

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“07” _____ листопада _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Василишину Костянтину Володимировичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Чисельний аналіз методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності

затверджена наказом по університету від 25 жовтня 2022 р. № 1412 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 7 грудня 2022 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель нелінійної теплопровідності

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	7 – 13 листопада 2022 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	14 – 20 листопада 2022 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	21 – 27 листопада 2022 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	28 листопада – 4 грудня 2022 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	28 листопада – 6 грудня 2022 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	7 грудня 2022 р.	виконано

Дата видачі завдання 7 листопада 2022 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 76 с., 3 табл., 18 рис., 1 дод., 26 джерел.

НЕЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА, ФУНКЦІЯ ГРІНА, ГЕТЕРОТОННИЙ ОПЕРАТОР, ДВОБІЧНІ НАБЛИЖЕННЯ, ЗАКОН АРРЕНІУСА.

Об'єкт дослідження – процеси теплопровідності у нелінійних середовищах.

Мета роботи – застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання першої крайової задачі для двовимірного нелінійного рівняння теплопровідності, нелінійність якого викликана як нелінійністю коефіцієнта теплопровідності, так і нелінійністю функції потужності теплових джерел.

Метод дослідження – двобічний ітераційний метод знаходження додатного розв'язку нелінійного диференціального рівняння, що базується на теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах.

Кваліфікаційна робота присвячена застосуванню методу двобічних наближень для знаходження додатного розв'язку двовимірного нелінійного диференціального рівняння теплопровідності, а також аналізу залежності норми розв'язку від значення параметра нелінійності середовища. Отримано умови існування єдиного додатного розв'язку та умови двосторонньої збіжності до нього послідовних наближень. Програмно реалізовано та отримано розв'язки за розглядуваних значень параметрів за допомогою побудованого методу двобічних наближень та проаналізовано залежність їх норми від значення параметра нелінійності середовища.

ABSTRACT

Introductory note: 76 pages, 3 tables, 18 figures, 1 appendix, 26 sources.

NONLINEAR DIFFERENTIAL HEAT EQUATION, HAMMERSTEIN'S EQUATION, GREEN'S FUNCTION, HETEROTONIC OPERATOR, TWO-SIDED APPROXIMATION, ARRENIUS' LAW.

Object of research – processes of heat transfer in nonlinear environments.

Purpose of work – usage of two-sided approximation methods, based on usage of Green function to solve first boundary problem of two-dimensional nonlinear heat equation, which nonlinearity depends on nonlinearity of thermal conductivity coefficient and nonlinearity of power functions of heat sources.

Methods of research – two-sided approximation method of finding positive numerical solution of nonlinear equation, based on theory of nonlinear operators in semi-ordered Banach spaces.

Qualifying work is devoted to the application of two-sided approximation method to find a positive solution of nonlinear differential heat equation and analysis of the dependence between norm of the obtained approximate solution and the values of nonlinearity environment parameter. Were obtained the existence conditions of a single positive solution and the conditions of two-sided convergence of approximation. Programmatically implemented iteration two-sided approximation method, obtained solutions with selected parameter values with a help of created method and were analyzed dependence between solutions norm and parameter of environments nonlinearity.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Огляд математичних моделей моделей лазерного термоядерного синтезу, звідних до нелінійного рівняння теплопровідності	9
1.2 Огляд методів чисельного розв’язання задач нелінійної теплопровідності	14
1.3 Змістовна та формальна постановки задачі	30
1.4 Постановка задач дослідження	30
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	32
2.1 Основні відомості з теорії напівупорядкованих банахових просторів	32
2.2 Питання розв’язності нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором ...	37
2.3 Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв’язання двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності	39
3 Програмна реалізація	51
3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 11.1	51
3.2 Алгоритм розв’язання двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності	52
3.3 Опис програми	53
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	55
Висновки	62
Перелік джерел посилання	63
Додаток А Лістинг програми	66

ВСТУП

Актуальність теми. Сьогодні перед людством стоїть складна задача забезпечення необхідними ресурсами усе населення нашої планети. Одним з важливих ресурсів є електроенергія. Питання ефективного здобуття великої кількості енергії ставилося ще багато десятирічь тому, і з кожним роком це питання лише ускладнюється, бо обсяги споживаної енергії тільки збільшуються. Одним з цікавих шляхів здобуття енергії є лазерний термоядерний синтез [1]. При ЛТС завдяки деяким нелінійним властивостям плазми і фіксованим умовам, щодо середовища проведення реакції, розподілення енергії в результаті теплопередачі описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + k_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial y} \right) + e^T + \lambda e^{-T}.$$

Для розв'язання цієї задачі можна застосувати низку чисельних методів: метод сіток, різницевий метод, метод Ньютона-Канторовича, метод двобічних наближень тощо. Останній метод є найбільш привабливим через зручну апостеріорну оцінку для похибки наближеного розв'язку і можливість довести існування розв'язку вихідної задачі. Отже, застосування двобічних ітераційних методів для розв'язання задач для двовимірного нелінійного диференціального рівняння теплопровідності є актуальною задачею.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка і застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання крайових задач для двовимірного нелінійного рівняння теплопровідності, нелінійність якого викликана як нелінійністю коефіцієнта теплопровідності, так і нелінійністю функції потужності теплових джерел. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести аналіз математичних моделей та методів чисельного розв'язання задач нелінійної теплопровідності;

– провести огляд основних понять теорії нелінійних операторів у напівопорядкованих просторах та питань розв’язності нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором;

– застосувати метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв’язання крайових задач для двовимірного нелінійного рівняння теплопровідності;

– скласти алгоритм розв’язання поставленої задачі;

– програмно реалізувати розроблений алгоритм у системі комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 11;

– провести низку обчислювальних експериментів для тестових задач.

Об’єктом дослідження є процес теплопровідності у нелінійних середовищах.

Предметом дослідження є крайові задачі для нелінійного рівняння теплопровідності та двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна для її чисельного аналізу.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи теорії нелінійних операторних рівнянь у напівопорядкованих просторах і методи математичної фізики для теоретичного дослідження розглядуваної задачі та двобічного ітераційного методу її розв’язання.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання» (м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 р.) [26].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Огляд математичних моделей лазерного термоядерного синтезу, звідних до нелінійного рівняння теплопровідності

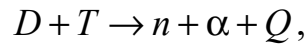
На сьогодні найбільш уживаним методом дослідження процесів у різних галузях науки та техніки є математичне моделювання [2]. Однією з областей, де застосовується математичне моделювання є сфера дослідження лазерного термоядерного синтезу.

Переважає більшість експериментів з лазерного термоядерного синтезу проводиться з тонкостінними оболонковими мішенями, заповненими термоядерним паливом, при їх опроміненні короткохвильовими лазерами з помірною інтенсивністю.

Зацікавленість у лазерах як у можливих джерелах енергії є завдяки їх спроможності до імпульсного вивільнення енергії з мішені без зовнішнього стримування; відведений для термоядерної реакції час визначається тоді часом гідродинамічного розльоту мішені. Цей підхід цілком відрізняється від квазістаціонарного підходу з магнітним утриманням, який вивчався протягом двадцяти років у лабораторіях багатьох країн. Для імпульсних систем час реакції визначається розмірами мішені та температурою. Елементарні міркування показують, що цей час приблизно дорівнює 10^{-9} с, а необхідна енергія – десятки кілоджоулів, що потребує потужності порядку мільйонів мегават.

У наш час єдиними відомими джерелами, здатними досягти таких величезних пікових потужностей, є імпульсні лазери, або, можливо, імпульсні електронні пучки. Такі можливості лазерів відомі вже більше 20 років і проблемі здійснення такого процесу присвячено багато робіт [3]. Прості оцінки показують, що вимоги до енергії лазера неприпустимо великі. В дійсності проблема потребує тонкого підходу і правильні результати отримати важко.

Термоядерне пальне, яке легше за все привести до умов горіння, – це суміш дейтерій – тритій (далі позначатимемо DT), яка реагує в результаті наступного процесу



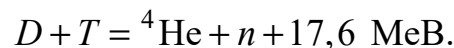
де $Q = 18$ МеВ.

Приблизно 80% цієї енергії міститься у нейтронах, а інша частина – у α -частинках з енергією 3,6 МеВ.

На відміну від DT -, DD -реакція, що надає $T + p$ і $n + {}^3\text{He}$ у двох рівно ймовірнісних процесах, має за температури декілька кілоелектронвольт в 30 разів меншу швидкість, і отже, для неї значно важче досягти умов, за яких виділялася б значна енергія синтезу.

У випадку DT -пального легко отримати оцінки необхідних розмірів, характерного часу і потрібної лазерної енергії для деякого визначеного рівня посилення енергії у процесі термоядерного синтезу.

Реальна перспектива розв'язання енергетичних проблем майбутнього пов'язана з керованим термоядерним синтезом (КТС) ізотопів водню, перш за все DT суміші:



У цій елементарній реакції $D + T$ утворюється ядро гелію і нейтрон із сумарною кінетичною енергією 17,6 МеВ. В одному грамі DT -суміші міститься величезний обсяг енергії, еквівалентний енергії, що виділяється при спаленні 15 т вугілля. Беззаперечними перевагами КТС є практично невичерпні запаси в світовому океані «пального», колосальна теплоутворююча здібність, а також екологічна чистота.

Для ініціювання реакції $D + T$ необхідно нагріти суміш до декількох десятків мільйонів градусів і стиснути її до щільності, відповідної хоча б до щіль-

ності DT -льоду (охолодженої DT -суміші), що дорівнює $0,2 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Якщо надалі вдасться утримати її в такому стані деякий час, достатній для того, щоб помітна частина «палива» вигоріла, то виділяється енергія, що може бути порівняна з енергією, витраченою на нагрів та стискання плазми. Реалізація цієї схеми в лабораторних, а потім і промислових умовах означала би практичне вирішення однієї з найстаріших фундаментальних проблем фізики.

Існує декілька основних фізичних ідей реалізації КТС. Історично перша з них – магнітне утримання, а найбільш розроблена конструкція – токамак, тобто тороїдальна камера, в якій зовнішні і згенеровані токами плазми магнітні поля не дають розлетітися і охолонути нагрітому плазмовому «бублику». З цим відносно стаціонарним методом отримання енергії синтезу конкурує інерціальний синтез. Його ідея полягає в тому, щоб швидко нагріти краплю пального, яке через інерційність руху не встигає розлетітися і охолонути, поки в ній не утвориться необхідна кількість термоядерної енергії.

Найбільш відповідним джерелом такого швидкого нагрівання є лазери. В лазерному термоядерному синтезі (ЛТС) послідовність подій наступна. Випромінювання, спрямоване на сферичну мішень, поглинається в її зовнішніх шарах, нагріває і випаровує їх. Утворюється «корона», що розлітається з великою швидкістю, реактивна сила якої стискає ядро мішені. Далі відбувається бурхливе термоядерне горіння і виділення енергії, після чого мішень розлітається і остигає.

Помітно знизити енергетичний поріг ЛТС дозволяє використання різних нелінійних ефектів, властивих лазерній плазмі.

Один з ефектів пов'язаний з типовою газодинамічною нелінійністю. При стисканні ядра мішені в силу «градієнтної катастрофи» [2] виникають ударні хвилі, які нагрівають її центральну частину вже на початковій стадії процесу і заважають подальшому її схлопуванню. В результаті досягаються щільності суттєво менші за ті, що можна було б отримати при адіабатичному, безударному стисканні.

