

Харківський національний університет радіоелектроніки

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КРЮТЧЕНКО ДЕНИС ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 519.63 : 51-73

ДИСЕРТАЦІЯ

УТОЧНЕНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ
ВІЛЬНИХ ТА ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ

113 Прикладна математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Д.В. Крютченко

Науковий керівник:

Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор

Харків – 2023

АНОТАЦІЯ

Крютченко Д.В. Уточнені математичні моделі для дослідження вільних та вимушених коливань рідини в резервуарах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Харківський національний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2023.

Метою дисертаційної роботи є розроблення сучасного ефективного обчислювального методу для аналізу власних і вимушених коливань складених оболонкових конструкцій з перегородками за різними умовами експлуатації.

Об'єктом дослідження є процеси коливань рідини в оболонкових конструкціях з відсіками, частково заповненими рідиною. Предметом дослідження є частоти та форми коливань рідини у оболонкових конструкціях і методи їх числового аналізу.

Через те, що у світі постійно виникають такі явища, як землетруси, теракти, аварії, то при проектуванні резервуарів для зберігання легкозаймистих та отруйних речовин важливо враховувати, які сили можуть діяти на резервуар та рідину, що в ньому зберігається. Виплескування легкозаймистих та токсичних речовин при дії раптово прикладеного зовнішнього навантаження може призвести до техногенної катастрофи. У різних інженерних галузях, таких, як авіабудування, ракетно-космічна техніка, енергетика повітряних установок, транспорт, енергетичне машинобудування, хімічна промисловість та ін. широко застосовуються елементи тонкостінних конструкцій, які працюють в умовах підвищених технологічних навантажень. Це резервуари, баки, цистерни для збереження нафти, ракетного палива, легкозаймистих або отруйних речовин.

Відомо, що саме частково заповнені резервуари схильні до особливо сильних плескань. Потужний рух рідини веде до появи високого локалізованого тиску рідини на стінки, що, в свою чергу, може призвести до руйнування як

окремих конструкційних елементів, так і конструкції в цілому, або викликати втрату стійкості, сходження з розрахункової траєкторії польоту.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та трьох додатків.

У вступі подана загальна характеристика дисертації, обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, об'єкт, предмет, розкрито наукову новизну, практичну значущість одержаних результатів, визначено особистий внесок автора, наведено дані про апробацію та впровадження результатів дослідження, надано інформацію про кількість публікацій за темою роботи.

У першому розділі проведено огляд літературних джерел, у яких вивчаються питання щодо методів розрахунку міцності та динамічного стану оболонкових конструкцій при частковому заповненні рідиною. У результаті аналізу літературних джерел з'ясовано, що на даний час мало дослідженими є коливання вільної поверхні рідини у оболонках з перегородками з урахуванням пружності. Відповідно до цього сформульовано постановку задач дослідження.

Другий розділ присвячено формулюванню задач про вільні та вимушені коливання оболонок обертання, заповнених рідиною. У ньому розроблено уточнені математичні моделі для аналізу міцнісних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною, та мають перегородки різних типів для демпфування плескань. Обґрунтовано доцільність зведення задач гідропружної взаємодії до граничних інтегральних рівнянь та здійснено зведення систем двовимірних інтегральних рівнянь до одновимірних для аксіально-симетричних задач. Сформульовані задачі дослідження динамічної поведінки оболонок, частково заповнених рідиною. Запропоновано новий метод, заснований на єдиному підході до дослідження динаміки незаповнених оболонок; визначенню частот і форм коливань вільної поверхні рідини в жорстких оболонках; визначенню частот і форм коливань оболонки з рідиною з урахуванням і без урахування сили тяжіння; визначенню динамічних характеристик оболонок з рідиною, підданих дії різних змушувальних сил.

У третьому розділі розглянуто задачу про вільні коливання рідини в жор-

стких резервуарах. Тут побудовані математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах. Для визначення частот та форм коливань рідини застосовані методи відокремлення змінних, методи граничних елементів та суперелементів. За допомогою метода відокремлення змінних вивчені плескання рідини в призматичному резервуарі без перегородок та з вертикальними хрестовими перегородками, отримані частоти та форми коливань для горизонтального циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною. Дана оцінка частот і форм вільних коливань рідини в жорстких циліндричних і циліндрико-конічних оболонках з урахуванням дії сили тяжіння. Задачу розв'язано з використанням редукованого (одновимірного) методу граничних елементів.

