УДК 510.62

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ЯВНОГО ЗАДАНИЯ КОНЕЧНЫХ АЛФАВИТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Статья является продолжением работы [1]. Выражения, получаемые при явном задании конечных алфавитных операторов, имеют большую суммарную длину, чем выражения неявного задания. Однако они незаменимы для построения переключательных цепей, в которых реализуются конечные алфавитные операторы. Явное задание алфавитного оператора можно рассматривать как формульную запись переключательной цепи, воспроизводящей реакции этого алфавитного оператора. Хранить же информацию об алфавитных операторах в памяти ЭВМ более удобно в форме выражений их неявного задания.

Ограничим область изменения буквенной переменной y значениями $b_1, b_2, \ldots, b_l$, т. е. свяжем ее уравнением

$$y^{b_1} \vee y^{b_2} \vee \ldots \vee y^{b_l} = 1. \qquad (1)$$

При выполнении этого условия любой однозначный, вообще говоря, частичный алфавитный оператор $y = G(x_1, x_2 \ldots x_m)$, заданный в неявной форме уравнением

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 1, \qquad (2)$$

может быть записан в явной форме следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_1) &= y^{b_1}; \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_2) &= y^{b_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_l) &= y^{b_l}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Чтобы доказать только что сформулированное утверждение, установим, что система, состоящая из уравнений (1) и (2), эквивалентна системе уравнений (1) и (3). Зафиксируем произвольным образом значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$. Пусть набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ является решением системы, состоящей из уравнений (1) и (2). Отсюда следует: $y = b_i\ (1 \leqslant i \leqslant l)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_i) = 1$. В силу однозначности алфавитного оператора G для любого $j \neq i\ (1 \leqslant j \leqslant l)$ имеем $g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_j) = 0$. Поэтому все уравнения системы (3), кроме i-го, обращаются в тождество вида $0 = 0$; i-е же уравнение обращается

в тождество вида $1=1$. Таким образом, набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ является также решением системы, состоящей из уравнений (1) и (3).

Предположим теперь, что набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ не является решением системы уравнений (1) и (2). Если $y \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$, условие (1) не выполняется, а вместе с ним не выполняется и система условий (1) и (3). Если же $y = b_i\,(1 \leqslant i \leqslant l)$, не выполняется условие (2), поэтому $g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_i) = 0$. В результате i-е уравнение системы (3) обращается в противоречие вида $0 = 1$. Итак, набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ не является решением системы уравнений (1) и (3). Следовательно, системы уравнений (1), (2) и (1), (3) эквивалентны друг другу.

Важно заметить, что в случае, когда уравнением (2) задан многозначный в области значений $\{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ алфавитный оператор G, системы уравнений (1), (2) и (1), (3) уже не будут эквивалентными друг другу. Действительно, предположим, что имеется два набора: $(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_i)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_j)$, причем $i \neq j$ и $1 \leqslant i, j \leqslant l$, удовлетворяющие уравнению (2). Однако ни один из этих наборов не удовлетворяет системе уравнений (3). Набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_i)$ обращает в противоречие вида $1=0$ j-е уравнение системы (3), а набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_j)$ — i-е уравнение.

Зададим алфавитный оператор $y_1y_2 \ldots y_n = F(x_1, x_2 \ldots x_m)$ системой уравнений:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1) &= 1; \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_2) &= 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_n) &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Каждым из этих уравнений определяется значение соответствующей буквы выходного слова $y_1y_2 \ldots y_n$ алфавитного оператора F для входного слова $x_1x_2 \ldots x_m$. Тем самым с помощью уравнений (4) задается в неявной форме система алфавитных операторов:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m); \\ y_2 &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_n &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{aligned} \tag{5}$$

формирующих отдельные буквы выходного слова алфавитного оператора.