Адекватність моделей лазерного синтезу дозволяє розглядати можливість використання ще одного характерного для плазми типу нелінійності, завдяки якій в середовищі виникають локалізовані структурні горіння [1]. Якщо плазма достатньо щільна (декілька грамів на кубічний сантиметр), то α -частинки поглинаються у місці їх виділення. Нехай, до того ж, у першому наближенні гідродинамічним рухом через його інерційність можна знехтувати в порівнянні з процесами теплопередачі і горіння. Тоді розподілення енергії, що виділяється, відбувається в результаті теплопередачі і описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{q_0 T^\beta}{1 + BT^b},$$

де T – температура;

$k_0 > 0$, $q_0 > 0$ – сталі при коефіцієнті теплопровідності плазми і джерелі енергії від термоядерних реакцій;

$\sigma > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$, B – сталі.

Ефективність перетворення енергії лазерного випромінювання є комбінована ефективність поглинання лазерного випромінювання у плазмі і передачі енергії з області поглинання в щільну реагуючу частину DT -мішені. Ці етапи є чітко розподіленими. Цілком очевидно, що ступінь поглинання лазерного випромінювання може бути порядку одиниці, але це не означає необхідності припускати, що поглинена енергія потім ефективно передається в щільну мішень.

Спочатку лазерне випромінювання проникає у твердий DT та іонізує його поблизу поверхні, утворюючи плазму з щільністю твердого тіла, яка після досягнення ступеня іонізації на декілька відсотків стає непрозорою для лазерного випромінювання. При цьому лазерний потік зазвичай віддзеркалюється в зоні початкового розриву щільності, поглинання відбувається лише завдяки проникненню лазерної хвилі в надщільну плазму на відстань порядку довжини хвилі лазерного випромінювання.

У теорії горіння джерелом тепла є тепловиділення хімічної реакції, основна властивість якої полягає в тому, що її швидкість експоненціально залежить від температури за законом Арреніуса. Тому щільність джерела тепла записується у вигляді

$$q' = Qze^{-\frac{E}{RT}},$$

де Q – тепловий ефект реакції;

E – енергія активації, що вважається достатньо великою.

Основне припущення, на якому базується вся теорія горіння, полягає в тому, що швидкість горіння залежить від температури сильніше, ніж від усіх інших параметрів. В задачах про спалахування середовище вважається нерухомим, і рівняння приймає вигляд

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + Qze^{-\frac{E}{RT}}$$

або, нехтуючи залежністю теплопровідності від температури,

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + Qze^{-\frac{E}{RT}},$$

де c_p – середня масова теплоємність суміші при постійному тиску, яка вважається сталою.

Як і більшість фізичних теорій, теорія горіння може бути побудована тільки, якщо прийняти певні доцільні наближення. Найбільш загальне з них полягає у тому, що перебіг реакції розглядається лише як наслідок зворотного зв'язку, тобто нагріву або автокаталізу. У вихідному стані реакційна суміш вважається інертною і приймається, що реакція починається тільки після того, як підвищиться температура або з'являться активні продукти. Якщо не вдається

до цього наближення, не можна буде говорити про стаціонарні процеси. Відповідно до закону Арреніуса швидкість хімічної реакції ніколи не перетворюється на нуль. Вона лише експоненціально спадає зі зниженням температури. Отже, якою б низькою не була початкова температура суміші, ця суміш все одно повинна прореагувати за досить тривалий проміжок часу. Всі задачі про запалення і спалювання в нерухомому середовищі зводяться до розв'язання квазілінійного рівняння в частинних похідних, яке може бути виконано за допомогою ЕОМ. Наближені методи розв'язання задачі мають фундаментальне значення не тільки для скорочення обчислювальної роботи, але і для розуміння принципових питань. Тоді можна розглядати рівняння нелінійної теплопровідності з лінійною комбінацією джерел експоненціальної потужності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + k_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial y} \right) + e^T + \lambda e^{-T},$$

де T – температура;

$k_0 > 0$ – значення коефіцієнта теплопровідності у лінійному середовищі;

$\sigma > 0$ – параметри нелінійності середовища;

$\lambda > 0$ – стала, що характеризує потужність теплових джерел.

Якщо зазначені процеси виходять на стаціонарний розподіл температур, то замість нестационарних рівнянь для опису таких процесів можна розглядати відповідні стаціонарні рівняння.

1.2 Огляд методів чисельного розв'язання задач нелінійної теплопровідності

Розглянемо тепер методи розв'язання нелінійних рівнянь математичної фізики, зокрема, нелінійного стаціонарного рівняння теплопровідності.

Одним з можливих методів розв'язання нелінійних рівнянь математичної фізики є метод сіток, при використанні якого проводиться дискретизація

розрахункової області, тобто заміна цієї області набором точок, і після цього вихідна диференціальна задача замінюється на систему нелінійних рівнянь. Слід зазначити, що на відміну від лінійного випадку, нелінійний має низку своїх специфічних проблем, пов'язаних із апроксимацією нелінійного диференціального рівняння та розв'язанням апроксимуючої нелінійної системи. Розглянемо застосування методу сіток [4, 5] на прикладі двовимірної нелінійної задачі.

У прямокутнику

$$\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$$

з межею $\partial\Omega$ розглянемо наступну задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

де $\mu(\mathbf{x})$ – задана функція, неперервна на $\partial\Omega$.

Задачу (1.1), (1.2) можна трактувати як двовимірну стаціонарну задачу теплопровідності з нелінійними джерелами у прямокутнику, коли на межах прямокутника підтримується задана температура.

В області Ω введемо рівномірну сітку з кроком h_1 за змінною x_1 і кроком h_2 за змінною x_2

$$\bar{\Omega}_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (ih_1, jh_2), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, \\ h_1 N_1 = l_1, h_2 N_2 = l_2\}.$$

Припустимо, що задача (1.1), (1.2) має єдиний розв'язок, який належить простору $C^4(\Omega)$.

Нехай

$$y = \{y_{ij}, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

– сіткова функція, що задана на сітці $\bar{\Omega}_h$ і апроксимує розв’язок u диференціальної задачі (1.1), (1.2), а

$$[u]_{\mathbf{h}} = \{u_{ij} = u(\mathbf{x}_{ij}), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

– проекція точного розв’язку одновимірної стаціонарної задачі на сітку $\bar{\Omega}_h$.

Для апроксимації оператора Лапласа скористаємось п’ятиточковим шаблоном «хрест», що складається з точок \mathbf{x}_{ij} , $\mathbf{x}_{i\pm 1, j}$, $\mathbf{x}_{i, j\pm 1}$. У множині $\bar{\Omega}_h$ виділимо множину внутрішніх вузлів

$$\Omega_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{ij} = (ih_1, jh_2), i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}$$

і множину граничних вузлів

$$\partial\Omega_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{x}_{N_1j}\}_{j=1}^{N_2-1} \cup \{\mathbf{x}_{i0}, \mathbf{x}_{iN_2}\}_{i=1}^{N_1-1}.$$

У внутрішніх вузлах сітки $\mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ оператор Лапласа Δu апроксимуємо виразом $\Delta_{\mathbf{h}} y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$, що задається у вузлу $\mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ рівністю

$$\Delta_{\mathbf{h}} y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = \frac{y_{i-1, j} - 2y_{ij} + y_{i+1, j}}{h_1^2} + \frac{y_{i, j-1} - 2y_{ij} + y_{i, j+1}}{h_2^2}.$$

При цьому

$$\Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} - \Delta u_{ij} = \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\xi_i, x_2^{(j)}) + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1^{(i)}, \eta_j),$$

де

$$\begin{aligned} \xi_i &\in (x_1^{(i-1)}, x_1^{(i+1)}), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \eta_j &\in (x_2^{(j-1)}, x_2^{(j+1)}), \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

Тоді задачі (1.1), (1.2) поставимо у відповідність різницеву схему

$$-\Delta_{\mathbf{h}} y_{ij} = f(\mathbf{x}_{ij}, y_{ij}), \quad \text{якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \quad (1.3)$$

$$y_{ij} = \mu_{ij}, \quad \text{якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}. \quad (1.4)$$

Тут $\mu_{ij} = \mu(\mathbf{x}_{ij})$, $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$.

Для похибки $z_{ij} = y_{ij} - u_{ij}$, $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$, отримаємо нелінійну задачу

$$-\Delta_{\mathbf{h}} z_{ij} = \Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} + f(\mathbf{x}_{ij}, u_{ij} + z_{ij}), \quad \text{якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}},$$

$$z_{ij} = 0, \quad \text{якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}.$$

Лінеаризуючи цю задачу, отримаємо лінійну задачу

$$-\Delta_{\mathbf{h}} z_{ij} - z_{ij} f'_u(\mathbf{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = \Psi_{ij}, \quad \text{якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \quad (1.5)$$

$$z_{ij} = 0, \quad \text{якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}, \quad (1.6)$$

де $\Psi_{ij} = \Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} + f(\mathbf{x}_{ij}, u_{ij}) - \text{відхил різницевого рівняння (1.3)}$;

$$\bar{y}_{ij} = u_{ij} + \theta_{ij} z_{ij}, \quad \theta_{ij} \in (0, 1).$$

Тоді для похибки за умови, що $f'_u(\mathbf{x}, u) \leq 0$ для усіх \mathbf{x} , u , із принципу максимуму для систем сіткових рівнянь випливає оцінка

$$\|z\|_{\mathbf{h}} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\Psi\|'_{\mathbf{h}},$$

$$\text{де } \|z\|_{\mathbf{h}} = \max_{\substack{0 \leq i \leq N_1 \\ 0 \leq j \leq N_2}} |z_{ij}|, \quad \|\Psi\|'_{\mathbf{h}} = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq j \leq N_2 - 1}} |\Psi_{ij}|.$$

Очевидно, що відхил Ψ є величиною $O(h_1^2 + h_2^2)$:

$$\|\Psi\|'_{\mathbf{h}} = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Також для розв'язку задачі (1.5), (1.6) за умови $f'_u(\mathbf{x}, u) \leq 0$ для усіх \mathbf{x} , u може бути отримана оцінка

$$\|y\|_{\mathbf{h}} \leq \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |\mu(\mathbf{x})| + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x}, 0)|.$$

Розв'язання нелінійної системи різницевих рівнянь (1.3), (1.4) можна здійснити за допомогою метода Ньютона. Відповідні розрахункові формули для визначення $y_{ij}^{(k+1)}$, $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$, мають вигляд

$$\begin{aligned} & -\Delta_{\mathbf{h}} y_{ij}^{(k+1)} - f'_u(\mathbf{x}_{ij}, y_{ij}^{(k)}) y_{ij}^{(k+1)} = \\ & = f(\mathbf{x}_{ij}, y_{ij}^{(k)}) - f'_u(\mathbf{x}_{ij}, y_{ij}^{(k)}) y_{ij}^{(k)}, \text{ якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$y_{ij}^{(k+1)} = \mu_{ij}, \text{ якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}. \quad (1.8)$$

Швидкість збіжності процесу (1.7), (1.8) є квадратичною.

Недоліком різницевих схем є те, що замість отримання наближеного розв'язку у вигляді неперервної функції ми отримуємо лише каркас наближеного розв'язку, до якого ще треба застосувати апарат інтерполяції. Нехай y_{ij} , $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$, – значення каркасу наближеного розв'язку задачі (1.1), (1.2), знайдені з системи (1.3), (1.4). Тоді наближений розв'язок задачі (1.1), (1.2) можна записати у вигляді неперервної функції, наприклад, за допомогою кусково-лінійного сплайна:

$$u_{N_1, N_2}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} y_{ij} \cdot B_1\left(\frac{N_1 x_1}{l_1} - i\right) B_1\left(\frac{N_2 x_2}{l_2} - j\right),$$

$$\text{де } B_1(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [-1, 0], \\ 1-t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \quad \text{– фінітний сплайн Шенберга першого степеня.}$$

Ще одним з методів, який можна застосувати до розв'язання нелінійних рівнянь, є метод лінеаризації Ньютона-Канторовича [6].

Розглянемо його застосування на прикладі задачі

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.10)$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$;

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2);$$

$f(\mathbf{x}, u)$ – неперервна при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$ функція.