У четвертому розділі розглядаються вимушені коливання оболонкових конструкцій з рідиною. Розроблено метод оцінки вібрації рідини в призматичних та циліндричних резервуарах під дією періодичних горизонтальних і вертикальних навантажень. Характер поведінки рідини в резервуарі встановлюється залежно від частоти сили збудження. Вплив параметричного резонансу досліджено при частоті вертикального збудження, що дорівнює подвоєній власній частоті коливань рідини. Найбільш небезпечні коливання рідини мають місце, коли частота горизонтального збудження співпадає з власною частотою коливань рідини, а частота вертикального збудження дорівнює подвійному значенню власної частоти.

П'ятий розділ присвячено врахуванню ефектів пружності, стисливості та нелінійності руху рідини в резервуарах. В ньому розроблено числову процедуру на основі методу граничних елементів та мультимодального підходу для числового аналізу ефектів нелінійного плескання в жорстких оболонках обертання при поздовжніх збудженнях. Слабке нелінійне формулювання застосовується в припущенні, що висота вільної поверхні мала порівняно з радіусом оболонки. Для підтвердження отриманих результатів надаються контрольні тести. Ефекти параметричних резонансів досліджуються як у лінійному, так і в нелінійному формулюваннях. Виявлено істотну відмінність з огляду на нелінійне плескання, коли

частота збудження близька до подвоєної першої власної частоти. Збільшення амплітуд збудження може призвести до появи хаотичних коливань вільної поверхні. Як обмеження запропонованого підходу слід зазначити, що розглядається лише ідеальна нестислива рідина, а коливання вільної поверхні є відносно малими, без хвиль перекидання та розриву та без розбризкування.

Висновки показали, що розроблено уточнені математичні моделі для аналізу міцнісних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною та мають перегородки різних типів для демпфування плескань.

Додатки містять відомості про публікації основних результатів, отриманих у дисертації, акт впровадження та програмну реалізацію.

Проведені у дисертаційній роботі дослідження дозволили отримати такі нові наукові результати:

- побудовано ефективний редукований метод граничних елементів для розв'язання крайових задач теорії потенціалу та нові наближені методи числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з урахуванням властивостей ядер відповідних інтегральних операторів та перевіркою точності побудованих квадратурних формул для інтегралів зі слабкою особливістю та особливістю в сенсі Коші;

- вперше досліджені ефекти взаємного впливу пружності стінок та плескань рідини при вимушених коливаннях та знайдені умови, коли частоти коливань стінок і рідини є близькими;

- удосконалено метод граничних суперелементів для розв'язання задач про коливання рідини в оболонкових конструкціях з внутрішніми перегородками, які ставлять для гасіння плескань, в частині врахування ефекту пружності;

- надано уточнену оцінку частот і форм вільних коливань рідини в жорстких циліндричних і циліндрично-конічних оболонках з урахуванням дії сили тяжіння;

- проведено уточнене дослідження комбінованих вертикально-горизонтальних навантажень в частині врахування пружних ефектів.

Одержані в дисертації результати можуть бути використані під час проектування елементів конструкцій, що містять рідину, при відстроюванні від небажаних резонансних частот та при встановленні оптимальних місць розташування демпферів. Ряд результатів та рекомендацій прикладних досліджень дисертаційної роботи використано при виконанні спільного українсько-індійського проекту «Сучасні обчислювальні методи для аналізу плескань в паливних баках з перегородками» (2019–2021 рр.).

Основні результати, що становлять зміст дисертації, опубліковані у 28 наукових роботах: 20 статей, з яких 9 статей опубліковані у виданнях, зазначених в переліку наукових фахових видань України (категорія Б) за спеціальністю 113 Прикладна математика, 7 статей опубліковані у закордонних фахових науковому виданнях (з них 5 статей включено до міжнародної наукометричної бази Scopus), та 8 тез доповідей, опублікованих у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Ключові слова: математичне моделювання, крайова задача, міцність, методи граничних елементів та суперелементів, течія рідини, коливання рідини, жорсткі та пружні оболонки, паливні баки, вертикальні та горизонтальні навантаження, перегородки.

