О РЕАЛИЗАЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ПОРОГОВОЙ СЕТЬЮ

В. Л. Белявский, Ю. А. Василенко, Н. Я. Какурин
Харьков

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметричной, если ее значение не изменяется при любой перестановке аргументов. Симметричная функция обладает следующими свойствами [1].

Определение 1. Если совершенная дизъюнктивная форма (с. д. н. ф.) симметричной функции от n переменных содержит конституенту единицы, в которую m переменных $(0 \leqslant m \leqslant n)$ входят с отрицанием, то она содержит и все другие конституенты единицы, обладающие тем же свойством.

Среди произвольных симметричных функций выделяют базовые симметричные и монотонные симметричные функции.

Определение 2. Базовые симметричные функции — это булевы функции, у которых все конституенты единицы, составляющие с. д. н. ф. данной функции, получаются из одной какой-либо конституенты путем всевозможных перестановок переменных.

Базовая симметричная функция однозначно определяется двумя параметрами: числом переменных n и числом переменных k, входящих в какую-либо конституенту единицы с. д. н. ф. в неинверсном виде (k называется индексом или рабочим числом базовой симметричной функции). Так, $S_k^n(x_1, \ldots, x_n)$ — базовая симметричная функция переменных с индексом k. Любому числу переменных n соответствует ровно $n+1$ базовых симметричных функций

$$S_0^n, S_1^n, \ldots, S_n^n. \tag{1}$$

Условимся обозначать через $S^n_{k_1, k_2 \ldots, k_m}(x_1, \ldots, x_n)$ симметричную булеву функцию n переменных, представленную в виде дизъюнкции базовых симметричных булевых функций

$$S_{k_1}^n, S_{k_2}^n, \ldots, S_{k_m}^n. \tag{2}$$

Константы нуля и единицы выражаются следующим образом:

$$S^n_{0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n} \equiv 1, \; S_{\Phi}^n \equiv 0, \tag{3}$$

где Φ — пустое множество переменных.

Определение 3 [2]. Симметричная функция $S^n_{k_1, k_2, \ldots, k_m}(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если рабочие числа функции пробегают весь ряд значений от k до n.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется пороговой, если имеет место соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1, \quad \text{если} \quad \sum_1^n w_i x_i \geqslant T, \tag{4}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{если} \quad \sum_1^n w_i x_i < T,$$

где w_i — вес i-й переменной;

T — порог элемента.

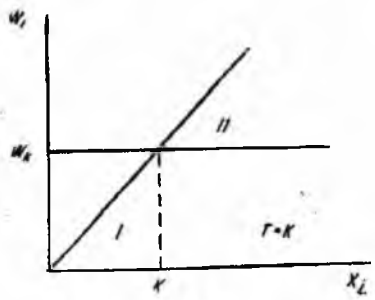


Рис. 1.

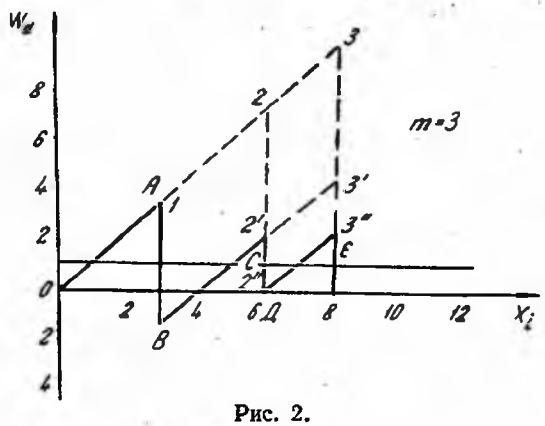


Рис. 2.

Факт реализации пороговой функции пороговым элементом (ПЭ) обозначим

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim [w_1, w_2, \ldots, w_n \mid T]. \tag{5}$$

Нетрудно понять, что монотонная симметричная функция

$$S^n_{k,\, k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n}(x_1, \ldots, x_n) \sim [1, 1, \ldots, 1 \mid k]. \tag{6}$$

Графическая интерпретация выражения показана на рис. 1. Здесь горизонтальная линия — линия порога элемента, наклонная — графическое изображение $S^n_{k,\, k+1,\, \ldots,\, n}(x_1, \ldots, x_n)$.

С учетом (6) уравнение функции

$$S^n_{k,\, \ldots,\, n}(x_1, \ldots, x_n), \quad w_i = i \tag{7}$$

в области *I*

$$S^n_{k,\, \ldots,\, n}(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0;$$

а в области *II*

$$S^n_{k,\, \ldots,\, n}(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1. \tag{8}$$

Произвольную симметричную функцию строим следующим образом [3].

1. Проводим порог некоторого ПЭ, равный наименьшему индексу заданной симметричной функции.

2. Отметим точками на этой линии места, соответствующие индексам исходной симметричной функции.

3. Проводим через эти точки наклонные линии.

4. Последние соединяем вертикальными линиями, которые проходят через деления оси абсцисс, смежные с точками на линии порога. В результате получаем некоторую ломаную линию *ABCDE*, соответствующую исходной функции (рис. 2).

