{30} = \int_{-b}^b \psi_{20}^2(y) dy = 1,284339 \cdot 10^{-3}, \quad (4.5)$$

$$B_{30} = \int_{-b}^b \psi_{20}''(y) \cdot \psi_{20}(y) dy = -0,078021, \quad (4.6)$$

$$C_{30} = \int_{-b}^b 2\psi_{20}(y) dy = 0,060298. \quad (4.7)$$

Підставивши отримані величини у наступну формулу, матимемо

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{B_{30}}{A_{30}}} = 7,794120.$$

На даному етапі не достатньо даних для знаходження $\varphi_2(x)$, так як підставивши $\tilde{y}_2(x, y)$ в диференціальне рівняння (1.1) отримаємо наступне

$$\varphi_1''(x)\psi_1(y) + \varphi_1(x)\psi_1''(y) + \varphi_2''(x)\psi_2(y) + \varphi_2(x)\psi_2''(y) = -2, \quad (4.8)$$

де $\varphi_2(x)$ та $\psi_2(y)$ – невідомі функції.

Зробимо декілька перетворень з отриманим рівнянням (4.8), для зручної подальшої роботи

$$\begin{aligned} \varphi_2''(x)\psi_2(y) + \varphi_2(x)\psi_2''(y) &= -2 - \varphi_1''(x)\psi_1(y) - \varphi_1(x)\psi_1''(y), \\ \varphi_2''(x) \int_{-b}^b \psi_{20}^2(y) + \varphi_2(x) \int_{-b}^b \psi_{20}''(y) \cdot \psi_{20}(y) dy &= -2 \int_{-b}^b \psi_{20}(y) dy - \\ -\varphi_1''(x) \int_{-b}^b \psi_{20}(y)\psi_1(y) dy - \varphi_1(x) \int_{-b}^b \psi_{20}(y)\psi_1''(y) dy, \end{aligned}$$

$$\varphi_2''(x)A_{30} + \varphi_2(x)B_{30} = -C_{30} - \varphi_1''(x)C_4 - \varphi_1(x)C_5,$$

де значення констант A_{30} , B_{30} , та C_{30} відповідають вже розрахованим (4.5), (4.6) та (4.7), а

$$C_4 = \int_{-b}^b \psi_{20}(y)\psi_1(y)dy = 0,017690,$$

$$C_5 = \int_{-b}^b \psi_{20}(y)\psi_1''(y)dy = -0,295401.$$

Знайдемо $\varphi_2(x)$ як розв'язок інтегро-диференціального рівняння у наступному вигляді

$$\varphi_2(x) = -C_8 \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_2 x)}{\cosh(\lambda_2 a)} \right) - C_7 \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{\cosh(\lambda_1 a)} \right) + C_6 + C_7 + C_8, \quad (4.9)$$

де

$$C_6 = \frac{-C_{30} - \frac{C_{10}}{B_{10}} C_5}{B_{30}} = -0,204039,$$

$$C_7 = \frac{\frac{C_{10}}{B_{10}} C_4 \lambda_1^2 + \frac{C_{10}}{B_{10}} C_5}{\lambda_1^2 A_{30} + B_{30}} = 0,477009,$$

та C_8 розраховується з умови, що

$$C_6 + C_7 + C_8 = 0,$$

тобто $C_8 = 0 - C_6 - C_7 = -0,272970$.

Завдяки проведеним розрахункам складемо рівняння (4.9)

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= -C_8 \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_2 x)}{\cosh(\lambda_2 a)} \right) - C_7 \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{\cosh(\lambda_1 a)} \right) = \\ &= 0,272970 \left(1 - \frac{\cosh(7,794120x)}{\cosh(3,89706)} \right) - 0,477009 \left(1 - \frac{\cosh(3,141593x)}{\cosh(1,570797)} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