Список публікацій здобувача

Наукові публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Krutchenko D., Strelnikova E., Shuvalova Yu. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2017. Вип. 35. С. 31–37. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

2. Крютченко Д. В. Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження. *Вісник Харківського національного уні-*

верситету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2018. Вип. 40. С. 23–33. DOI: 10.26565/2304-6201-2018-40-03 [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

3. Килинник В. Ю., Тишковець О. В., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Коливання рідини в циліндрично-конічній оболонці під дією вертикального збудження. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2019. № 8. С. 127–132. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

4. Крютченко Д. В., Гнітько В. І., Шувалова Ю. С. Метод дискретних особливостей в задачах аналізу коливань резервуарів з рідиною при горизонтальних та вертикальних навантаженнях. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2019. № 8. С. 133–138. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

5. Kriutchenko D. Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».* 2019. Вип. 42. С. 68–76. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-42-07 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

6. Дегтярьов К. Г., Крютченко Д. В., Москаленко Р. П., Пальчіков Р. Г. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних впливів. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».* 2019. Вип. 43. С. 20–29. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-03 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

7. Kylynyuk V., Kriutchenko D., Naumenko Y. Liquid oscillation in a

cylindrical-conical shell under the action of vertical and horizontal excitation. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 43. С. 38–45. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-05 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

8. Крютченко Д. В. Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 44. С. 43–50. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-44-05 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

9. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 111. Pp. 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q1).]

10. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 25, № 3. Pp. 117-132. DOI: 10.2478/ijame-2020-0038 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q4).]

11. Strelnikova E., Choudhary N., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 120. Pp. 13-27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q1).]

12. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University-Science*. 2021. Vol. 33, № 8. Pp. 101589. DOI:

10.1016/j.jksus.2021.101589 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q1).]

13. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. Vol. 21. Pp. 249-257. DOI: 10.37394/23201.2022.21.27 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q4).]

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

14. Крютченко Д. В. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях* : праці міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р. Харків : ХНУ ім. Каразіна, 2018. С. 148–150.

15. Стрельнікова О. О., Тонконоженко А. М., Мироненко М. Л., Крютченко Д. В. Метод граничних елементів в задачах вимушених коливань рідини в оболонках обертання при різних рівнях заповнення. *Комп'ютерна гідродинаміка* : тези сьомої міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 29–30 вересня 2020 р. Київ : ІГМ НАНУ, 2020. С. 68–69.

16. Крютченко Д. В. Вимушені коливання рідини в резервуарі під дією вертикальних та горизонтальних навантажень. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тези доп. II Міжнар. наук.-техн. конфії., м. Харків, 5–8 жовтня 2020 р. Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, 2020. С. 237–238.

17. Myronenko M., Kriutchenko D. Computer simulation in problems of forced vibrations of liquid in shells of revolution at different filling levels. *Scientific community: interdisciplinary research* : Proceedings of the 3th International Scientific and Practical Conference, Germany, Hamburg, March 16–18, 2021. Hamburg, Germany : Busse Verlag GmbH, 2021. Pp. 303–307.

18. Choundhary N., Usatova O., Kriutchenko D., Strelnikova E. Influence of Compressibility in Fluid – Structure Interaction Problems for Fluid-Filled Reservoirs.

In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering* : Selected Papers from the International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering (CAMPE 2021), October 18-21, 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham : Springer, 2023. Pp. 3–13. DOI: 10.1007/978-3-031-18487-1_1 [Входить до міжнародної наукометричної бази Scopus.]

19. Sierikova E., Strelnikova E., Gnitko V., Kryutchenko D. Reservoirs seismic resistance. *6th International congress on innovative scientific approaches* : Proceedings book, Turkey, Samsun, December 19–20, 2021. Samsun : IKSAD Publishing House, 2021. Pp. 264–268.