Рівняння (1.9) можна записати у вигляді $Q(u) = \theta$, де Q – нелінійний оператор, що діє за правилом

$$Q(u) = \Delta u + f(\mathbf{x}, u)$$

з простору $\mathcal{U} = C^2(\bar{\Omega})$ у простір $\mathcal{V} = C(\bar{\Omega})$ на області визначення

$$D_Q = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Норма у просторі $\mathcal{U} = C^2(\bar{\Omega})$ задається формулою

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^2} = & \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})| + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| + \\ & + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) \right| + 2 \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) \right| + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) \right|, \end{aligned}$$

а в просторі $\mathcal{V} = C(\bar{\Omega})$ – формулою

$$\|u\|_C = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|.$$

Припустимо додатково, що існує похідна $\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u)$, яка є неперервною при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$ функцією. Тоді оператор Q є диференційовним за Фреше, причому

$$Q'(u)h = \Delta h(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))h(\mathbf{x}).$$

Нехай $u^{(0)} \in D_Q$ – початкове наближення. Тоді, якщо побудовано наближення $u^{(k)} \in D_Q$, $k = 0, 1, \dots$, то відповідно до метода Ньютона-Канторовича наступне наближення $u^{(k+1)} \in D_Q$ є розв'язком рівняння

$$\Delta u^{(k)} + f(\mathbf{x}, u^{(k)}) + \Delta(u - u^{(k)}) + \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u^{(k)})(u - u^{(k)}) = \theta,$$

або

$$-\Delta u - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u^{(k)})u = f(\mathbf{x}, u^{(k)}) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u^{(k)})u^{(k)}.$$

Отже, $u^{(k+1)}$ – розв’язок лінійної крайової задачі

$$-\Delta u - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u^{(k)}(\mathbf{x}))u = f(\mathbf{x}, u^{(k)}(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u^{(k)}(\mathbf{x}))u^{(k)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.12)$$

Для розв’язання задачі (1.11), (1.12) можна скористатися будь-яким чисельним методом – методом сіток, енергетичним методом (методом Рітца), методом Гальоркіна, методом найменших квадратів тощо.

З’ясуємо тепер питання збіжності ітераційного процесу (1.11), (1.12). Нехай маємо досить добре початкове наближення $u^{(0)} = u_0$ до розв’язку задачі (1.9), (1.10), тобто $\|Q(u_0)\|_C \leq N$, де N – досить мале. Вказана нерівність означає, що

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |\Delta u_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, u_0(\mathbf{x}))| \leq N.$$

Розглянемо у просторі $\mathcal{U} = C^2(\bar{\Omega})$ кулю $B_r(u_0)$, тобто множину всіх тих $u(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{\Omega})$, для яких виконується нерівність

$$\begin{aligned}
\|u - u_0\|_{C^2} &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})| + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \\
&+ \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) \right| + \\
&+ 2 \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) \right| + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) \right| < r.
\end{aligned}$$

Оцінимо $\|Q'(u_1) - Q'(u_2)\|_{\mathcal{L}(U, V)}$. Оскільки

$$\begin{aligned}
Q'(u_1)h - Q'(u_2)h &= \left[\Delta h(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x}))h(\mathbf{x}) \right] - \left[\Delta h(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x}))h(\mathbf{x}) \right] = \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})) \right] h(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
|Q'(u_1)h - Q'(u_2)h| &= \left| \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})) \right| \cdot |h(\mathbf{x})| \leq \\
&\leq \left| \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})) \right| \cdot \|h\|_C \leq \left| \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})) \right| \cdot \|h\|_{C^2}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\|Q'(u_1) - Q'(u_2)\|_{\mathcal{L}(C^2(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}))} &= \sup_{\|h\|_{C^2}=1} \|Q'(u_1)h - Q'(u_2)h\|_C \leq \\
&\leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})) \right|.
\end{aligned}$$

Нехай функція $f(\mathbf{x}, u)$ для всіх $u_1, u_2 \in B_r(u_0)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L , тобто

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})) \right| \leq L |u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})|.$$

Тоді умову Ліпшиця у кулі $B_r(u_0)$ з тією ж сталою L задовольнятиме і похідна $Q'(u)$:

$$\|Q'(u_1) - Q'(u_2)\|_{\mathcal{L}(C^2(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}))} \leq L \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})| = L \|u_1 - u_2\|_C \leq L \|u_1 - u_2\|_{C^2}.$$

Нарешті вимагатимемо, щоб для всіх $u \in B_r(u_0)$ для розв'язків h задачі

$$\begin{aligned} -\Delta h - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))h &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ h|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

мала місце апріорна оцінка

$$\|h\|_{C^2} \leq M \|g\|_C.$$

Тоді у кулі $B_r(u_0)$ гарантовано оцінку

$$\|[Q'(u)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(C^2(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}))} \leq M.$$

Тоді, якщо $q = \frac{1}{2} M^2 L N < 1$ і

$$r' = MN \sum_{j=0}^{\infty} q^{2^j-1} < r,$$

то операторне рівняння з диференційованим за Фреше оператором має розв'язок $u^* \in \overline{B_{r'}(u_0)}$, до якого збігається ітераційний процес Ньютона-Канторовича з $u^{(0)} = u_0$. Швидкість збіжності $u^{(k)}$ до u^* дається нерівністю

$$\|u^{(k)} - u^*\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq MN \frac{q^{2^k-1}}{1-q^{2^k}}.$$

Тепер розглянемо більш загальну нелінійну задачу стаціонарної теплопровідності [7]

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = f(x,u), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1.13)$$

$$u(x) = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \quad (1.14)$$

Наведемо деякі різницеві схеми для задачі (1.13), (1.14). Вважатимемо, що Ω прямокутник і в ньому введено рівномірну прямокутну сітку $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ з кроками h_1 і h_2 за змінними x_1 і x_2 відповідно. Поставимо у відповідність задачі (1.13), (1.14) нелінійну різницеву схему

$$\Delta u = \varphi, \quad x \in \omega, \quad (1.15)$$

$$y(x) = g(x), \quad x \in \partial\omega. \quad (1.16)$$

Для достатньо гладких функцій $f(x, u)$ праву частину (1.15) можна взяти у вигляді

$$\varphi = f(x, y), \quad x \in \omega.$$

Різницевий оператор в (1.15) подається так

$$\Delta y = -(a_1(x, y)y_{\bar{x}_1})_{x_1} - (a_2(x, y)y_{\bar{x}_2})_{x_2}. \quad (1.17)$$

Коефіцієнти нелінійного різницевого оператора (1.17) можна взяти, наприклад, у вигляді [7]

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &= k(x_1 - 0,5h_1, x_2, 0,5(y(x) + y(x_1 - h_1, x_2))), \\ a_2(x, y) &= k(x_1, x_2 - 0,5h_2, 0,5(y(x) + y(x_1, x_2 - h_2))). \end{aligned}$$

Різницева схема (1.15), (1.16) є системою нелінійних рівнянь, тому для її розв'язання треба використовувати якісь ітераційні методи. Огляд можливих ітераційних схем та питання їх збіжності розглянуто у [7].

Ще одним методом, який використовується для розв'язання нелінійних рівнянь математичної фізики, є метод двобічних наближень [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання нелінійної задачі теплопровідності було розглянуто в роботах [14, 15]. Опишемо цей метод на прикладі задачі

$$-\operatorname{div}(k(T)\operatorname{grad}T) = \lambda f(\mathbf{x}, T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.18)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.19)$$

де Ω – обмежена область з \mathbb{R}^2 чи \mathbb{R}^3 з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$);

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;

$f(x, T)$ – неперервна і додатна при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $T > 0$ функція;

$k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$ – параметри нелінійності середовища;

$\lambda > 0$ – стала.

Задача (1.18), (1.19) є математичною моделлю процесу теплопровідності у випадку, коли наявні джерела тепловиділення в Ω розподілені за нелінійним законом $f(\mathbf{x}, T)$ (параметр λ характеризує їх потужність) і коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури.

У задачі (1.18), (1.19) покладемо $T = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(\mathbf{x})$ – нова невідома функція. Отримаємо нову задачу для функції u

$$-\Delta u = \lambda F(\mathbf{x}, u) \text{ у } \Omega, \quad (1.20)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.21)$$

$$\text{де } F(\mathbf{x}, u) = f \left(\mathbf{x}, \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}} \right).$$

Застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання задачі (1.20), (1.21).

Позначимо через $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функцію Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області Ω . Тоді задача (1.20), (1.21) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (1.22)$$

Якщо функція $u^* \in C(\bar{\Omega})$ є розв'язком рівняння (1.22), то її вважатимемо узагальненим розв'язком задачі (1.20), (1.21). Тоді для вихідної задачі (1.18), (1.19) за узагальнений розв'язок природно обрати функцію

$$T^* = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u^* \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}. \quad (1.23)$$

Розглянемо нелінійний оператор T , що діє у просторі $C(\bar{\Omega})$ за правилом, яке отримується з правої частини рівняння (1.22):

$$T(u)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) ds.$$

Функція $F(\mathbf{x}, u)$ є неперервною і додатною при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $T > 0$, оскільки таку властивість має функція $f(\mathbf{x}, T)$, а функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$. Із цих міркувань, можна зробити висновок, що оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус \mathcal{K}_+ : $T(\mathcal{K}_+) \subset \mathcal{K}_+$.

Зробити висновок, про те, що оператор T буде гетеротонним з супутнім оператором

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds,$$

можна за умови, що функція $F(\mathbf{x}, u)$ буде дозволяти діагональне подання $F(\mathbf{x}, u) = \hat{F}(\mathbf{x}, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних \mathbf{x} , v , w функція $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$ монотонно спадає за w і монотонно зростає за v для будь-яких $\mathbf{x} \in \Omega$.

Оператори T і \hat{T} є цілком неперервними.

Виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ для гетеротонного оператора T у конусі \mathcal{K}_+ , тобто такий відрізок, для кінців якого будуть виконуватись умови

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v_0(\mathbf{s}), w_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq v_0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, w_0(\mathbf{s}), v_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq w_0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

та сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.24)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.25)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}).$$

З тих міркувань, що конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ є сильно інваріантним, а оператор T є гетеротонним, можна зробити висновок, що отримані з формул (1.24), (1.25) послідовності $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$, $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ відповідно не спадають і не зростають за конусом \mathcal{K}_+ . З нормальності конуса \mathcal{K}_+ і повної неперервності оператора \hat{T} впливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. При цьому має місце наступний ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Граничні функції v^* і w^* отримаємо розв'язавши систему рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (1.26)$$

$$w(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (1.27)$$

Тоді виконання рівності $v^* = w^*$ буде умовою існування єдиної нерухомої точки u^* оператора T на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ (єдиного на $\langle v_0, w_0 \rangle$ розв'язку u^* крайової задачі (1.20), (1.21)). Достатніми для цього будуть наступні умови:

а) система (1.26), (1.27) не має на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ розв'язків (v, w) таких, що $v \neq w$;

б) для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w, 0 < u < w$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ справджується нерівність $\hat{F}(\mathbf{x}, v+u, w-u) < \hat{F}(\mathbf{x}, v, w) + uM^{-1}$, де $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}), u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$;

в) існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{F}(\mathbf{x}, v, w)$ для будь-яких v, w , для яких справджується нерівність $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$|\hat{F}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{F}(\mathbf{x}, v, w)| \leq L|w - v|,$$

причому $\gamma = \lambda LM < 1$, де $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}), u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$;

г) для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{F}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{F}(\mathbf{x}, v, w), \mathbf{x} \in \Omega.$$

Через більш зручну обчислювальну схему і зручний апарат для оцінки похибки ітераційні методи двобічних наближень є більш зручними та уживаними, аніж інші наведені методи.