Переходя к представлению в явной форме описанным методом алфавитных операторов $F_1, F_2, \ldots, F_n$, получаем аналитическое задание в явной форме алфавитного оператора F:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{11}) = y_1^{b_{11}};$$

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{12}) = y_1^{b_1};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{1l_1} = y_1^{b_{1l_1}};\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{21}) = y_2^{b_{21}};\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{22}) = y_2^{b_{22}};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{2l_2}) = y_2^{b_{2l_2}};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{n1}) = y_n^{b_{n1}};\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{n2}) = y_n^{b_{n2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_{nl_n}) = y_n^{b_{nl_n}}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь имеется в виду, что области изменения переменных y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ограничены множествами букв $T_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{il_i}\}$, где l_i — число букв в множестве T_i. Всего в системе (6) содержится $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ уравнений. Система (6) допускает непосредственное вычисление букв выходного слова $y_1y_2 \ldots y_n$ алфавитного оператора F по заданным значениям букв входного слова $x_1x_2 \ldots x_m$. Задание же алфавитного оператора F в виде системы (4) не дает такой возможности: в этом случае буквы выходного слова могут быть найдены только путем решения уравнений.

Рассмотрим **пример.** В качестве оператора F возьмем оператор $y_1y_2y_3 = F(x_1x_2)$, который ставит в соответствие троичным цифрам x_1, x_2 их сумму в виде трехразрядного двоичного кода $y_1y_2y_3$. В работе [1] было получено неявное описание этого оператора в виде системы (12). Требуется записать заданный алфавитный оператор F в явном виде. Значения переменных y_1, y_2, y_3 — двоичные, поэтому принимаем $T_1 = T_2 = T_3 = \{0, 1\}$.

Исходя из уравнений (12) работы [1] и поочередно подставляя в них вместо переменных y_1, y_2, y_3 значения 0 и 1, после упрощений получаем следующую систему, задающую оператор $y_1y_2y_3 = F(x_1x_2)$ в явном виде:

$$
\begin{aligned}
&(x_1^0 \vee x_1^1)(x_2^0 \vee x_2^1 \vee x_2^2) \vee x_1^2(x_2^0 \vee x_2^1) = y_1^0;\\
&x_1^2x_2^2 = y_1^1;\\
&x_1^0(x_2^0 \vee x_2^1) \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^2x_2^2 = y_2^0;\\
&x_1^0x_2^2 \vee x_1^1(x_2^1 \vee x_2^2) \vee x_1^2(x_2^0 \vee x_2^1) = y_2^1;\\
&(x_1^0 \vee x_1^2)(x_2^0 \vee x_2^2) \vee x_1^1x_2^1 = y_3^0;\\
&x_1^1(x_2^0 \vee x_2^2) \vee (x_1^0 \vee x_1^2)x_2^1 = y_3^1.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Уравнения (6) можно получить непосредственно по таблице алфавитного оператора, минуя его неявную форму задания (4). С этой целью в левой части уравнений записываем усеченные СДНФ, составленные из всех конституэнт единицы, наборы показателей которых совпадают с входными словами, такими, что им соответствует одна и та же буква на заданном месте в выходных словах. В правой части уравнений пишем переменную, соответствующую заданному месту в выходных словах, с показателем, совпадающим с буквой, которая стоит на заданном месте. Например, по таблице [1] для алфавитного оператора $y_1y_2y_3 = F(x_1x_2)$, рассмотренного выше, записываем следующие уравнения типа (6):

$$\begin{aligned}
&x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^1x_2^2 \vee \\
&\vee x_1^2x_2^0 \vee x_1^2x_2^1 = y_1^0; \quad x_1^2x_2^2 = y_1^1; \\
&x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^2x_2^2 = y_2^0; \\
&x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^1x_2^2 \vee x_1^2x_2^0 \vee x_1^2x_2^1 = y_2^1; \\
&x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^2x_2^0 \vee x_1^2x_2^2 = y_3^0; \\
&x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^1x_2^2 \vee x_1^2x_2^1 = y_3^1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из них путем тождественных преобразований могут быть получены уравнения (7).