20. Degtyariov K., Gnitko V., Kononenko Y., Kriutchenko D., Sierikova O., Strelnikova E. Fuzzy Methods for Modelling Earthquake Induced Sloshing in Rigid Reservoirs. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPI Week)* : Conference Proceedings, Ukraine, Kharkiv, October 03–07, 2022. Kharkiv : National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, 2022. Pp. 297–302. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916466 [Входить до міжнародної наукометричної бази Scopus.]

21. Sierikova E., Strelnikova E., Kriutchenko D. Shell structures interacting with liquid and their applications in biomechanics. *5th International Anatolian Scientific Research Congress* : Abstract Book, Turkey, Hakkari, July 21–23, 2023. Samsun : IKSAD Publishing House, 2023. P. 280.

*Наукові праці, які додатково відображають
наукові результати дисертації*

22. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *Journal of Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol. 3, No. 1. Pp.15-52. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

23. Крютченко Д. В. Комп’ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 1. С. 107-114. [Наукове фахове видання України категорії Б;

входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

24. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic. Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. № 5. Pp. 31-41. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

25. Стрельникова Е. А., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Усатова О. А. Анализ устойчивости колебаний жидкости в жестких резервуарах при параметрическом возбуждении. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 68-73. DOI: 10.32782/2618-0340-2019-3-10 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

26. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Гнітько В. І. Вимушені коливання рідини в циліндричному резервуарі з вертикальними перегородками. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 76-88. DOI: 10.32782/2618-0340-2019-3-6 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

27. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Стрельникова Е. А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. № 3 (58). С. 455-459. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

28. Гнітько В. И., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Стрельникова Е. А. Моделирование свободных и вынужденных колебаний оболочечных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. № 3 (62), том 2. С. 71-75. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

SUMMARY

Kriutchenko D.V. Refined mathematical models for the study of free and forced oscillations of liquid in tanks. – Qualification scientific study with manuscript copyright.

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics. – Kharkiv National University of Radio Electronics, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2023.

Aim of the dissertation work is to develop a modern and efficient computational method for analyzing the natural and forced vibrations of complex shell structures with partitions under various operating conditions. The research focuses on the vibration processes of liquids in shell structures with compartments partially filled with fluid. The subject of the study is the frequencies and modes of liquid vibrations in shell structures and methods for their numerical analysis.

Given that phenomena such as earthquakes, landslides, and accidents are constantly occurring worldwide, it is crucial to consider the forces that can act on reservoirs storing flammable and toxic substances during their design. The release of flammable and toxic substances due to the sudden application of external loads can lead to a technological catastrophe. Various engineering sectors, such as aerospace, rocket and space technology, power plants, transportation, energy engineering, chemical industry, etc., widely use elements of thin-walled structures working under conditions of increased technological loads. These include reservoirs, tanks, and containers for storing oil, rocket fuel, flammable, or toxic substances.

It is known that partially filled reservoirs are prone to particularly strong surges. The powerful movement of the liquid leads to the appearance of high localized pressure on the walls, which, in turn, can result in the failure of individual structural elements, the entire structure, or induce instability, deviating from the calculated flight trajectory.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, conclusions, a list of

references, and three appendices.

The introduction provides a general overview of the dissertation, justifies the relevance of the research topic, formulates the aim, tasks, object, and subject of the study. It reveals the scientific novelty, practical significance of the obtained results, defines the author's personal contribution, and provides information on the testing and implementation of the research results. The introduction also includes details about the number of publications on the topic.

In the first chapter, a review of literary sources is conducted to study the methods of strength and dynamic analysis of shell structures when partially filled with liquid. The analysis reveals that the vibrations of a free liquid surface in shells with partitions considering elasticity are inadequately explored. Based on this, research tasks are formulated.

The second chapter focuses on formulating problems related to the free and forced vibrations of rotating shells filled with liquid. Refined mathematical models are developed to analyze the strength and dynamic characteristics of shells and shell structures that are partially filled with fluid and have partitions of various types for surge damping. The feasibility of reducing hydroelastic interaction problems to boundary integral equations is justified. The reduction of two-dimensional integral equation systems to one-dimensional ones for axially symmetric problems is also accomplished. Research tasks for investigating the dynamic behavior of shells partially filled with fluid are formulated. A new method is proposed, based on a unified approach to the dynamics of unfilled shells, determining frequencies and modes of free liquid surface vibrations in rigid shells, identifying frequencies and modes of shell vibrations with liquid considering and without considering gravity, and determining the dynamic characteristics of shells with liquid subjected to various forcing forces.