1.3 Змістовна та формальна постановки задачі

Розглядатимемо задачу термоядерного горіння, що викликане збуренням температури [3, 16, 17, 18, 19]. Задача знаходження розв'язку нелінійної крайової задачі, коли коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури і коли у області горіння наявні джерела тепловиділення, розподілені за експоненціальним законом, є дуже поширеною у сфері лазерного термоядерного синтезу.

Процес запалювання у плоскій області Ω описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + k_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial y} \right) + e^T + \lambda e^{-T}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.28)$$

де $k(T) = k_0 T^\sigma$ – коефіцієнт теплопровідності;

$k_0 > 0$ – значення коефіцієнта теплопровідності у лінійному середовищі;

$f(T) = e^T + \lambda e^{-T}$ – функція потужності теплових джерел;

$\sigma > 0$ – параметри нелінійності середовища;

$\lambda > 0$ – стала, що характеризує потужність теплових джерел.

Якщо реакція горіння, що описана рівнянням (1.28), виходить на стаціонарну температуру, то вихідна задача перейде до стаціонарного вигляду

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial y} \right) = e^T + \lambda e^{-T}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного аналізу математичних моделей лазерного термоядерного синтезу, звідних до нелінійного рівняння теплопровідності та методів

їх чисельного аналізу, можна зробити висновок, що перспективним є дослідження нелінійних рівнянь теплопровідності із застосуванням до їх наближеного розв'язання методу двобічних наближень.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності, нелінійність якого викликана як нелінійністю коефіцієнта теплопровідності, так і нелінійністю функції потужності теплових джерел.

Для досягнення поставленої мети треба розв'язати наступні задачі:

- провести огляд основних понять теорії нелінійних операторів у напівопорядкованих просторах та питань розв'язності нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором;

- застосувати метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності;

- скласти алгоритм розв'язання поставленої задачі;

- програмно реалізувати розроблений алгоритм у системі комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica 11;

- провести низку обчислювальних експериментів для тестових значень параметрів та чисельно дослідити залежність від параметрів норми наближеного розв'язку задачі.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Основні відомості з теорії напівупорядкованих банахових просторів

Представимо головні поняття теорії напівупорядкованих банахових просторів, які детальніше розглядалися в наукових працях [20, 21].

Позначатимемо \mathcal{U} – дійсний банахів простір, θ – нульовий елемент простору \mathcal{U} .

Множина елементів $tu + (1-t)w$ при $0 \leq t \leq 1$ називається відрізком $[u, w]$, який з'єднує точки u та w банахового простору \mathcal{U} . Променем, що проходить через точку $u \in \mathcal{U}$, $u \neq \theta$, називають множину точок tu при $t \geq 0$.

Множина $M \subset \mathcal{U}$ називається опуклою, якщо з кожною парою точок вона містить і відрізок, що їх з'єднує.

Опукла замкнена множина $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ називається конусом, якщо для неї виконуються такі умови:

- а) якщо $u \in \mathcal{K}$ і $u \neq \theta$, то $\gamma u \in \mathcal{K}$ для будь-якого $\gamma \geq 0$;
- б) якщо $u \in \mathcal{K}$ і $u \neq \theta$, то $-u \notin \mathcal{K}$.

Простір \mathcal{U} є напівупорядкованим, якщо для будь-якої пари елементів $v, w \in \mathcal{U}$ визначена операція бінарного відношення \leq така, що виконуються наступні умови:

- а) якщо $u \leq v$ і $\alpha \geq 0$, то $\alpha u \leq \alpha v$, а якщо $\alpha < 0$, то $\alpha v \leq \alpha u$;
- б) якщо $u \leq v$ та $u \geq v$, то $u = v$;
- в) якщо $u_1 \leq v_1$ та $u_2 \leq v_2$, то це означає, що $u_1 + u_2 \leq v_1 + v_2$;
- г) якщо $u \leq v$ та $v \leq w$, то це означає, що $u \leq w$.

Поняття напівупорядкованості вводиться за допомогою конуса \mathcal{K} в \mathcal{U} : $u \leq v$, якщо $v - u \in \mathcal{K}$. У випадку, коли $u \leq v$, $u \neq v$ писатимемо $u < v$. Множину $\langle v, w \rangle = \{u : v \leq u \leq w\}$ називатимемо конусним відрізком та позначатимемо $\langle v, w \rangle$.

Додатними називаються такі елементи, що $u \geq \theta$, тобто $u \in \mathcal{K}$.

Можливість граничного переходу можна отримати із поняття замкненості конуса \mathcal{K} наступним чином: якщо $\|u_k - u\| \rightarrow 0$, $\|v_k - v\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ і $u_k \leq v_k$ для всіх $k = 1, 2, \dots$, то $u \leq v$.

У банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у замкненій обмеженій області $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, прикладом конуса є конус невід'ємних функцій

$$\mathcal{K}_+ = \{u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) : u(x, y) \geq 0, (x, y) \in \bar{\Omega}\}.$$

Нормальним називатимемо конус \mathcal{K} , у якому за умови існування $\delta > 0$ такого, що для будь-яких пар елементів $e_1, e_2 \in \mathcal{K}$, $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, виконується нерівність $\|e_1 + e_2\| > \delta$. Нормальність конуса \mathcal{K} еквівалентна умові напівмонотонності норми, яка означає, що існує число $M > 0$ таке, що з умови $\theta \leq u \leq v$ випливає $\|u\| \leq M \|v\|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ нормальним є конус \mathcal{K}_+ .

Позначимо u_0 – фіксований ненульовий елемент з \mathcal{K} . Сукупність елементів $u \in \mathcal{U}$ таких, що $-\gamma u_0 \leq u \leq \gamma u_0$ при $\gamma > 0$, позначатимемо через E_{u_0} .

Для $u \in E_{u_0}$ введемо u_0 -норму

$$\|u\|_{u_0} = \min \{\gamma : -\gamma u_0 \leq u \leq \gamma u_0\}.$$

Із збіжності за u_0 -нормою за умови нормальності конуса \mathcal{K} випливає збіжність за нормою простору \mathcal{U} .

При дослідженні оператора T , який діє в \mathcal{U} , ефективно використання факту напівупорядкованості простору \mathcal{U} деяким конусом \mathcal{K} можливе тільки за наявності в оператора деяких властивостей, пов'язаних з напівупорядкованістю.

Додатним називатимемо такий оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, який перетворює в себе конус \mathcal{K} , тобто залишає його інваріантним.

Отже, додатним є оператор, для якого виконується умова $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, тобто $T(u) \in \mathcal{K}$ при будь-якому $u \in \mathcal{K}$. Також умову додатності можна записати так:

$$\text{якщо } u \geq \theta, \text{ то } T(u) \geq \theta.$$

Розглянемо тепер u_0 -додатні оператори, які складають частину класу додатних операторів. Нехай фіксовано деякий ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$. Через $K(u_0)$ позначимо множину елементів $u \in \mathcal{K}$ таких, що для них можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що

$$\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0.$$

Якщо додатний оператор T переводить усі ненульові елементи конуса \mathcal{K} в $K(u_0)$, то він називається u_0 -додатним оператором. Отже, для будь-якого ненульового $u \in \mathcal{K}$ існують $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$ такі, що

$$\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0.$$

Властивість монотонності тісно пов'язана із означеннями багатьох типів операторів, що діють у напівупорядкованих просторах.

Гетеротонним називатимемо оператор T , що діє в \mathcal{U} , якщо існує супутній до нього оператор \hat{T} , визначений на $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, такий, що оператор T має діагональне подання вигляду $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, причому $\hat{T}(v, w)$ монотонно зростає за v та спадає за w , тобто:

$$\text{а) якщо } v_1, v_2 \in \mathcal{U}, v_1 \geq v_2, \text{ то } \hat{T}(v_1, w) \geq \hat{T}(v_2, w);$$

$$\text{б) якщо } w_1, w_2 \in \mathcal{U}, w_1 \geq w_2, \text{ то } \hat{T}(v, w_1) \leq \hat{T}(v, w_2).$$

Очевидно, що вибір оператора $\hat{T}(v, w)$, супутнього до T , є неоднозначною задачею, бо, наприклад, якщо $\hat{T}(v, w)$ є супутнім для T , то й оператор $\hat{T}(v, w) + v - w$ так само буде для нього супутнім. Цей факт надає деякі зручності при розв'язанні конкретних задач. Але, якщо йдеться про гетеротонний оператор T , вважатимемо, що супутній для нього оператор \hat{T} вже обрано, тобто він є фіксованим.

Частинними випадками гетеротонних операторів є монотонні і антимонотонні оператори. У монотонному випадку за супутній оператор можна обрати $\hat{T}(v, w) \equiv T(v)$, для антимонотонного – $\hat{T}(v, w) \equiv T(w)$. За умов, що не було вказано інших супутніх операторів, ці оператори використовуються у випадках монотонних і антимонотонних операторів відповідно.

Розглянемо інший різновид операторів, які діють у просторі з конусом та пов'язані із характером зміни значення оператора по відношенню до деяких класів збільшень аргументу. Найбільш уживані типи операторів визначаються зростанням значень оператора уздовж променів, що лежать в конусі \mathcal{K} .

Увігнутих називається оператор $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, якщо він є u_0 -додатним і для будь-яких $u \in K(u_0)$ та $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau u) \geq \tau T(u), \quad (2.1)$$

причому в (2.1) неможлива рівність.

Увігнутий оператор T є u_0 -увігнутих, якщо він u_0 -додатний та існує таке $\eta = \eta(u, \tau) > 0$ для будь-яких $u \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$, що

$$T(\tau u) \geq \tau(1 + \eta)T(u).$$

Для гетеротонних операторів можна ввести близьке до увігнутості поняття.

Псевдоувігнутим називається додатний гетеротонний оператор, якщо для будь-яких ненульових $v, w \in \mathcal{K}$ $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ і для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ та $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w), \quad (2.2)$$

причому в (2.2) неможлива рівність.

Для псевдоувігнутого оператора T існує ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$, що будуть виконуватись наступні умови:

а) для будь-яких $v, w \in \mathcal{K}$ ($v \neq \theta, w \neq \theta$) справджуватимуться нерівності $\alpha u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta u_0$, де $\alpha = \alpha(v, w) > 0$, $\beta = \beta(v, w) > 0$;

б) для усіх таких $v, w \in K(u_0)$, що $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$, $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ ($\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$, $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$, $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$), виконуватимуться нерівності $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w)$, $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \neq \tau \hat{T}(v, w)$, де $\tau \in (0, 1)$.

Псевдоувігнутий оператор T буде u_0 -псевдоувігнутим, якщо для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$ можна вказати таке $\eta(v, w, \tau) > 0$, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau [1 + \eta(v, w, \tau)] \hat{T}(v, w).$$

Конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , якщо

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0,$$

$$\hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0.$$

2.2 Питання розв'язності нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором

Для розгляду питання розв'язності нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором введемо наступну умову (A) [21, 22]: система рівнянь

$$\hat{T}(v, w) = v, \hat{T}(w, v) = w \quad (2.3)$$

на множині $M \subset \mathcal{U}$ не має розв'язків таких, що $v \neq w$.

Тоді має місце наступна теорема [21, 22].

Теорема. Нехай для гетеротонного оператора T на сильно інваріантному конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ виконується умова (A) і крім того, конус \mathcal{K} є нормальним, оператор \hat{T} є цілком неперервним. Тоді у оператора T існуватиме нерухома точка $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Слід зазначити, що виконання умови (A) не є обов'язковим, бо з сильної інваріантності $\langle v_0, w_0 \rangle$ випливає звичайна інваріантність цього відрізка для оператора T , тому існування нерухомої точки u^* у T випливає з принципу Шаудера.