Рассмотрим пример вычисления выходного слова $y_1y_2 \ldots y_n$ алфавитного оператора F по заданному входному слову $x_1x_2 \ldots x_m$. Определим двоичную сумму $y_1y_2y_3$ троичных слагаемых $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ с помощью явного задания алфавитного оператора $y_1y_2y_3 = F(x_1x_2)$. Подставляя в левые части равенств (7) или (8) заданные значения x_1, x_2, x_3, имеем $y_1^0 = 1$, $y_1^1 = 0$, $y_2^0 = 0$, $y_2^1 = 1$, $y_3^0 = 0$, $y_3^1 = 1$. Таким образом, $y_1y_2y_3 = 011$. Задание алфавитного оператора в форме (6) может служить отправным пунктом при построении комбинационных схем, реализующих этот алфавитный оператор.

Рассмотрим методы построения переключательных цепей со многими выходами (рис. 1), с помощью которых реализуется система конечных предикатов:

$$\begin{aligned}
t_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m); \\
t_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m); \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m).
\end{aligned} \tag{9}$$

Такие цепи преобразуют m-разрядные буквенные коды в n-разрядные двоичные коды, составленные из логических констант. Цепь со многими выходами можно построить из n независимо действующих цепей с одним выходом [2] (рис. 2), вырабатываю-

щих сигналы t_1, t_2, ..., t_n в ответ на поступление на их входы сигналов x_1, x_2, ..., x_m. Однако такая цепь не экономна.

Во многих случаях экономия может быть достигнута за счет объединения независимых цепей в единую и использования одних и тех же блоков цепи при формировании различных выходных сигналов (отказ от трехступенчатости и переход к цепям с большим числом ступеней). Рассмотрим пример. Задана система

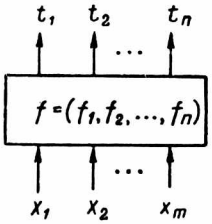

Рис. 1

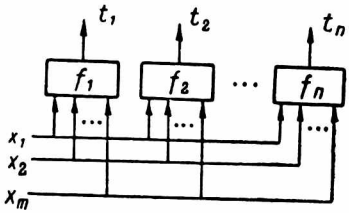

Рис. 2

из двух конечных предикатов f и g в виде их минимальных дизъюнктивных нормальных форм:

$$f = x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a; \qquad (10)$$

$$g = x_1^a \vee x_2^c x_3^a. \qquad (11)$$

Реализуя формулы (10) и (11) независимо действующими цепями, получаем схему с 8 блоками узнавания и 13 диодами при трех ступенях (рис. 3).

По таблицам предикатов f и g устанавливаем, что предикат f является импликантой предиката g. Это дает нам возможность записать предикат g в форме

$$g = f \vee x_1^a. \qquad (12)$$

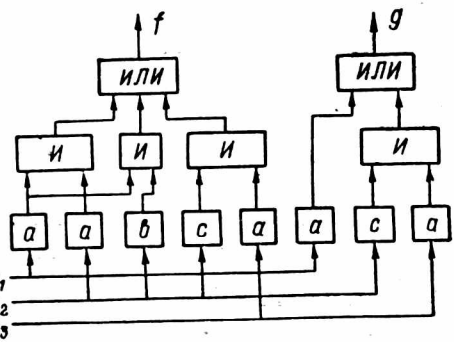

Рис. 3

По формулам (10) и (11) строим цепь, содержащую 5 блоков узнавания и 11 диодов при четырех ступенях (рис. 4, *а*).

Другой вариант еще более экономной цепи можно получить, замечая, что в обеих формулах (10) и (11) имеется один и тот же дизъюнктивный член $x_2^c x_3^a$. Вводим дополнительную логическую переменную

$$t = x_2^c x_3^a. \qquad (13)$$

Теперь формулы (10) и (11) перепишутся в виде

$$f = x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee t,\ g = x_1^a \vee t. \qquad (14)$$

Переключательная цепь, построенная по формулам (13) и (14), содержит 5 блоков узнавания и 11 диодов при трех ступенях (рис. 4, *б*).