The third chapter addresses the problem of free vibrations of liquid in rigid reservoirs. Mathematical models are constructed to study free vibrations of liquid in rigid reservoirs. Variable separation methods, boundary element methods, and super-element methods are employed to determine frequencies and modes of liquid vibrations. Using the variable separation method, the surges of liquid in a prismatic reser-

voir without partitions and with vertical cross partitions are studied. Frequencies and modes of vibrations for a horizontal cylindrical reservoir partially filled with liquid are obtained. An estimation of frequencies and modes of free liquid surface vibrations in rigid cylindrical and cylindrical-conical shells, considering gravity, is provided. The problem is solved using the reduced (one-dimensional) boundary element method.

In the fourth chapter, forced vibrations of shell structures with liquid are considered. A method is developed to assess liquid vibration in prismatic and cylindrical reservoirs under the action of periodic horizontal and vertical loads. The behavior of the liquid in the reservoir is established depending on the frequency of the excitation force. The influence of parametric resonance is studied at the frequency of vertical excitation equal to twice the natural frequency of liquid oscillations. The most dangerous liquid vibrations occur when the frequency of horizontal excitation coincides with the natural frequency of liquid oscillations, and the frequency of vertical excitation equals twice the natural frequency.

The fifth chapter is dedicated to accounting for the effects of elasticity, compressibility, and nonlinearity of liquid motion in reservoirs. A numerical procedure based on the boundary element method and a multimodal approach is developed for the numerical analysis of nonlinear surging effects in rigid rotating shells under longitudinal excitations. A weakly nonlinear formulation is applied assuming that the free surface height is small compared to the shell radius. Control tests are provided to confirm the obtained results. The effects of parametric resonances are investigated in both linear and nonlinear formulations. A significant difference is found in nonlinear surging when the excitation frequency is close to twice the first natural frequency. Increasing the excitation amplitude can lead to the appearance of chaotic oscillations of the free surface. It's important to note that the proposed approach considers only an ideal incompressible liquid, and free surface oscillations are relatively small, without wave overturning and breaking, and without splashing.

In conclusion, the developed refined mathematical models for analyzing the strength and dynamic characteristics of shells and shell structures that are partially filled with fluid and have partitions of various types for surge damping have been

demonstrated.

The appendices contain information about the publications of the main results obtained in the dissertation, an implementation act, and program implementation details.

The research conducted in the dissertation allowed obtaining several new scientific results:

- efficient reduced boundary element method is developed for solving boundary value problems of potential theory. New approximate methods for the numerical solution of singular integral equations are proposed, taking into account the properties of kernels of the corresponding integral operators. The accuracy of constructed quadrature formulas for integrals with weak and Cauchy-type singularities is verified.

- effects of the mutual influence of the elasticity of walls and surging of the liquid during forced oscillations are investigated for the first time. Conditions are found when the frequencies of wall and liquid oscillations are close.

- the boundary element method is improved for solving problems of liquid oscillations in shell structures with internal partitions designed for surge damping, considering the effect of elasticity.

- refined estimate is provided for the frequencies and modes of free liquid oscillations in rigid cylindrical and cylindrical-conical shells, taking into account the effect of gravity.

- an improved study of combined vertical-horizontal loading is conducted, considering elastic effects.

The obtained results in the dissertation can be applied in the design of structural elements containing liquid, in tuning away from undesirable resonance frequencies, and in determining optimal locations for dampers. Some of the results and recommendations from applied research in the dissertation were used in the execution of the joint Ukrainian-Indian project "Modern computational methods for surge analysis in fuel tanks with partitions" (2019–2021).

The main results constituting the content of the dissertation are published in 28 scientific works: 20 articles, including 9 articles published in journals listed in the list

of scientific professional publications of Ukraine (category B) in the field of Applied Mathematics, 7 articles published in international scientific journals (5 articles included in the Scopus international bibliographic database), and 8 conference paper abstracts published in the materials of international scientific conferences.

