

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ R-ФУНКЦІЙ ТА ГАЛЬОРКІНА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ПРОЦЕСУ ЛАЗЕРНОЇ ТЕРМООБРОБ- КИ З ТОЧКОВИМ РУХОМИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Фуніков А.С.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна

тел. +38(066) 858-07-64, email: anton.funikov@nure.ua

The study considers the problem of calculating the temperature field in a flat plate during thermal laser treatment using a moving point heat source. The structural method (R-function method) in combination with the Galerkin method for non-stationary problems, is proposed to solve the problem. A computational experiment was conducted for a ring-shaped region using test parameter values.

Через розвиток таких сучасних технологій обробки матеріалів, як лазерна різка та зварювання, актуальним є розробка нових та вдосконалення існуючих методів розрахунку температурного поля при лазерній термообробці. Результати таких досліджень можуть знайти своє застосування, зокрема, у подальшому вдосконаленні технологій лазерної термообробки.

У роботі розглядається задача розрахунку поля температури в плоскій пластинці, яка займає область Ω , при її лазерній обробці точковим рухомих джерелом, що рухається областю Ω за законом $x^*(t)$, $y^*(t)$. Межу $\partial\Omega$ пластинки Ω теплоізолювано, а у початковий момент часу температура у пластинці Ω дорівнює нулю. Математичною моделлю такого процесу є наступна мішана задача для рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - pT + Q\delta(x - x^*(t))\delta(y - y^*(t)), (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$T|_{t=0} = 0, (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, t \geq 0, \quad (3)$$

де p – параметр, який моделює інтенсивність поверхневого охолодження пластини; $x^*(t)$, $y^*(t)$ – функції, які задають траєкторію руху точкового джерела потужності Q , $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Відповідно до методу R-функцій [2] структура розв'язку мішаної задачі (1) – (3) має вигляд

$$T = \Phi - \omega D_1\Phi, \quad (4)$$

де $\omega(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$, Φ – невизначена компонента структури, $D_1\Phi = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial\Phi}{\partial y}$.

Структура (5) за будь-якого вибору (з певного функціонального простору) невизначеної компоненти Φ точно задовольняє крайовій умові (2).

Для апроксимації невизначеної компоненти Φ скористаємося методом Гальоркіна для нестационарних задач [3]. Якщо,

$$\Phi(x, y, t) \approx \Phi_N(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \tau_k(x, y),$$

де $\{\tau_k(x, y)\}$ – будь-яка повна у просторі $L_2(\Omega)$ послідовність функцій, то

$$T(x, y, t) \approx T_N(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x, y),$$

де $\{\varphi_k(x, y)\}$ – координатна послідовність, $\varphi_k = \tau_k - \omega D_1 \tau_k$.

Відповідно до методу Гальоркіна для нестационарних задач для визначення функцій $c_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, отримуємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Обчислювальний експеримент було проведено для кільцеподібної області:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$$

для значень $r = 0,25$, $R = 0,5$, $(x_0, y_0) = (0,5; 0,5)$ і для $Q = 1$,
 $x^*(t) = 0,5 + r_0 \cos \varphi(t)$, $y^*(t) = 0,5 + r_0 \sin \varphi(t)$, $\varphi(t) = \frac{Vt}{r_0}$, $V = 20$ – стала лінійна

швидкість руху точкового джерела по круговій траєкторії з центром в точці $(x_0, y_0) = (0,5; 0,5)$ і радіусом $r_0 = 0,35$. При цьому,

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_0 (-\omega_2(x, y)),$$

$$\omega_1(x, y) = \frac{1}{2R} (R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2),$$

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{2r} (r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2),$$

$$x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

де \wedge_0 – знак R-кон'юнкції з системи \mathcal{R}_0 .

Результати обчислювального експерименту добре узгоджуються з результатами, отриманими методом скінченних елементів у [1].

Список використаних джерел:

1. Мазо, А.Б. (2018). *Вычислительная гидродинамика. Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов*. Учебное пособие. Изд-во Казанского ун-та.
2. Рвачев, В. Л. (1982). *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Наукова думка.
3. Михлин, С. Г. (1966). *Численная реализация вариационных методов*. Наука.