АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАЩИТОЙ

Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнаби, Наумейко И. В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Фактор наличия меняющихся во времени параметров системы и взаимных влияний вредностей и защитных факторов существенно осложняет задачу исследования систем с защитой. Из общей задачи анализа неоднородных систем выделим подзадачи, для каждой из которых необходимо построение асимптотического метода. Отметим, что даже после линеаризации в окрестности точек покоя, решение соответствующих $2n$ мерных систем с переменными коэффициентами представляет собой нетривиальную задачу [1].

Линеаризованную систему уравнений с быстрыми переменными для системы с защитой запишем в следующем виде [2]:

$$\varepsilon X_t^{'} = \left[A_0(t) + \varepsilon A_1(t) \right] \vec{X} \,, \tag{1}$$

$$\text{где } \vec{X}(t,w) = \left\{ \vec{U}^T ; \vec{I}^T \right\}^T . \tag{2}$$

X есть вектор-столбец, составленный из величин, характеризующих уровень вредных факторов и защиты; ε - малый параметр; матрицы A_0 и A_1 являются произвольными достаточно гладкими функциями времени t и определяются первичными параметрами системы защиты. Они имеют блочный вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Вычислительная процедура метода существенно зависит от свойств спектра матрицы A_0. Каждому собственному значению матрицы A_0 соответствует решение системы (1), которое будем искать в виде, ряда

$$\vec{X}(t,\varepsilon) = \exp\left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda(\xi) d\xi \right] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \vec{Z}_k(t) \quad , \tag{4}$$

где $\vec{Z}_k(t)$ – вектор-функции, подлежащие определению. В дальнейшем, если не указано обратное, все параметры и вектора произвольно гладко зависят от времени. Для решения следует подставить (4) в (1) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим:

$$(A_0 - \lambda E)\vec{Z}_0 = \vec{0}; \quad (A_0 - \lambda E)\vec{Z}_{k+1} = \vec{Z}_k^1 - A_1 \vec{Z}_k \,, \tag{5}$$

где E – единичная матрица, $\vec{z}_0$ – собственный вектор, а λ – соответствующее ему собственное значение матрицы A_0.

Известна асимптотическая сходимость рядов (4) к решениям системы (1) при $\varepsilon \to 0$, равномерно по t на любом конечном отрезке времени $[0; \ell]$.

Из асимптотической сходимости рядов (4) следует асимптотическое представление передаточной матрицы системы

$$W(t,w) = X(k,t,\varepsilon) \cdot X^{-1}(k,0,\varepsilon) + 0(\varepsilon^{k+1}) \,,$$

где $X(k,t,\varepsilon)$ – матрица, составленная из конечных сумм k членов рядов (4).

Таким образом, задача нахождения $W(t,w)$ сводится к вычислению нужного числа $\vec{Z}_k$ из (5).

Рассмотрим случай простого спектра матрицы A_0. Для каждого из λ будем искать $\vec{Z}_0$ в виде

$$\vec{Z}_0(t) = Y_0(t)\cdot\vec{U}(t) \ ,$$

где Y_0 – скалярная функция, $\vec{U}$ – один из собственных векторов A_0, соответствующих данному λ.

Для нахождения $\vec{Z}_{k+1}$ необходимо решить второе из матричных уравнений (5). Поскольку матрица (A-λE) однократно вырождена, для разрешимости этого уравнения необходима ортогональность его правой части собственному вектору $\vec{Y}$, соответствующему собственному числу λ матрицы A_0^*. Отметим, что для матриц A_0 вида (3) $\overline{\lambda}(t)\equiv\lambda(t)$ – действительная функция, и $A_0^* = A_0^T$. Это условие ортогональности выполнимо, поскольку уравнение (5) на предыдущем, (k-1)-м шаге, разрешимо неоднозначно

$$\vec{Z}_k = \vec{Z}_k^0 + \vec{Y}_k\vec{Z}_0 ,$$

где $\vec{Z}_k^0$ – частное решение уравнения (5), $Y_k(t)$ – скалярная функция, определяемая из уравнения

$$Y_k'\left(\vec{Z}_0,\vec{Y}\right) = -\left(\left[\vec{Z}_k^{01} - A_1\vec{Z}_k^0\right],\vec{Y}\right),$$

которое получено из условия разрешимости системы (5) на k-ом шаге (k>0). Для случая k=0 из тех же соображений получаем уравнение

$$Y_0'\left(\vec{U},\vec{Y}\right) + Y_0\left(\left[\vec{U}' - A_1\vec{U}\right],\vec{Y}\right) = 0.$$

Посредством численных экспериментов для различных типов защит, описываемых правыми частями уравнений (1), при различных типах зависимостей собственных параметров системы от времени, показано, что при ε от 10^{-3} до 10^{-5} величина погрешности асимптотического метода убывает с 10% до 1%, что вполне допустимо для технических расчетов. Достоинством такого метода, очевидно, является наличие достаточно коротких формул для решения в квадратурах, что позволяет анализировать поведение системы в процессе защиты при изменении управляющих параметров и собственных параметров объекта защиты.

1. Запорожцев А. В. Моделирование технических систем / А. В. Запорожцев // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8–6. – С. 1288–1294.

2. Naumeyko I. Dynamic balance research of protected systems / I. Naumeyko, M. Alja'afreh. // ECONTECHMOD – 2015, vol.4, No 3 – P. 85–90.