Keywords: mathematical modeling, boundary value problem, strength, boundary element methods and superelements, fluid flow, liquid oscillations, rigid and elastic shells, fuel tanks, vertical and horizontal loads, partitions.

List of applicant's published works

Scientific publications containing the main scientific results of the dissertation

1. Krutchenko D., Strelnikova E., Shuvalova Yu. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2017. Вип. 35. С. 31–37. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

2. Крютченко Д. В. Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2018. Вип. 40. С. 23–33. DOI: 10.26565/2304-6201-2018-40-03 [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

3. Килинник В. Ю., Тишковець О. В., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Коливання рідини в циліндрично-конічній оболонці під дією вертикального збудження. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2019. № 8. С. 127–132. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

4. Крютченко Д. В., Гнітько В. І., Шувалова Ю. С. Метод дискретних особливостей в задачах аналізу коливань резервуарів з рідиною при горизонтальних та вертикальних навантаженнях. *Вісник Національного технічного універ-*

ситету «ХІІІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2019. № 8. С. 133–138. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

5. Kriutchenko D. Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 42. С. 68–76. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-42-07 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

6. Дегтярьов К. Г., Крютченко Д. В., Москаленко Р. П., Пальчіков Р. Г. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних впливів. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 43. С. 20–29. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-03 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

7. Kylynnyk V., Kriutchenko D., Naumenko Y. Liquid oscillation in a cylindrical-conical shell under the action of vertical and horizontal excitation. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 43. С. 38–45. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-05 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

8. Крютченко Д. В. Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 44. С. 43–50. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-44-05 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

9. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 111. Pp. 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q1).]

10. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 25, № 3. Pp. 117-132. DOI: 10.2478/ijame-2020-0038 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q4).]

11. Strelnikova E., Choudhary N., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 120. Pp. 13-27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q1).]

12. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University-Science*. 2021. Vol. 33, № 8. Pp. 101589. DOI: 10.1016/j.jksus.2021.101589 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q1).]

13. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. Vol. 21. Pp. 249-257. DOI: 10.37394/23201.2022.21.27 [Входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Scopus (Q4).]

*Scientific papers validating the testing of the
materials presented in the dissertation*

14. Крютченко Д. В. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних*

технологіях : праці міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р. Харків : ХНУ ім. Каразіна, 2018. С. 148–150.

15. Стрельнікова О. О., Тонконоженко А. М., Мироненко М. Л., Крютченко Д. В. Метод граничних елементів в задачах вимушених коливань рідини в оболонках обертання при різних рівнях заповнення. *Комп'ютерна гідродинаміка* : тези сьомої міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 29–30 вересня 2020 р. Київ : ІГМ НАНУ, 2020. С. 68–69.

16. Крютченко Д. В. Вимушені коливання рідини в резервуарі під дією вертикальних та горизонтальних навантажень. *Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні* : тези доп. II Міжнар. наук.-техн. конфії., м. Харків, 5–8 жовтня 2020 р. Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, 2020. С. 237–238.

17. Myronenko M., Kriutchenko D. Computer simulation in problems of forced vibrations of liquid in shells of revolution at different filling levels. *Scientific community: interdisciplinary research* : Proceedings of the 3th International Scientific and Practical Conference, Germany, Hamburg, March 16–18, 2021. Hamburg, Germany : Busse Verlag GmbH, 2021. Pp. 303–307.

18. Choundhary N., Usatova O., Kriutchenko D., Strelnikova E. Influence of Compressibility in Fluid – Structure Interaction Problems for Fluid-Filled Reservoirs. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering* : Selected Papers from the International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering (CAMPE 2021), October 18-21, 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham : Springer, 2023. Pp. 3–13. DOI: 10.1007/978-3-031-18487-1_1 [Входить до міжнародної наукометричної бази Scopus.]

19. Sierikova E., Strelnikova E., Gnitko V., Kryutchenko D. Reservoirs seismic resistance. *6th International congress on innovative scientific approaches* : Proceedings book, Turkey, Samsun, December 19–20, 2021. Samsun : IKSAD Publishing House, 2021. Pp. 264–268.

