

УДК 517.927:517.95]:519.6

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ У ЧИСЕЛЬНОМУ
АНАЛІЗІ ПЛОСКИХ СТАЦІОНАРНИХ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ
В'ЯЗКОЇ РІДИНИ, УСКЛАДНЕНИХ ТЕПЛО- ТА МАСООБМІНОМ**

Башкатов Є.О.

e-mail: yevhen.bashkatov@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Ламтюгова С.М.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

The paper considers the problem of mathematical modeling of two-dimensional steady slow flows of a viscous fluid complicated by heat and mass transfer. For its numerical analysis, the use of the *R*-function method in combination with the Ritz method is proposed.

Дослідження стаціонарних повільних течій в'язкої рідини, ускладнених процесами тепло- та масообміну, є однією з ключових задач сучасного математичного моделювання в рамках гідродинаміки та тепломасообміну. Такі задачі виникають у при вивченні процесів, що протікають у хімічних реакторах (каталітичні процеси, дифузійно-кінетичні режими), енергетичних установках, біореакторах тощо. Особливу складність становлять, зокрема, складна залежність властивостей процесу від температури і концентрації, зв'язок між полями швидкості, температури та концентрації та складна геометрія областей. Класичні чисельні методи (скінченних різниць, скінченних елементів) вимагають складної генерації сіток для областей складної форми особливо з криволінійними ділянками меж. У цьому контексті ефективним є застосування методу *R*-функцій, запропонованого академіком НАН України В.Л. Рвачовим, який дозволяє на аналітичному рівні точно враховувати геометрію області та точно задовольняти всі крайові умови задачі, а далі звести задачу до варіаційної або проєкційної обчислювальної схеми для отримання наближеного розв'язку. Для чисельного розв'язування задач гідродинаміки в'язкої рідини метод *R*-функцій застосовувався, наприклад, у роботах [1, 2].

Нехай Ω – плоска однозв'язна область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. В області Ω розглядатимемо повільну течію в'язкої нестисливої рідини і вважатимемо, що у рідині протікають процеси тепло- та масообміну. Поле швидкостей описуватимемо функцією течії $\psi = \psi(x, y)$, що пов'язана з компонентами вектору швидкостей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Нехай далі $\theta = \theta(x, y)$ – температура, а $c = c(x, y)$ – концентрація речовини (реагенту) в області Ω . Тоді процес описуватиметься (у наближенні Стокса) наступними рівняннями:

$$v\Delta^2\psi - \beta_\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} - \beta_c \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$-\kappa\Delta\theta = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$-D\Delta c = G(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

де v – кінематична в'язкість, β_θ , β_c – коефіцієнти теплового та концентраційного об'ємного розширення відповідно, κ – коефіцієнт температуропровідності, D – коефіцієнт дифузії.

Систему (1) – (3) потрібно доповнити ще крайовими умовами для функції течії, температури та концентрації:

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (4)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = h_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (5)$$

$$c|_{\partial\Omega} = r_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (6)$$

де $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – розподіли нормальної і дотичної складової швидкості потоку відповідно, h_0 – розподіл температури на межі $\partial\Omega$, r_0 – розподіл концентрації на межі $\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Для розв'язання початково-крайової задачі (1) – (6) скористаємося структурним методом (методом R -функцій) [3]. Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω може бути описана елементарною функцією $\omega(x, y)$ відповідно до методу R -функцій, причому $\omega(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$. Крайові умови (4) – (6) задовольняють відповідно жмутки функцій $\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi$, $\theta = h + \omega \Upsilon$, $c = r + \omega \Xi$, де $f = ECf_0$, $g = ECg_0$, $h = ECh_0$, $r = ECr_0$ – відповідно продовження функцій f_0 , g_0 , h_0 , r_0 в Ω , $\Phi = \Phi(x, y)$, $\Upsilon = \Upsilon(x, y)$, $\Xi = \Xi(x, y)$ – невизначені компоненти структур, які будемо вважати достатньо гладкими. Для апроксимації невизначених компонент Φ , Υ , Ξ скористаємося методом Рітца.

Список використаних джерел:

1. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R -function method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2015. Vol. 91. P. 59-79. DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x.
2. Gybkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova H. V. Mathematical modeling of the quasi-stationary processes of viscous mixture mixing in a rectangular area by the R -functions method. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. 2022. № 2 (8). С. 87-93. DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.14.
3. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R -functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 48, № 4. Pp. 151-188. DOI: 10.1115/1.3005099.