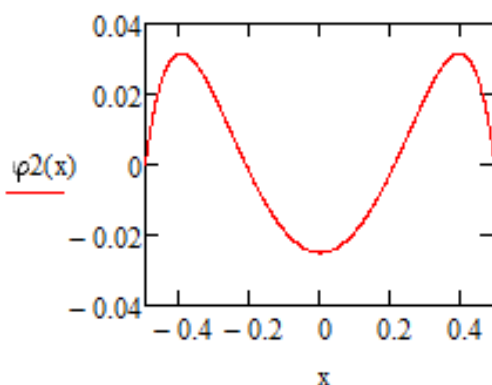


Рисунок 4.5 – Графік функції $\varphi_2(x)$

Крок 3. Перетворимо отримане рівняння (4.10) з $\varphi_2(x)$ для подальших розрахунків, отримаємо

$$\begin{aligned} \psi_2''(y) \int_{-a}^a \varphi_2^2(x) dx + \psi_2(y) \int_{-a}^a \varphi_2''(x) \cdot \varphi_2(x) dx &= -2 \int_{-a}^a \varphi_2(x) dx - \\ -\psi_1(y) \int_{-a}^a \varphi_1''(x) \cdot \varphi_2(x) dx - \psi_1''(y) \int_{-a}^a \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) dx, \\ \psi_2''(y) A_4 + \psi_2(y) B_4 &= -C_9 - \psi_1(y) C_{10} - \psi_1''(y) C_{11}, \end{aligned}$$

де

$$A_4 = \int_{-a}^a \varphi_2^2(x) dx = 4,214180 \cdot 10^{-4},$$

$$B_4 = \int_{-a}^a \varphi_2''(x) \cdot \varphi_2(x) dx = -0,048830,$$

$$C_9 = 2 \int_{-a}^a \varphi_2(x) dx = 8,977028 \cdot 10^{-3},$$

$$C_{10} = \int_{-a}^a \varphi_1''(x) \cdot \varphi_2(x) dx = -0,013647,$$

$$C_{11} = \int_{-a}^a \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) dx = -2,246501 \cdot 10^{-4}.$$

За допомогою проведених розрахунків отримаємо значення

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{B_4}{A_4}} = 10,764159,$$

та відповідно рівняння для $\psi_2(y)$ матиме вигляд

$$\psi_2(y) = -C_{14} \left(1 - \frac{\cosh(\mu_2 y)}{\cosh(\mu_2 b)} \right) - C_{13} \left(1 - \frac{\cosh(\mu_1 y)}{\cosh(\mu_1 b)} \right) + \bar{C}_9 + C_{13} + C_{14}, \quad (4.11)$$

де

$$\bar{C}_9 = \frac{-C_9 - \frac{C_{20}}{B_{20}} C_{10}}{B_4} = -0,245953,$$

$$C_{13} = \frac{\frac{C_{20}}{B_{20}} C_{11} \mu_1^2 + \frac{C_{20}}{B_{20}} C_{10}}{\mu_1^2 A_4 + B_4} = 0,551742,$$

та C_{14} розраховується з умови, що

$$C_{14} + C_{13} + \bar{C}_9 = 0,$$

тобто $C_{14} = 0 - C_{13} - \bar{C}_9 = -0,305789$.

Завдяки проведеним розрахункам складемо рівняння (4.11)

$$\begin{aligned} \psi_2(y) &= -C_{14} \left(1 - \frac{\cosh(\mu_2 y)}{\cosh(\mu_2 b)} \right) - C_{13} \left(1 - \frac{\cosh(\mu_1 y)}{\cosh(\mu_1 b)} \right) = \\ &= 0,305789 \left(1 - \frac{\cosh(10,764159y)}{\cosh(5,3820795)} \right) - 0,551742 \left(1 - \frac{\cosh(3,209697y)}{\cosh(1,604849)} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