20. Degtyariov K., Gnitko V., Kononenko Y., Kriutchenko D., Sierikova O., Strelnikova E. Fuzzy Methods for Modelling Earthquake Induced Sloshing in Rigid

Reservoirs. 2022 *IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPI Week)* : Conference Proceedings, Ukraine, Kharkiv, October 03–07, 2022. Kharkiv : National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, 2022. Pp. 297–302. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916466 [Входить до міжнародної наукометричної бази Scopus.]

21. Sierikova E., Strelnikova E., Kriutchenko D. Shell structures interacting with liquid and their applications in biomechanics. *5th International Anatolian Scientific Research Congress* : Abstract Book, Turkey, Hakkari, July 21–23, 2023. Samsun : IKSAD Publishing House, 2023. P. 280.

Scientific papers that additionally reflect the scientific results of the dissertation

22. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *Journal of Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol. 3, No. 1. Pp.15-52. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

23. Крютченко Д. В. Комп’ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 1. С. 107-114. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

24. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic. Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. № 5. Pp. 31-41. [Входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

25. Стрельникова Е. А., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Усатова О. А. Анализ устойчивости колебаний жидкости в жестких резервуарах при параметрическом возбуждении. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 68-73. DOI: 10.32782/2618-0340-2019-3-10 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Index Copernicus.]

26. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Гнітько В. І. Вимушені коливання

рідини в циліндричному резервуарі з вертикальними перегородками. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 76-88. DOI: 10.32782/2618-0340-2019-3-6 [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

27. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Стрельникова Е. А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. № 3 (58). С. 455-459. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

28. Гнитько В. И., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Стрельникова Е. А. Моделирование свободных и вынужденных колебаний оболочечных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. № 3 (62), том 2. С. 71-75. [Наукове фахове видання України категорії Б; входить до міжнародної наукометричної бази Google Scholar.]

ЗМІСТ

| | С. |
|--|----|
| Вступ | 26 |
| 1 Сучасний стан питання міцності та коливань оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною | 33 |
| 1.1 Огляд науково-технічної літератури щодо методів розрахунку міцності та динамічного стану оболонкових конструкцій при частковому заповненні рідиною | 33 |
| 1.2 Підходи до вивчення нелінійних проблем плескання рідини | 40 |
| 1.3 Постановка задач дослідження | 42 |
| Висновки за розділом 1 | 43 |
| 2 Формулювання задач про вільні та вимушені коливання оболонок обертання, заповнених рідиною: основні співвідношення | 44 |
| 2.1 Загальне формулювання задачі | 45 |
| 2.2 Система диференціальних рівнянь зв'язаної гідродинамічної задачі і граничні умови | 49 |
| 2.2.1 Диференціальні рівняння руху оболонки | 49 |
| 2.2.2 Диференціальне рівняння для визначення тиску рідини на змочену поверхню оболонки | 51 |
| 2.3 Наявність покриття вільної поверхні | 55 |
| 2.4 Метод заданих форм | 56 |
| 2.5 Побудова основних рівнянь, що описують коливання пружних оболонок з рідиною без урахування сили тяжіння, на основі методу граничних інтегральних рівнянь | 60 |
| 2.6 Способи задання вільної поверхні | 64 |
| 2.7 Основні рівняння для дослідження коливань рідини в жорстких оболонках з перегородками на основі методу граничних | |