При дослідженні питання збіжності ітераційних процесів вигляду $u^{(n+1)} = T(u^{(n)})$ для гетеротонного оператора T зручно розглядати допоміжний ітераційний процес

$$v^{(n+1)} = \hat{T}(v^{(n)}, w^{(n)}), \quad w^{(n+1)} = \hat{T}(w^{(n)}, v^{(n)}), \quad (2.4)$$

що починається в точці (v_0, w_0) .

Тоді справджуватиметься наступне твердження [21, 22].

Теорема. Нехай для гетеротонного оператора T існує сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ і конус \mathcal{K} є нормальним, оператор \hat{T} є цілком

неперервним. Тоді матиме місце збіжність ітераційного процесу (2.4), тобто $v^{(n)} \rightarrow v^*$, $w^{(n)} \rightarrow w^*$, причому

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}. \quad (2.5)$$

За умови, що оператор \hat{T} є неперервним, можемо стверджувати, що пара (v^*, w^*) з (2.5) є розв'язком системи (2.3). Якщо ж умова (A) також виконується, то виключено випадок, коли $v^* \neq w^*$. Це свідчить про те, що $u^* := v^* = w^*$ є єдиною нерухомою точкою оператора T , тобто розв'язком рівняння $u = T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, і можемо стверджувати наступне [21, 22].

Теорема. Нехай виконана умова збіжності ітераційного процесу (2.4), оператор \hat{T} є неперервним і для конусного відрізка виконується умова (A). Тоді у T на $\langle v_0, w_0 \rangle$ існує єдина нерухому точка u^* , до якої збігаються послідовні ітерації $T^n(u)$ незалежно від $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Зауважимо, що якщо попереднє твердження справджується, то $v^{(n)} \rightarrow u^*$, $w^{(n)} \rightarrow u^*$, причому

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}. \quad (2.6)$$

Якщо ланцюг нерівностей (2.6) справджується для послідовностей $\{v^{(n)}\}$, $\{w^{(n)}\}$, казатимемо, що ітераційний процес (2.4) двобічно збігається до u^* , а відповідний ітераційний метод називатимемо методом двобічних наближень.

Зазначимо [21, 22], що якщо при дослідженні процесу (2.4) вдається зробити висновок про існування і рівність границь v^* і w^* , то усі припущення, крім нормальності \mathcal{K} є необов'язковими.

Через те, що перевірка умови (A) може бути складною задачею, буде доцільним навести достатні умови її виконання [21, 22].

Нехай виконується умова збіжності ітераційного процесу, оператор \hat{T} є неперервним і має місце наступна нерівність

$$\hat{T}(v+u, w-u) \geq \hat{T}(v, w) + u,$$

де $u > \theta$, $v < w$, $v, w, v+u, w-u \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Тоді умова (A) виконана на $\langle v_0, w_0 \rangle$.

Зазначимо також, що умова [23] існування такого $\gamma \in (0;1)$, що

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\| \text{ для всіх } v, w \in \langle v_0, w_0 \rangle,$$

є достатньою умовою виконання умови (A).

І нарешті зауважимо, що умова (A) автоматично виконується для u_0 -псевдоувігнутих операторів, а саме, має місце наступне твердження [21, 22].

Теорема. Нехай оператор T є u_0 -псевдоувігнутим і для нього існує сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$ і виконується хоча б одна з умов, необхідних для існування нерухомої точки u^* . Тоді оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$.

2.3 Застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна до розв'язання двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності

Задача знаходження розв'язку нелінійної крайової задачі, що є математичною моделлю теплопровідності, коли коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури і коли у області Ω наявні джерела тепловиділення, розподілені за експоненціальним законом, має наступний вигляд

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = f(\theta), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.8)$$

де θ – температура;

$k(\theta) = k_0 \theta^\sigma$ – коефіцієнт теплопровідності;

$k_0 > 0$ – значення коефіцієнта теплопровідності у лінійному середовищі;

$f(\theta) = e^\theta + \lambda e^{-\theta}$ – функція потужності теплових джерел;

$\sigma > 0$ – параметри нелінійності середовища;

$\lambda > 0$ – стала, що характеризує потужність теплових джерел.

Зробивши заміну $\theta = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(x, y)$ – нова невідома функція, для

функції u отримаємо крайову задачу

$$-\Delta u = F(u), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$u(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.10)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.11)$$

де $F(u) = e^{\mu u^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu u^{\frac{1}{1+\sigma}}}$;

$$\mu = \left(\frac{\sigma + 1}{k_0} \right)^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

Задача (2.9) – (2.11) є задачею Діріхле для напівлінійного еліптичного рівняння. Зрозуміло, що функція $F(u)$ неперервна і додатна при $u > 0$.

Нехай $G(x, y, \xi, \eta)$ – функція Гріна задачі (2.9) – (2.11). Тоді задача (2.9) – (2.11) буде еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (2.12)$$

Розглядатимемо рівняння (2.12) у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} |u(x, y)|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(x, y) \geq 0, (x, y) \in \bar{\Omega}\}$ невід'ємних функцій. Конус \mathcal{K}_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим). За допомогою конуса \mathcal{K}_+ у просторі $C(\bar{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leq v, \text{ якщо } v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x, y) \leq v(x, y) \text{ для всіх } (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Отже, на разі існування класичного розв'язку задачі (2.9) – (2.11), тобто функції $u^* \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$, яка задовольняє рівняння (2.9) і умови (2.10), (2.11), ця функція також задовольняє й інтегральне рівняння (2.12). Якщо ж класичний розв'язок не існує, то за основу означення узагальненого розв'язку задачі (2.9) – (2.11) можна взяти рівняння (2.12).

З рівнянням (2.12) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (2.13)$$

З'ясуємо деякі властивості оператора T вигляду (2.13).

З тих розумінь, що функція Гріна неперервна і додатна при $(x, y), (\xi, \eta) \in \bar{\Omega}$, $(x, y) \neq (\xi, \eta)$, і оператор T діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом (2.13),

можна зробити висновок, що оператор T вигляду (2.13) додатний, тобто такий, що залишає інваріантним конус \mathcal{K}_+ : $T(\mathcal{K}_+) \subset \mathcal{K}_+$.

Також можемо судити, що оператор T вигляду (2.13) є u_0 -додатним, де функція $u_0(x, y)$ належить $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ та визначається рівністю

$$u_0(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.14)$$

Про наявність властивості u_0 -додатності свідчить наступний факт [21]: якщо Ω_0 – деяка підобласть Ω , причому $\mu(\Omega_0) > 0$, то знайдеться таке $\gamma = \gamma(\Omega_0) > 0$, що справджуватиметься нерівність

$$\gamma \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \leq \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Якщо ж тоді $u \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$, то для деякого $\alpha_0 > 0$ існує множина $\Omega_0 \subset \Omega$ така, що $\mu(\Omega_0) > 0$ і $F(u(x, y)) \geq \alpha_0$ для всіх $x, y \in \Omega_0$. Тоді для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(x, y) &= \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \geq \iint_{\Omega_0} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \geq \\ &\geq \alpha_0 \iint_{\Omega_0} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \geq \alpha_0 \gamma \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \alpha_0 \gamma u_0(x, y). \end{aligned}$$

Так само для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(x, y) &= \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \leq \\ &\leq \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} F(u(x, y)) \cdot \iint_{\Omega_0} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} F(u(x, y)) \cdot u_0(x, y). \end{aligned}$$

Отже, остаточно можна стверджувати, що для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$ справджува-
тиметься подвійна нерівність

$$\alpha u_0(x, y) \leq \iint_{\Omega_0} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \leq \beta u_0(x, y),$$

де $\alpha = \alpha_0 \gamma > 0$, $\beta = \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} F(u(x, y)) > 0$, яка і є означенням u_0 -додатності опера-
тора T .

Тоді можна зробити висновок, що для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$ справджуватиметься
наступна нерівність

$$\alpha u_0(x, y) \leq \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) F(u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \leq \beta u_0(x, y), \quad (2.15)$$

де $\alpha = \alpha_0 \gamma > 0$, $\beta = \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} F(u(x, y)) > 0$, яка і свідчить про наявність властивості
 u_0 -додатності оператора T .

Дослідження рівняння Гаммерштейна (2.12), яке є еквівалентним задачі
(2.9) – (2.11), щодо можливості побудови двобічних наближень до його додат-
ного розв'язку можливе за умови, що функція $F(u(x, y))$ має певні властивості,
пов'язані з монотонністю.

Помітимо, що функція $F(u)$ дозволяє діагональне подання
 $F(u) = \hat{F}(u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних v, w невід'ємна функція
 $\hat{F}(v, w) = e^{\mu v^{1+\sigma}} + \lambda e^{-\mu w^{1+\sigma}}$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для
всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Тоді оператор T вигляду (2.13) буде гетеротонним з супутнім
оператором

$$\hat{T}(v, w)(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (2.16)$$

Зрозуміло, що оператори T і \hat{T} цілком неперервні.

Гетеротонний оператор T вигляду (2.13), для якого оператор \hat{T} вигляду (2.16) є супутнім, матиме властивості псевдоувігнутості і навіть u_0 -псевдоувігнутості з функцією u_0 вигляду (2.14), якщо для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{F}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{F}(v, w). \quad (2.17)$$

Дійсно, для будь-яких $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$ з нерівності (2.15) випливає наступна нерівність

$$\alpha u_0(x, y) \leq \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta \leq \beta u_0(x, y), \quad (2.18)$$

де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тобто $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких $v, w \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$.

Припустимо, що $v, w \in K(u_0)$, тобто існують $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$, $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$, $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$ для яких будуть справедливими наступні нерівності $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$, $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$. Дослідимо різницю $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w)$ при $\tau \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(x, y) - \tau \hat{T}(v, w)(x, y) = \\ & = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \left[\hat{F}\left(\tau v(\xi, \eta), \frac{1}{\tau} w(\xi, \eta)\right) - \tau \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отже, з умови неперервності функції $\hat{F}(v(x, y), w(x, y))$ і нерівності (2.17) випливає, що $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \geq \theta$, причому $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) \neq \theta$, що свідчить про псевдоувігнутість оператора T .

Тоді з нерівностей (2.17), (2.18) випливає, що для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} & \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)(x, y) - \tau \hat{T}(v, w)(x, y) = \\ & = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \left[\hat{F}\left(\tau v(\xi, \eta), \frac{1}{\tau} w(\xi, \eta)\right) - \tau \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) \right] d\xi d\eta \geq \alpha_1 u_0(x, y), \end{aligned}$$

де $\alpha_1 > 0$.

Далі, застосовуючи знову нерівність (2.18), отримаємо, що для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}\left(\tau v(\xi, \eta), \frac{1}{\tau} w(\xi, \eta)\right) d\xi d\eta \geq \\ & \geq \tau \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta + \alpha_1 u_0(x, y) \geq \\ & \geq \tau \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta \tau}\right) \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отримаємо, що для всіх $(x, y) \in \bar{\Omega}$ справедлива нерівність

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}\left(\tau v(\xi, \eta), \frac{1}{\tau} w(\xi, \eta)\right) d\xi d\eta \geq \\ & \geq \tau(1 + \delta) \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

де $\delta = \delta(v, w, \tau) = \frac{\alpha_1}{\beta \tau} > 0$, яка і є означенням u_0 -псевдоувігнутості оператора T .

Умова (2.17) у нашому випадку набуває вигляду

$$e^{\mu(\tau v)^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu\left(\frac{1}{\tau}w\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}} > \tau \left(e^{\mu v^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu w^{\frac{1}{1+\sigma}}} \right). \quad (2.19)$$

Отже, матиме місце таке твердження.