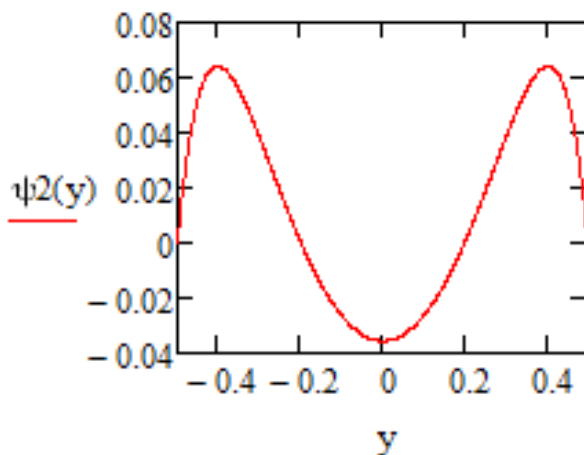
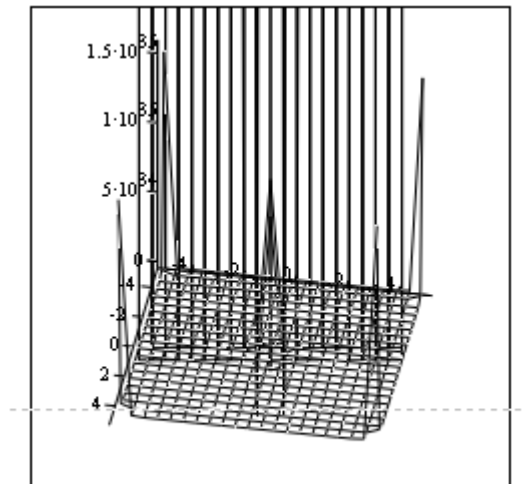


Рисунок 4.6 – Графік функції $\psi_2(y)$

Крок 4. За допомогою знайдених значень (4.10) та (4.12) розрахуємо розв'язок диференціального рівняння (4.4) в точці $x = y = 0$, матимемо наступний результат

$$\tilde{u}_2(0,0) = \tilde{u}_1(0,0) + \varphi_2(0)\psi_2(0) = 0,147362.$$



u2

Рисунок 4.7 – Графік поверхні $\tilde{u}_2(x, y)$

З метою подальшої перевірки отриманого результату розрахуємо жорсткість накрученого стержня (1.6), отримаємо

$$\tilde{J}_{T2} = 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \tilde{u}_2(x, y) dx dy = 0,140551 \quad (4.13)$$

та максимальне напруження стержня (1.7) в точці $(-a, 0)$ матиме значення

$$\tilde{\tau}_2 = \left. \frac{\partial \tilde{u}_2(x, 0)}{\partial x} \right|_{x=-a} = 0,674875.$$

Порівняння отриманих наближених значень з точним розв'язком задачі Пуассона в точці $(0, 0)$ наведено в таблиці 4.1.

Зауважимо, що при $N = 5$ точний розв'язок набуває значення $u_m(0, 0) = 0,147343$, що є найближчим до наближеного розв'язку, отриманого при $N = 2$.

Таблиця 4.1 – Порівняння точних і наближених розв’язків задачі Пуассона

N	$u_m(0,0)$	$\tilde{u}_N(0,0)$
1	0,147173	0,146470
2	0,147344	0,147362

Порівняння отриманих значень жорсткості накручення стержня наведено в таблиці 4.2. Жорсткість накручення стержня найближча до (4.13) може бути отримана при п’яти членах ряду.

Таблиця 4.2 – Порівняння жорсткості накручення стержня для точного і наближених розв’язків

N	\tilde{J}_{Tm}	\tilde{J}_{T1}	\tilde{J}_{T2}
1	0,141522	0,140422	0,140551
2	0,140662	0,140422	0,140551
3	0,140596	0,140422	0,140551
4	0,140583	0,140422	0,140551
5	0,140579	0,140422	0,140551

У таблиці 4.3 наведене порівняння отриманих значень максимального напруження стержня в точці $(-a,0)$. Найближче значення максимального напруження стержня до (4.13) може бути отримане при чотирнадцяти членах ряду.

Таблиця 4.3 – Максимальне напруження стержня в точці $(-a,0)$

N	$\tilde{\tau}_m$	$\tilde{\tau}_1$	$\tilde{\tau}_2$
1	0,743416	0,701666	0,674875
2	0,653367	0,701666	0,674875
3	0,685790	0,701666	0,674875
...
13	0,675911	0,701666	0,674875
14	0,674799	0,701666	0,674875

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Результати атестаційної роботи можуть знайти застосування в багатьох галузях науки й техніки сучасного світу.