Рассмотренные переключательные цепи со многими выходами можно применить для построения устройств, реализующих конечные алфавитные операторы. Эти устройства строим по фор-

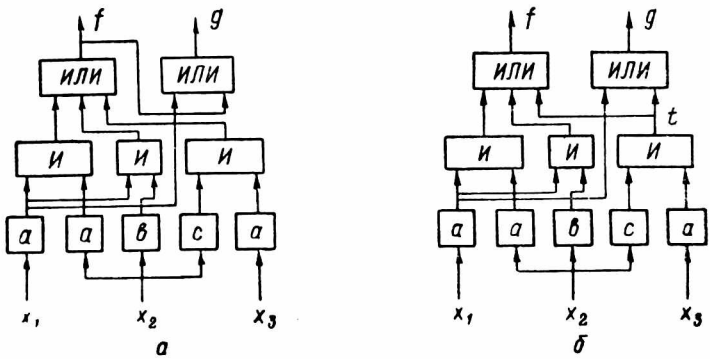

Рис. 4

мулам явного задания алфавитных операторов. Алфавитный оператор $y = G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданный уравнением $g(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 1$, может быть записан в явной форме в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y^{b_1};\\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y^{b_2};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_l(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y^{b_l}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Здесь $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — возможные значения алфавитного оператора G; $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant l$.

Систему (15) можно реализовать в устройстве, изображенном на рис. 5. Блок *1* представляет собой переключательную цепь со многими выходами, реализующую систему (15) конечных предикатов $f_1, f_2, \ldots, f_l$. На входы цепи поступают буквы $x_1, x_2, \ldots, x_m$, в ответ на это цепь формирует двоичные (логические) сигналы $y^{b_1}, y^{b_2}, \ldots, y^{b_l}$. Эта цепь может быть построена описанным методом. Блок *2* формирует букву y по заданным значениям логических переменных $y^{b_1}, y^{b_2}, \ldots, y^{b_l}$. Если алфавитный оператор G определен всюду, тогда для любого набора значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ блок *1* на одном из своих выходов формирует сигнал 1 (пусть это будет i-й выходной ка-

нал), а на остальных — **0**. В этом случае блок *2* должен сформировать на своем выходе сигнал b_i, соответствующий решению уравнения $y^{b_i} = 1$. Если же алфавитный оператор G — частичный, для некоторых наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ блок *1* на всех своих выходных каналах сформирует сигнал **0**; блок *2* не должен реагировать никаким выходным сигналом y. Отсутствие сигнала с блока *2* не следует смешивать с появлением на выходе этого блока знака пробела. В качестве блока *2* можно использовать устройство вывода информации для универсальной

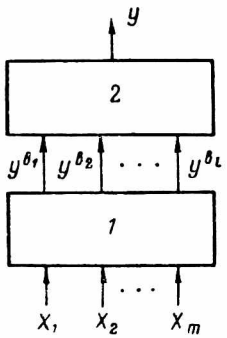

Рис. 5

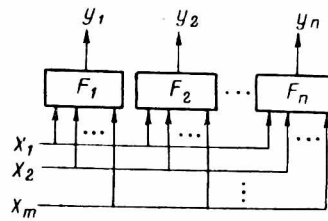

Рис. 6

ЭВМ или цифро-аналоговый преобразователь управляющей вычислительной машины (например, буквопечатающее устройство). В этом случае единичным значениям логических переменных $y^{a_1}, y^{a_2}, \ldots, y^{a_l}$ соответствуют сигналы, возбуждающие электромагниты печатающего устройства. Эти электромагниты приводят в движение рычаги или молоточки, печатающие соответственно буквы $a_1, a_2, \ldots, a_l$.

Обычно в алфавите печатающего устройства предусматривается знак пробела ␣. Единичное значение переменной $y^{␣}$ соответствует наличию сдвига каретки или поворота барабана с бумажной лентой на один шаг. Если $y = ␣$, на соответствующем месте бумажной ленты не печатается никакой знак, однако происходит перемещение каретки или ленты в следующую позицию. Число молоточков равно $(l - 1)$, оно на единицу меньше числа различных букв, формируемых буквопечатающим устройством. Предположим, что для некоторого набора значений переменных $y^{a_1}, y^{a_2}, \ldots, y^{a_l}$ значение y не должно существовать. Физически это соответствует отсутствию каких бы то ни было реакций буквопечатающего устройства в ответ на появление комбинации сигналов $y^{a_1}, y^{a_2}, \ldots, y^{a_l}$, управляющих его работой.