Лема. Оператор T вигляду (2.13), де $G(x, y, \xi, \eta)$ – функція Гріна задачі (2.9) – (2.11), що розглядається у просторі $C(\bar{\Omega})$, який є напівупорядкованим за допомогою конуса \mathcal{K}_+ невід’ємних функцій, має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є u_0 -додатним оператором, де функція $u_0(x, y)$ має вигляд (2.14);

в) є гетеротонним оператором, для якого супутнім є оператор \hat{T} вигляду (2.16), де $\hat{F}(v, w) = e^{\mu v^{\frac{1}{1+\sigma}}} + \lambda e^{-\mu w^{\frac{1}{1+\sigma}}}$;

г) якщо для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$ виконується нерівність (2.19), є псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим оператором, де функція $u_0(x, y)$ має вигляд (2.14).

Відтепер покладатимемо, що оператор T вигляду (2.13) гетеротонний із супутнім оператором вигляду (2.16). Дослідимо застосування метода двобічних наближень до знаходження додатного розв’язку інтегрального рівняння (2.12), що є еквівалентним вихідній задачі (2.9) – (2.11).

За допомогою умов $\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0$, $\hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ у конусі \mathcal{K}_+ невід’ємних функцій. Для оператора T вигляду (2.13) ці умови приймають наступний вигляд

$$\iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v_0(\xi, \eta), w_0(\xi, \eta)) d\xi d\eta \geq v_0(x, y) \text{ для всіх } (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2.20)$$

$$\iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(w_0(\xi, \eta), v_0(\xi, \eta)) d\xi d\eta \leq w_0(x, y) \text{ для всіх } (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (2.21)$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v^{(k)}(\xi, \eta), w^{(k)}(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.22)$$

$$w^{(k+1)}(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(w^{(k)}(\xi, \eta), v^{(k)}(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

$$v^{(0)}(x, y) = v_0(x, y), \quad w^{(0)}(x, y) = w_0(x, y). \quad (2.24)$$

Зважаючи на сильну інваріантність конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ та властивість гетеротонності оператора T із супутнім оператором \hat{T} стає очевидним, що послідовність $\{v^{(k)}(x, y)\}$ не спадає за конусом \mathcal{K}_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(x, y)\}$ не зростає за конусом \mathcal{K}_+ . Існування границь $v^*(x, y)$ і $w^*(x, y)$ цих послідовностей отримується з умови нормальності конуса \mathcal{K}_+ і повної неперервності оператора \hat{T} .

Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} v_0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq \\ &\leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0. \end{aligned}$$

Можливі два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. За умови u_0 -увігнутості оператора T можливим є лише випадок $v^* = w^*$, і тоді $u^* := v^* = w^*$ буде єдиною на конусному відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ нерухомою точкою оператора T , а отже, точка u^* буде єдиним на $\langle v_0, w_0 \rangle$ додатним розв'язком задачі (2.9) – (2.11).

Функції $v^*(x, y)$ і $w^*(x, y)$ є розв'язками системи нелінійних інтегральних рівнянь:

$$v(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\xi d\eta, \quad (2.25)$$

$$w(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \hat{F}(w(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (2.26)$$

Якщо система (2.25), (2.26) не має на $\langle v_0, w_0 \rangle$ таких розв'язків, що $v \neq w$, то рівність $v^* = w^*$ буде виконана.

Тоді, матиме місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $\langle v_0, w_0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (2.13) із супутнім оператором \hat{T} вигляду (2.16) і буде справедливою рівність $v^* = w^*$. Тоді ітераційний процес (2.22) – (2.24) збігається за нормою простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.9) – (2.11) на конусному відрізку на $\langle v_0, w_0 \rangle$, причому справедливим є ланцюг нерівностей

$$\begin{aligned} v_0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\ &\leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0. \end{aligned}$$

Наближеним розв'язком крайової задачі (2.9) – (2.11) на k -й ітерації вважатимемо функцію

$$u^{(k)}(x, y) = \frac{w^{(k)}(x, y) + v^{(k)}(x, y)}{2}. \quad (2.27)$$

Для побудованого ітераційного процесу матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку (2.27), а саме:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(x,y) - v^{(k)}(x,y)).$$

Тоді при заданій точності $\varepsilon > 0$ ітераційний процес слід продовжувати до моменту виконання нерівності

$$\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(x,y) - v^{(k)}(x,y)) < 2\varepsilon,$$

і з точністю ε можна казати, що $u^*(x,y) \approx u^{(k)}(x,y)$.

Отже, наближеним розв'язком вихідної задачі можна вважати функцію

$$\theta^{(k)}(x,y) = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u^{(k)}(x,y) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

Оскільки $F(0) = 1 + \lambda > 0$, то конусний відрізок, сильно інваріантний для гетеротонного оператора (2.13), можна шукати у вигляді

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle. \quad (2.28)$$

Тоді нерівності (2.20), (2.21) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda e^{-\mu \beta^{\frac{1}{\sigma+1}}} \right) \iint_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta &\geq 0 \text{ для всіх } (x,y) \in \Omega, \\ \left(e^{\mu \beta^{\frac{1}{\sigma+1}}} + \lambda \right) \iint_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta &\leq \beta \text{ для всіх } (x,y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Перша з цих нерівностей завжди виконується, а другу можна записати у вигляді

$$M \leq \frac{\beta}{e^{\gamma\beta^{\sigma+1}} + \lambda}, \quad (2.29)$$

де $M = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \iint_{\bar{\Omega}} G(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta$.

Оскільки величина $\max_{x,y \in \bar{\Omega}} (w^0(x,y) - v^0(x,y)) = \beta$ має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, то при практичній реалізації ітераційного процесу (2.22) – (2.24) слід взяти найменше β , що задовольняють нерівності (2.29), тобто найменший корінь рівняння

$$M = \frac{\beta}{e^{\gamma\beta^{\sigma+1}} + \lambda}. \quad (2.30)$$

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1

Система Mathematica створена американською компанією Wolfram Research, Inc., голова і засновник якої – відомий фізик і математик Стефан Вольфрам, який є основним автором розробки.

З перших кроків і до остаточного результату Mathematica має швидке та інтуїтивно зрозуміле управління. Mathematica допомагає швидко просуватися до розв'язку задачі при використанні її безпосередньо як інструмента обчислень або ж як потужну систему моделювання.

Все, що система пропонує при запуску, – це чисте робоче вікно нового блокнота. Однак достатньо навіть невеликого досвіду роботи з комп'ютером, щоб поступово оволодіти і вже незабаром визнати – за широтою охоплення математичного матеріалу, за можливостями оформлення робочих документів і, особливо, у частині інтерфейсу Mathematica як мінімум не поступається всім іншим математичним системам.

Вбудовані підказки й інтегрована допомога допомагають швидко почати роботу. Вводячи необхідні числа і символи можна використовувати традиційну систему запису [24].

Однією з особливостей програми є назва стандартних функцій повними іменами без скорочень. Це дозволяє (при певному рівні знання математичної англійської мови) дуже швидко знаходити потрібні функції.

Mathematica не тільки може виконувати необхідні обчислення, але й у багатьох випадках вона вибере оптимальний спосіб проведення обчислень. Все що потрібно зробити – це визначити завдання; Mathematica ховає всі складні механічні аспекти розв'язання, дозволяючи концентруватися безпосередньо на задачі.

Mathematica може однаково добре впоратись із задачами різної складності і масштабів, це щось більше, ніж звичайна script-мова. Можна сказати, що сис-

тема Mathematica написана на мові Mathematica, хоча деякі функції, особливо пов'язані з лінійною алгеброю, з метою оптимізації були написані мовою C [25].

Бібліотека програм Mathematica – це постійно розширювана збірка складного програмного забезпечення, яка створена для розв'язання технічних і обчислювальних задач для різних специфічних областей. Кожний додаток програми було створено фахівцем у своїй галузі, який знає, як застосувати обчислювальні можливості Mathematica.

3.2 Алгоритм розв'язання двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності

Алгоритм розв'язання методом двобічних наближень двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності зі степеневим коефіцієнтом теплопровідності та експоненціальною функцією потужності джерел можна описати наступними кроками:

- а) зробити заміну $\theta = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$ і перейти від задачі (2.7), (2.8) для θ до задачі (2.9) – (2.11) для u ;
- б) перевірити виконання умови (2.19), яка гарантує u_0 -псевдоувігнутість гетеротонного оператора T ;
- в) обчислити значення M за формулою (2.29);
- г) знайти значення сталої β , як корінь рівняння (2.30), а отже, побудувати для оператора T сильно інваріантний конусний відрізок $\langle 0, \beta \rangle$;
- д) задати точність $\varepsilon > 0$;
- е) за ітераційною схемою (2.22) – (2.24) побудувати послідовність верхніх $\{w^{(k)}\}$ та нижніх $\{v^{(k)}\}$ наближень;

ж) якщо $\|w^{(k)} - v^{(k)}\| < 2\varepsilon$, то записати наближений розв'язок задачі (2.9) – (2.11)

$$u^{(k)} = \frac{w^{(k)} + v^{(k)}}{2},$$

при цьому $\|u^* - u^{(k)}\| < \varepsilon$, тобто з точністю ε можна стверджувати, що $u^* \approx u^{(k)}$;

з) записати розв'язок вихідної задачі (2.7), (2.8) як

$$\theta^{(k)}(x, y) = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u^{(k)}(x, y) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

3.3 Опис програми

Програмна реалізація методу двобічних наближень була реалізована у системі символьної математики Mathematica 11.

Програма розділена на наступні блоки:

а) «Declaration» – відповідає за визначення всіх вихідних даних задачі, а саме вигляду крайових умов, значень параметрів λ , k_0 , σ , а також точність обчислень і деякі змінні, необхідні для подальших обчислень;

б) «Functions» – містить визначення правої частини диференціального рівняння, а також функцій, необхідних для визначення оператора T , тобто розрахунок функції Гріна;

в) «Beta and max lambda calculation» – слугує для задання початкового наближення метода, тобто відповідає за пошук можливих значень β і відповідного для нього максимального значення параметру λ , щоб автоматично або вручну обирати значення для λ і β ;

г) «Conical segment declaration» – складається з побудови сильно інваріантного конусного відрізка та побудови початкових наближень послідовностей для ітераційного метода;

д) «Results» – містить інформацію про результат роботи ітераційного методу, наприклад, норму наближених розв’язків, графіки перерізу наближених розв’язків та інформацію про швидкість збіжності.

Код програми наведено в додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент проведемо для задачі

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_0 \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = e^\theta + \lambda e^{-\theta}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0,$$

у якій покладемо $k_0 = 1$, $\lambda = 0,25$ і $\sigma = 0,5$. Такі умови відповідають експерименту з лазерним синтезом водневої плазми [1].

Після заміни $\theta = \left[\frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(x, y)$ – нова невідома функція, отримаємо крайову задачу вигляду (2.9) – (2.11) для функції u .

Функція Гріна для задачі (2.9) – (2.11) у крузі радіуса $R = 1$ матиме вигляд:

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 \rho^2 - 2r\rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + 1}{r^2 - 2r\rho \cdot \cos(\varphi - \psi) + \rho^2},$$

де $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;

$$\xi = \rho \cos \psi, \quad \eta = \rho \sin \psi.$$

Знайдемо значення параметра M за формулою (2.29). Підставивши параметри вихідної задачі, отримали, що $M = \frac{1}{4}$. Наступним кроком буде знаходження значення параметра β та побудова сильно інваріантного конусного відрізка. З рівняння (2.30) знаходимо, що $\beta = 1,38844$. Тоді сильно інваріантний конусний відрізок запишеться за формулою (2.28), оскільки умова $F(0) = 1 + \lambda > 0$ буде виконана, і матиме вигляд $\langle 0, \beta \rangle$.

Запустимо ітераційний процес (2.22) – (2.24) із точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Ітераційний процес зійшовся до розв'язку вихідної задачі із заданою точністю за 12 ітерацій. Результати виконаних ітерацій наведено на рис. 3.1 і табл. 3.1 та 3.2. Із міркувань симетричності наведемо лише значення функцій $u(\rho, \varphi)$ та $\theta(\rho, \varphi)$ на промені $\varphi = 0$. Зокрема, рис. 3.1 характеризує двобічний характер збіжності побудованих ітераційних послідовностей.