Інтерлінації, а також інтерфлетация функцій є розділи математичного аналізу, що найбільш інтенсивно розвиваються в наш час. Інтерес до них обумовлений широкими застосуваннями як в самій математиці (побудова функцій, що задовольняють неоднорідним крайовим умовам, теорія наближення функцій), так і за її межами (відновлення поверхонь по їх відомих перетинах, обробка результатів експериментів, проектування літаків, судів та автомобілів).

В даній роботі був розглянутий розв'язок задачі Пуассона методом НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь), отримані результати можуть бути узагальнені та застосовані до областей прямокутної форми з різними значеннями вхідних параметрів a та b .

Однією з найважливіших переваг використання методу НІДР є можливість застосування методу до областей складеної форми, які є об'єднанням заданих класів областей.

Отже, за допомогою дослідженого методу НІДР для розв'язання задачі Пуассона в прямокутній області, можуть бути розв'язані задачі кручення стержня кутової, трикутної і т.д. форми в перерізі, що є дуже зручним узагальненням використаного в роботі методу.

ВИСНОВКИ

У роботі було розглянуто дослідження методу НІДР (зведення до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь) при розв'язанні крайової задачі кручення стержня форми прямокутника в перерізі.

Математичною моделлю розгляданого процесу є задача Діріхле для рівняння Пуассона. Для її чисельного розв'язання було використано класичний метод здобуття початкових приблизних значень, а також метод НІДР, котрий є найбільш доцільним для використання згідно результатів МАІ.

Метод НІДР є оптимальним для розв'язання поставленої задачі і отримання найбільш точних значень розрахунків, які можна отримати в наш час із усіх існуючих методів.

Обчислювальний експеримент був проведений для двох ітерацій розв'язку задачі Пуассона, котрі відрізнялись між собою форматом складення наближеного розв'язку задачі. Для кожної з ітерацій була наведена програмна реалізація, що представлена у відповідних додатках до атестаційної роботи.

Результати, отримані в атестаційній роботі, були представлені у вигляді таблиць порівнянь точного розв'язку задачі Пуассона в точці $(0,0)$ та результатів наближених розв'язків задачі, отримані методом НІДР.

Крім того, були проаналізовані значення жорсткості накручення і максимальне напруження стержня для точного і наближених розв'язків в точці $(-a,0)$. Відповідні результати можуть бути знайдені в таблицях порівнянь результатів дослідження.

Отримані результати добре узгоджуються з результатами фізичних експериментів та з числовими результатами, відомими з літератури.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. John Azzolini Introduction to Systems Engineering Practices, 2001. 250 p.
2. Калашян А. Н., Калянов Г. Н. Структурные модели бизнеса: DFD-технологии. Москва : Финансы и статистика, 2003. 363 с.
3. Fiodorov I. G. Overcoming expressiveness deficit of business process modeling languages. Business Informatics, 2016. 71 p.
4. Шура – Бура М. Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного // Вчислительная математика, Москва : АН СССР. 1957. №2. С. 3–19.
5. Chen Z. Finite Elements Methods and Their Applications. Leipzig : Springer-Yerlag Berlin Heidelberg, 2005. 410 p.
6. Badea C., Badea I. Bivariate approximation by algebraic and trigonometric blending functions // Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity, Cluj-Napoca : 1986. №7. P. 33–40.
7. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Навч. посіб. Київ : Наук. думка, 2005. 344с.
8. Литвин О. М. Інтерлинація функцій. Дис. на здобуття наукового ступеня д-ра фіз.-мат. наук. Київ : КДУ ім. Т. Г. Шевченка, 1989. 300с.
9. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ : Наук. думка, 2005. 344 с.
10. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544с.
11. Семикіна А. А., Кобозев В. К. Дослідження параметрів базисної функції в оптимальному методі скінченних елементів в залежності від максимального кроку розбиття // 23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ. 2019. С. 70–71.
12. Семикіна А. А., Кобозев В. К. Розв'язок задачі Пуассона в прямокутній області методом НІДР (зведення до системи нелінійних інтегродиференці-

льних рівнянь) // 24-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 7-9 квітня 2020 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2020. С. 109–110.