Проведем пунктирными линиями продолжение OA до пересечения с вертикальной линией, проходящей через деление *8*. Остальные пунктирные линии проводятся аналогично.

Из рис. 2 видно, что линия *1—2* опущена на три деления вниз до *1'—2'*, *2—3*, опущена на четыре деления до *2'—3'* и на семь делений до *2—3*.

Вертикальные отрезки прямых AB, CD означают, что при пороге $T = 3$ некоторого элемента необходимо уменьшить возбуждение первоначального элемента на величину четырех логических весов. Это уменьшение осуществляется подачей с выхода одного элемента сигнала с отрицательным весом, называемым запретом. Так, $w_{i,j} = \alpha$ означает подачу сигнала с i-го элемента на j-й элемент с отрицательным весом α. Если S-функция реализуется на одном ПЭ, эта реализация называется реализацией в одну ступень. Если имеются m элементов и между ними существуют последовательные соотношения, то такая сеть называется реализацией в m ступеней.

Полученная таким образом сеть не имеет обратной связи, т. е. элемент *1* осуществляет запрет для элемента *2*, но элемент *2* не должен осуществлять запрет элемента *1*.

Обозначим через l — число наклонных линий ломаной кривой. Тогда из построения (рис. 2) вытекает, что число элементов сети, реализующей S-функцию,

$$m \leqslant l.$$

Синтез сети сводится к перестраиванию ломаной линии (рис. 2) путем введения дополнительных ПЭ с порогами, равными делениям вертикальных линий, и запретами, равными длине вертикальных линий. Другими словами, задача синтеза сводится к разбиению области $O\varepsilon$ (рис. 2) на некоторое число параллелограммов, число которых и определяет количество элементов сети. Очевидно, что такое разбиение неоднозначно в смысле получения минимальной сети. Область $O\varepsilon$ назовем областью задания пороговой сети.

Теорема 1. *Чтобы реализовать произвольную симметричную функцию* $S^n_{k_1, k_2, \ldots, k_m}(x_1, \ldots, x_n)$ *минимальной пороговой сетью, необходимо и достаточно:*

1) *область задания пороговой сети разбить только наклонными линиями;*

2) *вертикальные линии проводить только в случае получения одинаковых параллелограммов* (*равные вертикальные стороны*).

Доказательство. Каждый пороговый элемент (ПЭ) характеризуется суммой весов входных переменных, порогом и суммой запретов:

$$N_j = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + T\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} |w_{kj}|. \qquad (9)$$

Пороговая сеть характеризуется

$$N = \sum_{j=1}^{m} N_j = \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + T_j\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} |w_{kj}|\right]. \qquad (10)$$

Минимальной пороговой сети соответствует $N_{\min}$ из всех возможных сетей.

Как видно из выражения (10), минимизация может быть произведена двумя способами.

1. Уменьшение величин запретов.
2. Уменьшение числа элементов сети.

Построение нижней границы области определения сети показывает, что количество запретов на все элементы сети обусловливается суммой вертикальных сторон ломаной линии, соответствующей заданной функции. Поэтому разбиение всей области одними наклонными линиями не увеличит величины запрета элементов сети. Если ломаная линия имеет несколько одинаковых вертикальных линий (хотя бы две), можно уменьшить число требуемых элементов в процессе построения (рис. 3). На те параллелограммы, чьи вертикальные стороны перекрыты более «высоким» (по вертикали) параллелограммом, накладывается запрет, величина которого была определена выше.

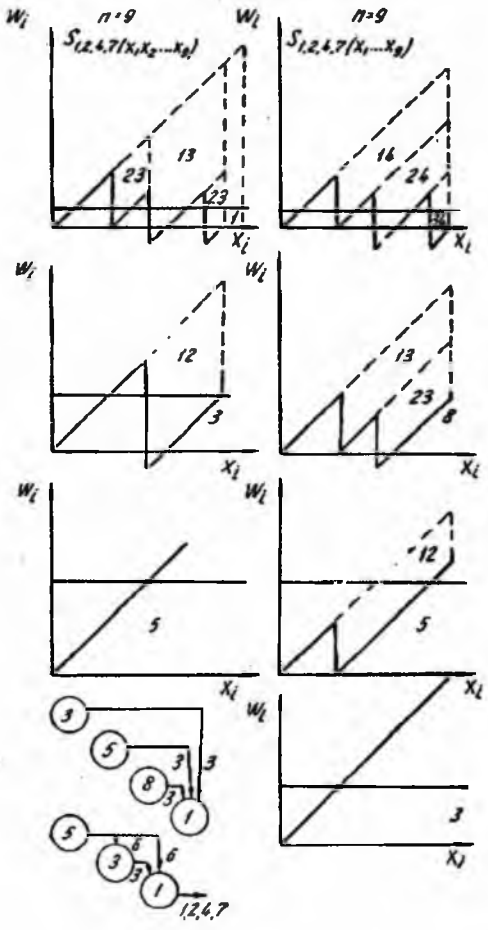


Рис. 3.