Залежність норми наближеного розв'язку $\theta(x, y)$, швидкості збіжності метода та кількості ітерацій від параметра λ наведено на рис. 3.2 – 3.4 відповідно. Залежність норми наближеного розв'язку $\theta(x, y)$ від параметра σ наведено на рис. 3.5.

Максимальні значення λ для деяких значень σ наведено в табл. 3.3. Залежність максимального значення λ від параметра σ наведено на рис. 3.6.

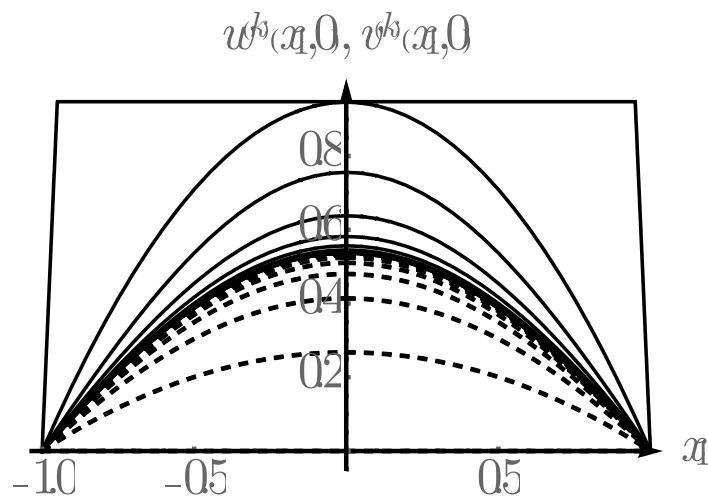


Рисунок 3.1 – Графіки $v^{(k)}(x_1, 0)$ і $w^{(k)}(x_1, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 12$

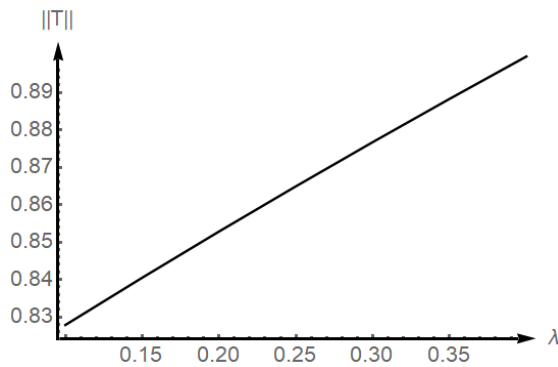
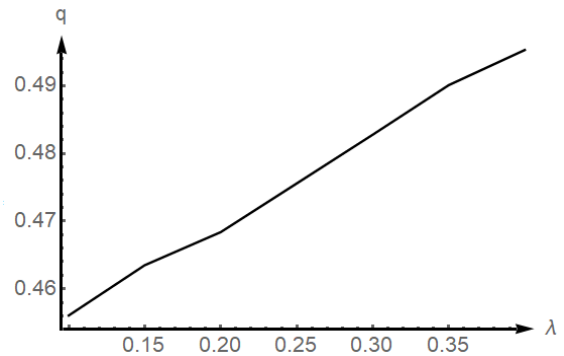
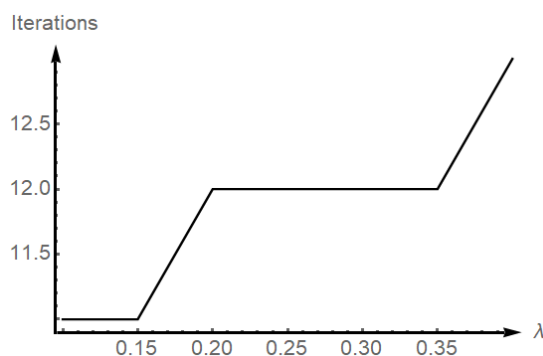
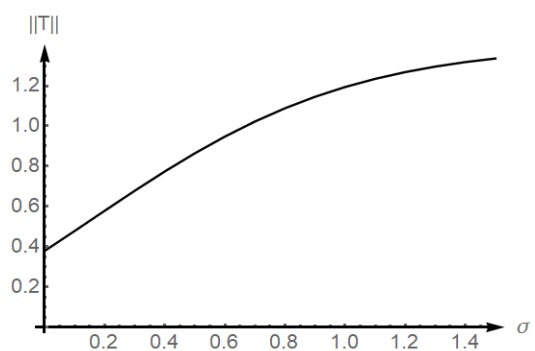
Таблиця 3.1 – Значення наближеного розв'язку $u^{(12)}(x, y)$

ρ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(12)}(\rho, 0)$	0,536840	0,530647	0,512181	0,481776	0,439971	0,387491
ρ	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$u^{(12)}(\rho, 0)$	0,325222	0,254175	0,175467	0,090302	0,000000	

Таблиця 3.2 – Значення наближеного розв'язку $\theta^{(12)}(x, y)$

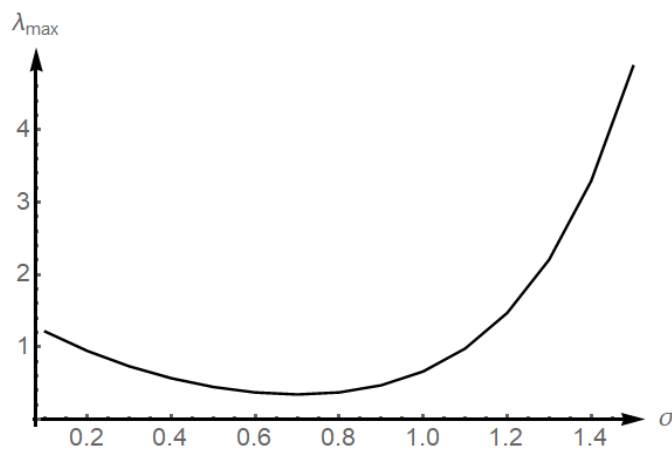
ρ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\theta^{(12)}(\rho, 0)$	0,865547	0,858878	0,838835	0,805300	0,758013	0,696470
ρ	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$\theta^{(12)}(\rho, 0)$	0,325222	0,254175	0,175467	0,090302	0,000000	

Як бачимо з рис. 3.2 та 3.3 зі зростанням параметра λ як норма наближеного розв'язку задачі, так і кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності, збільшуються.

Рисунок 3.2 – Графік залежності норми розв'язку $\theta(x, y)$ від параметра λ при $\sigma = 0,5$ Рисунок 3.3 – Графік залежності швидкості збіжності ітераційного методу від параметра λ Рисунок 3.4 – Графік залежності кількості ітерацій від параметра λ Рисунок 3.5 – Графік залежності норми розв'язку $\theta(x, y)$ від параметра σ при $\lambda = 0,25$

Таблиця 3.3 – Максимальні значення λ для деяких значень σ

σ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
λ_{\max}	1,2108	0,9434	0,7309	0,5661	0,4456	0,3694
σ	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
λ_{\max}	0,3414	0,3699	0,4688	0,6602	0,9773	1,4690
σ	1,3	1,4	1,5			
λ_{\max}	2,2067	3,2938	4,8801			

Рисунок 3.6 – Графік залежності максимального значення λ від параметра σ

Лінії рівня та графіки перерізу наближеного розв'язку $\theta(x, y)$ для різних значень параметра σ наведено на рис. 3.7 – 3.12 і 3.13 – 3.18 відповідно.

Швидкість збіжності ітераційного процесу оцінювалася величиною $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$,

де $\varepsilon_k = \max_{x, y \in \Omega} (w^{(k)}(x, y) - v^{(k)}(x, y))$, $k = 1, 2, \dots$. Як бачимо, процес збігається зі

швидкістю геометричної прогресії. Оцінка знаменнику q прогресії в залежності від λ наведено у табл. 3.3. Отримали, що зростання λ призводить до збільшення q , що свідчить про уповільнення збіжності ітерацій.

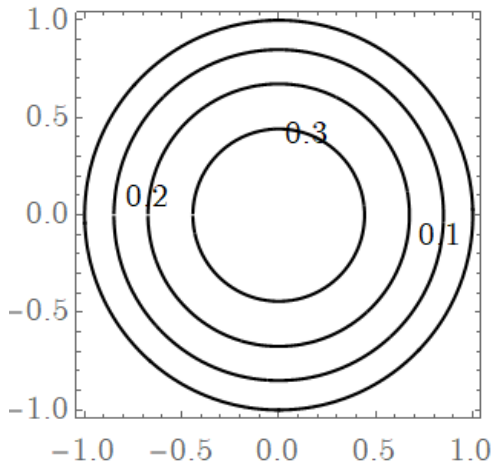


Рисунок 3.7 – Лінії рівня розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 0$

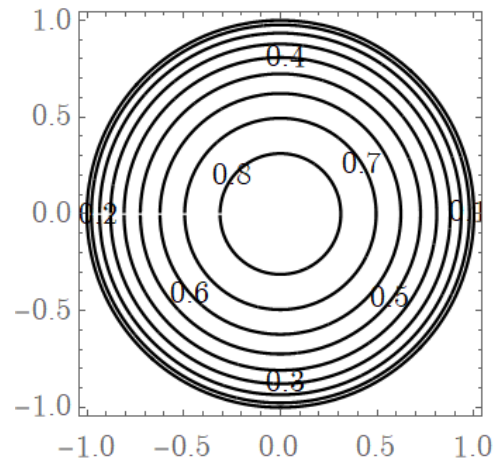


Рисунок 3.8 – Лінії рівня розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 0,5$

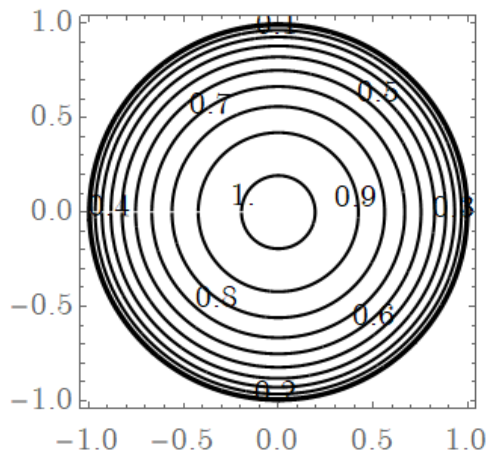


Рисунок 3.9 – Лінії рівня розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 0,75$

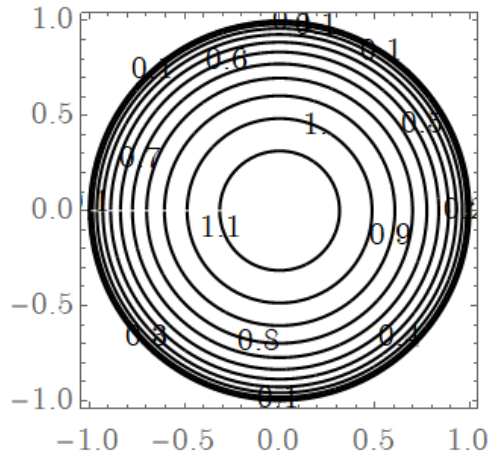


Рисунок 3.10 – Лінії рівня розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 1$

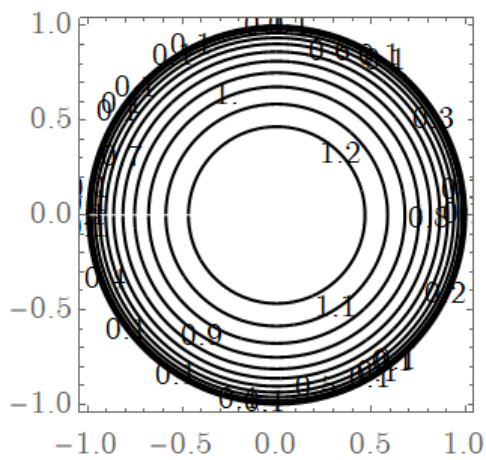


Рисунок 3.11 – Лінії рівня розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 1,25$