Когда в роли блока *2* используется цифро-аналоговый преобразователь, то буквы $b_1, b_2, \ldots, b_l$ соответствуют некоторым физическим состояниям, формируемым на выходе преобразователя в ответ на появление одиночного сигнала **1** соответственно

на первом, втором и т. д. l-м его входе при нулевых значениях сигналов на остальных входах. Если на все входы преобразователя поступят нулевые сигналы, в ответ на это его выход должен просто бездействовать. На такой набор входных сигналов блок *2* не должен вообще откликаться какими бы то ни было физическими состояниями. Выходной сигнал цифро-аналогового преобразователя должен отсутствовать также и в том случае, если на входы блока *2* одновременно поступит сразу несколько единичных сигналов. Это может произойти, например, в результате сбоя в переключательной цепи блока *1*.

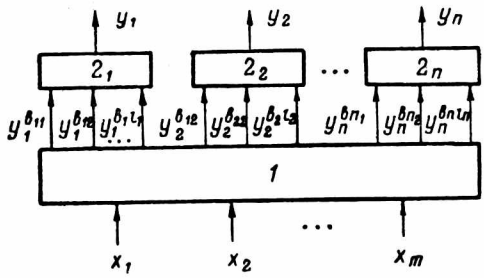

Рис. 7

Алфавитный оператор общего вида $y_1 y_2 \ldots y_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ можно, как указывалось, представить в виде системы алфавитных операторов (5), формирующих отдельные буквы выходного слова алфавитного оператора F. Каждый же из операторов $F_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ можно описать системой уравнений типа (15), а от

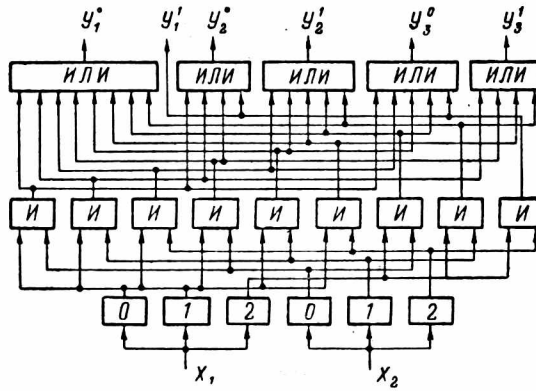

Рис. 8

нее перейти к соответствующей переключательной цепи. В результате получаем устройство, схематически изображенное на рис. 6.

Любой из блоков этого устройства можно представить в виде двухкаскадной системы, показанной на рис. 5. С целью достижения экономии оборудования объединим цепи первых каскадов всех блоков в единую цепь. В результате приходим к схеме, представленной на рис. 7. Ей соответствует система уравнений (6).

Блок *1* — это единая переключательная цепь, формирующая по буквам входного слова $x_1, x_2, \ldots, x_m$ узнавания $y_1^{b_{11}}, y_1^{b_{12}}, \ldots, y_1^{b_{1l_1}}, y_2^{b_{21}}, y_2^{b_{22}}, \ldots, y_2^{b_{2l_2}}, \ldots, y_n^{b_{n1}}, y_n^{b_{n2}}, \ldots, y_n^{b_{nl_n}}$. Блок $2i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) осуществляет преобразование набора узнаваний $y_i^{b_{i1}}, y_i^{b_{i2}}, \ldots, y_i^{b_{il_i}}$ в i-ю букву y_i выходного слова. В дальнейшем на схемах устройств, реализующих конечные алфавитные операторы, блоки $2i$, как однотипные, изображать не будем, приводя лишь блок *1* в виде некоторой переключательной цепи со многими выходами.

Рассмотрим **пример**. Требуется реализовать в виде трехступенчатой переключательной цепи алфавитный оператор $y_1y_2y_3 = F(x_1x_2)$, заданный уравнениями (8). Трехступенчатая переключательная цепь, построенная по этим формулам, изображена на рис. 8. Цепь содержит 6 блоков узнавания и 44 диода.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Аналитические методы неявного задания конечных алфавитных операторов.— В кн.: АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1980, вып. 54. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре предикатов с отрицанием.— В кн: АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1978, вып. 22, с. 42—49.

Поступила 28 марта 1979 г.