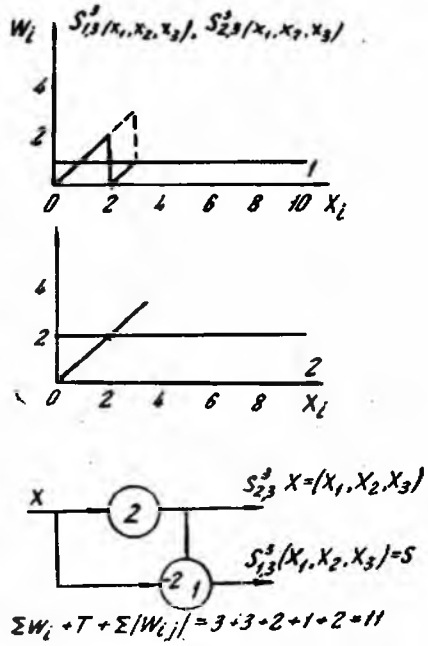


Рис. 4.

Теорема доказана.

S-функция представляет собой достаточно компактную запись функции большого числа переменных. Данный метод применим для $n \leqslant 30$.

Следствие 1. Сложность одного разряда n-разрядного сумматора, построенного по данному методу, не превышает 2. Как известно, сумма и перенос одного разряда сумматора могут быть выражены следующим образом [4]:

$$s_i = x_1\bar{x}_2\bar{p}_{i-1} \vee \bar{x}_1x_2\bar{p}_{i-1} \vee \bar{x}_1\bar{x}_2p_{i-1} \vee x_1x_2p_{i-1} = S^3_{1,3}(x_1,\ x_2,\ p_{i-1}), \qquad (11)$$

$$p_i = x_1x_2 \vee x_1p_{i-1} \vee x_2p_{i-1} = s^3_{2,3}(x_1,\ x_2,\ p_{i-1}).$$

Структурная схема этих функций представлена на рис. 4. Пример реализации $S^{25}_{1,3,5,7,9,11,13,15,17,20,24,25}(x_1, \ldots, x_{25})$ приведен на рис. 5 [3].

Сравнивая сложности пороговых сетей, имеем

$$N_1 = 247,$$

$$N_2 = 280 \ (N_1 < N_2),$$

где N_1 — сложность сети по данному методу;
N_2 — сложность сети по методу Шенга [3],

$$N_{3_1} = 97, \ N_{3_2} = 155 \ (N_{3_1} < N_{3_2}),$$

где N_{3_i} — сложность запретов пороговой сети.

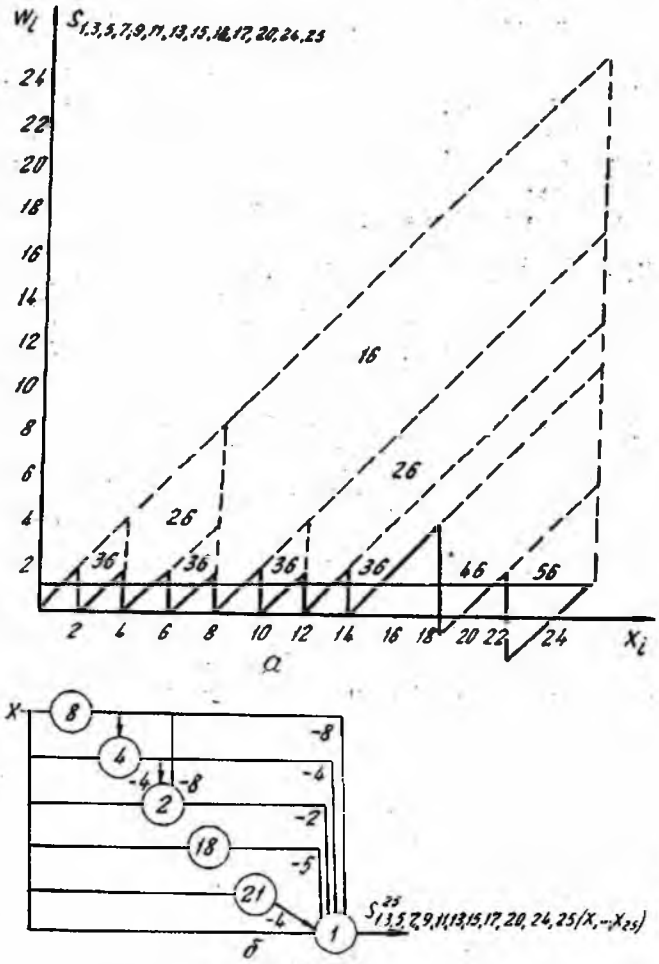


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
2. Л. А. Шоломов. О некоторых классах функций, связанных с пороговыми. «Проблемы кибернетики», вып. 13. Изд-во «Наука», 1965.
3. J. Sheng. A graphical interpretation of realization of symmetric Boolean functions with threshold logic elements. JEEE Transact. Electronic Comput, v. 14, № 1, 1965.
4. В. Л. Белявский и др. О пересечении некоторых классов функций в булевой алгебре. Сб. «Приборы и системы автоматики», вып. 8. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.