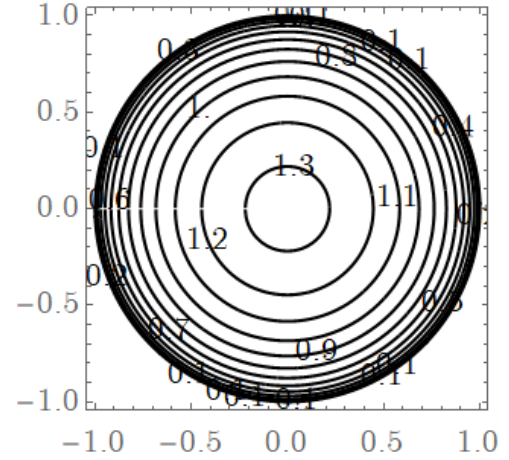


Рисунок 3.12 – Лінії рівня розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 1,5$

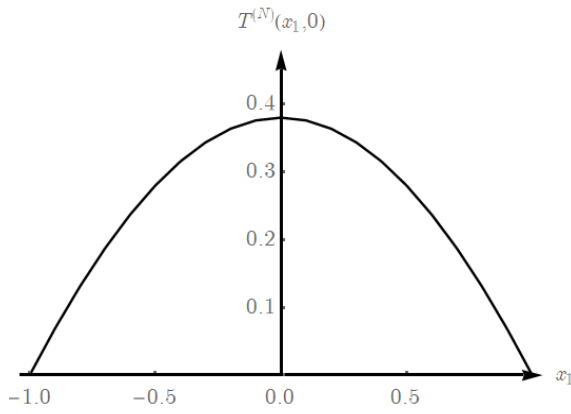


Рисунок 3.13 – Переріз
розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 0$

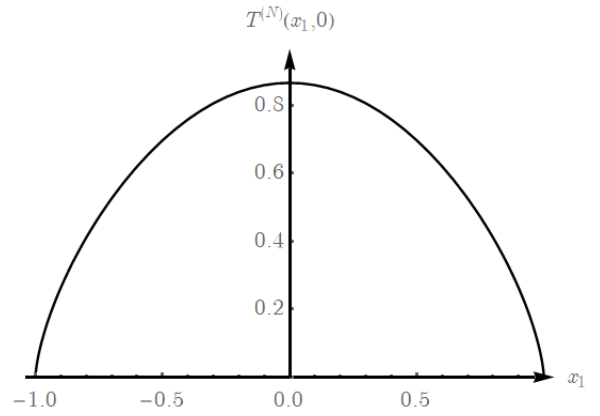


Рисунок 3.14 – Переріз
розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 0,5$

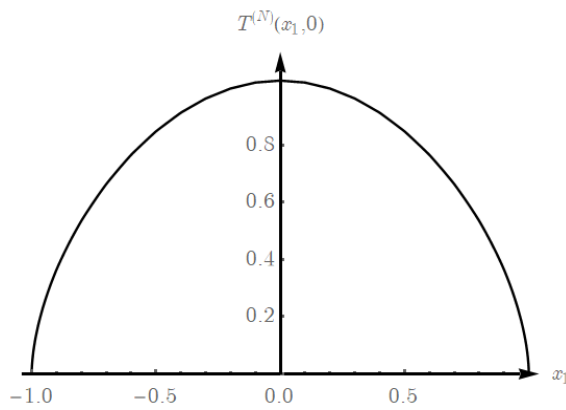


Рисунок 3.15 – Переріз
розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 0,75$

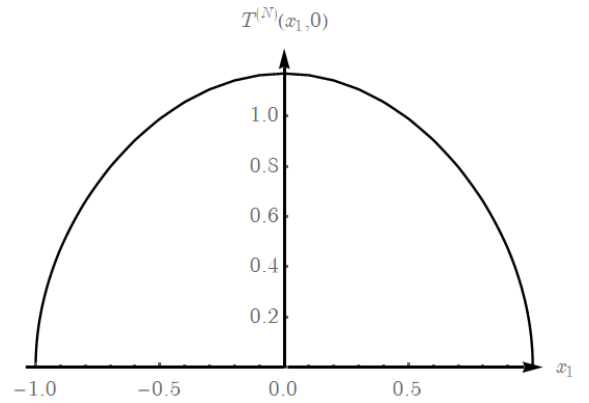


Рисунок 3.16 – Переріз
розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 1$

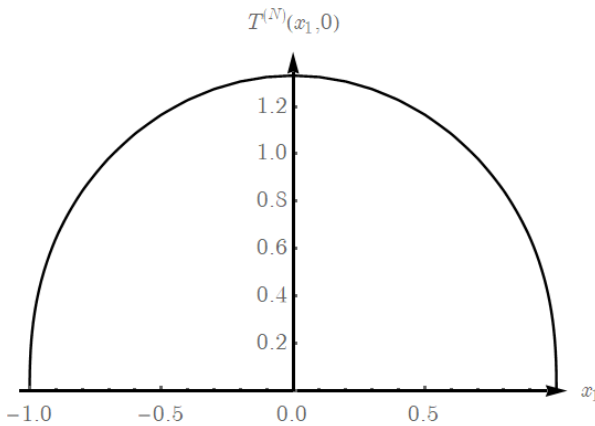


Рисунок 3.17 – Переріз
розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 1,25$

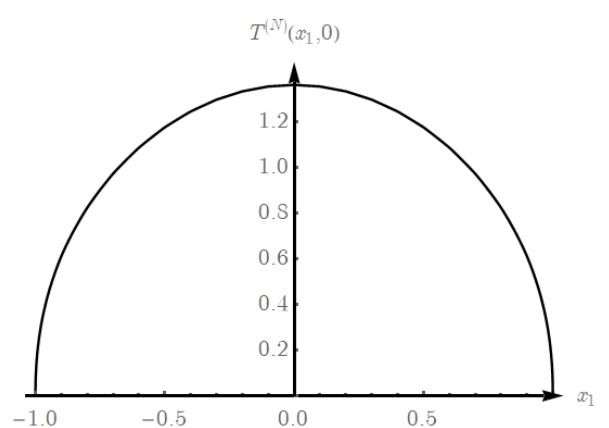


Рисунок 3.18 – Переріз
розв'язку $\theta(x, y)$ при $\sigma = 1,5$

Таблиця 3.3 – Значення оцінки збіжності q при різних значеннях λ

λ	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
q	0,428	0,435	0,442	0,448	0,454	0,460	0,465

Розрахунки проводилися до уточнення чотирьох значущих цифр у нормі наближеного розв'язку $u^{(k)}$.

Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» (м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 р.) [26].

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було досліджено можливість побудови двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку двовимірного нелінійного диференціального рівняння теплопровідності, а також проведено чисельний аналіз залежності норми наближеного розв'язку від сталої, що характеризує потужність теплових джерел, і параметра нелінійності середовища.

1. Проведено огляд математичних моделей лазерного термоядерного синтезу, звідних до нелінійного рівняння теплопровідності, та методів чисельного розв'язання задач пов'язаних із ними, що призвело до виділення методу двобічних наближень як найбільш ефективного у розв'язанні таких задач.

2. Розглянуто першу крайову задачу для двовимірного нелінійного диференціального рівняння теплопровідності. Методами нелінійного аналізу у напівпорядкованих просторах було досліджене, отримане із застосуванням методу функції Гріна, інтегральне рівняння Гаммерштейна, еквівалентне розглядуваній задачі після проведення заміни невідомої функції. Отримано умови існування єдиного додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень.

3. На основі отриманих результатів побудовано алгоритм та виконано програмну реалізацію методу двобічних наближень у системі комп'ютерної алгебри Mathematica, у якій було отримано наближені розв'язки розглядуваної крайової задачі та проведено аналіз залежності норми побудованого розв'язку від значень параметра нелінійності середовища і сталої, що характеризує потужність теплових джерел.

4. Створений програмний продукт можна використовувати для майбутніх досліджень різних типів крайових задач та їх розв'язків, а також до розв'язання прикладних задач, характерних для досліджень у сфері процесів термоядерного синтезу та горіння. Отримані результати також застосовні до стаціонарних диференціальних рівнянь з іншими типами нелінійностей, а також до розв'язання задач для нестационарних нелінійних рівнянь.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд. Москва : Физматлит, 2001. 320 с.
2. Ашихмин В. Н. Введение в математическое моделирование : уч. пособ. Москва : Университетская книга, 2007. 440 с.
3. Проблемы лазерного термоядерного синтеза. Сб. статей / Пер. под ред. А. А. Филюкова. Москва : Атомиздат, 1976. 296 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд., испр. Москва : Наука, 1989. 616 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. 2-е изд. Москва : Научный мир, 2003. 316 с.
6. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики / Под ред. Г. И. Марчука. Москва : Физматлит, 2002. 320 с.
7. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. Москва : Едиториал УРСС, 2003. 616 с.
8. Шувар Б. А., Копач М. І., Ментинський С. М., Обшта А. Ф. Двосторонні наближені методи. Івано-Франковськ: ВДВ ЦІТ, 2007. 515 с.
9. Маринець В. В., Питьовка О. Ю. Один підхід побудови двосторонніх наближень до розв'язку крайової задачі у випадку диференціально-функціонального рівняння гіперболічного типу // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика. 2011. Вип. 22, № 2. С. 101–109.
10. Луханін В. С. Про побудову двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі з експоненціальною мажорантою // Радио-електроника и информатика. 2015. № 2 (69). С. 16–18.
11. Обшта А. Ф., Шувар Б. А., Ментинський С. М. Побудова двосторонніх наближень до розв'язків одного класу крайових задач // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. 2012. № 9. С. 95–99.

12. Kolosova S. V., Lukhanin V. S. On the construction of two-sided approximations to positive solutions of some elliptic problem // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes*. 2016. V. 5. №. 4. P. 11–19.

13. Сидоров М. В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2018. Вип. 18. С. 146–161.

14. Сидоров М. В. Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики : дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Харків. нац. ун-т радіоелектрон. Харків, 2019. 486 с.

15. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2017. Вип. 16. С. 157–167.

16. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью / Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский // *Письма в ЖЭТФ*. 1977. Т. 26, № 9. С. 620–624.

17. Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициирования термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения / П. П. Волосевич, Л. М. Дегтярев, Е. И. Леванов [та ін.] // *Физика плазмы*. 1976. Т. 2, Вып. 2. С. 883–897.

18. Лазерное инициирование термоядерной реакции в неоднородных сферических мишенях / Ю. В. Афанасьев, Н. Г. Басов, П. П. Волосевич [та ін.] // *Письма в ЖЭТФ*. 1975. Т. 21, № 2. С. 150–155.

19. Нагрев дейтериево-третиевой плазмы до термоядерных температур с помощью излучения ОКГ / Ю. В. Афанасьев, Н. Г. Басов, П. П. Волосевич [та ін.] // *Препринт ФИАН. Москва, № 66, 1972*.

20. Опойцев В. И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // *Труды Московского математического общества*. 1978. Т. 36. С. 237–273.

21. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.
22. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
23. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987. V. 11, № 5. P. 623–632.
24. Mathematica: a system for doing mathematics by computer (2nd ed.) | Guide books. URL : <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/129711> (дата звернення: 26.11.2022).
25. Половко О. М. Mathematica для студента. Полтава : ПолДрук, 2007. 368 с.
26. Василюшин К. В., Сидоров М. В. Чисельний аналіз методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна двовимірних крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності // Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» : матеріали статей (м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 р.). Івано-Франківськ : ПНУ ім. В. Стефаника, 2022. С. 145–148.