| | |
|---|-----|
| | 23 |
| інтегральних рівнянь і розробка числового алгоритму їх розв'язання | 66 |
| Висновки за розділом 2 | 70 |
| 3 Вільні коливання рідини в жорстких резервуарах | 72 |
| 3.1 Вільні коливання рідини в призматичних резервуарах | 72 |
| 3.1.1 Вільні коливання рідини в призматичних резервуарах без перегородок | 72 |
| 3.1.2 Вільні коливання рідини в призматичних резервуарах з вертикальними перегородками | 77 |
| 3.2 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах | 82 |
| 3.2.1 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах без перегородок | 82 |
| 3.3 Використання методу граничних елементів для обчислення частот і форм коливань рідини в жорстких оболонках обертання | 84 |
| 3.3.1 Інтегральні співвідношення | 84 |
| 3.3.2 Тестування методу граничних елементів в задачі про вільні коливання оболонки обертання, частково заповненою рідиною | 87 |
| 3.4 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах з горизонтальними перегородками | 93 |
| 3.5 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах з вертикальними перегородками | 98 |
| 3.6 Вільні коливання рідини в складених резервуарах | 101 |
| 3.6.1 Вільні коливання рідини в циліндрично-конічних резервуарах | 101 |
| 3.6.2 Вільні коливання рідини в циліндрико-сферичних резервуарах | 106 |
| Висновки за розділом 3 | 108 |
| 4 Вимушені коливання оболонкових конструкцій з рідиною | 110 |
| 4.1 Вимушені коливання рідини в призматичних резервуарах | 110 |

| | |
|--|-----|
| | 24 |
| 4.2 Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах | 115 |
| 4.2.1 Коливання рідини в циліндричному резервуарі без перегородок та з горизонтальними перегородками під дією горизонтальних навантажень | 116 |
| 4.2.2 Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах без перегородок та з перегородками під дією вертикального навантаження | 120 |
| 4.2.3 Циліндричні оболонки під сумісною дією вертикальних та горизонтальних гармонічних навантажень | 126 |
| 4.3 Дослідження впливу внутрішніх перегородок на рівень плескань вільної поверхні рідини при сейсмічних та імпульсних навантаженнях | 130 |
| Висновки за розділом 4 | 134 |
| 5 Врахування ефектів пружності, стисливості та нелінійності руху рідини в резервуарах | 136 |
| 5.1 Дослідження впливу пружних ефектів | 136 |
| 5.2. Дослідження взаємної дії горизонтальних та вертикальних навантажень на пружний резервуар частково заповнений рідиною | 143 |
| 5.3 Числові результати з визначення динамічних характеристик пружних циліндричних резервуарів при вертикальних та горизонтальних коливаннях рідини в циліндричному резервуарі | 146 |
| 5.4 Врахування ефекту стисливості рідини | 150 |
| 5.5 Нелінійні коливання рідини в оболонках обертання | 160 |
| 5.5.1 Слабке нелінійне формулювання задачі та основні співвідношення | 160 |
| 5.5.2 Лінійне формулювання | 165 |
| 5.5.3 Спрощений нелінійний аналіз | 168 |
| 5.5.4 Уточнене формулювання нелінійної задачі | 173 |

| | |
|---|-----|
| | 25 |
| 5.5.5 Точність та валідація | 178 |
| 5.5.6 Нелінійні коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при вертикальних збудженнях | 180 |
| Висновки за розділом 5 | 182 |
| Висновки | 184 |
| Список використаних джерел | 187 |
| Додаток А Список публікацій здобувача і відомості про апробацію результатів дисертації | 203 |
| А.1 Список публікацій здобувача | 203 |
| А.2 Відомості про апробацію результатів дисертації | 208 |
| Додаток Б Акт впровадження | 210 |
| Додаток В Програмна реалізація | 215 |
| В.1 Лінійна задача про циліндричний резервуар з перегородками та без | 215 |
| В.2 Нелінійна задача про циліндричний резервуар з перегородками та без | 217 |
| В.3 Фазові портрети кубічного резервуару без перегородок | 219 |

ВСТУП

Актуальність теми. У всьому світі виникають такі явища, як землетруси, теракти, аварії. Тому при проектуванні резервуарів для зберігання легкозаймистих та отруйних речовин важливо враховувати, які сили можуть діяти на резервуар та рідину, що в ньому зберігається. Виплескування легкозаймистих та токсичних речовин при дії раптово прикладеного зовнішнього навантаження може призвести до техногенної катастрофи. У різних інженерних галузях, таких, як авіабудування, ракетно-космічна техніка, енергетика повітряних установок, транспорт, енергетичне машинобудування, хімічна промисловість та ін. широко застосовуються елементи тонкостінних конструкцій, які працюють в умовах підвищених технологічних навантажень. Це резервуари, баки, цистерни для збереження нафти, ракетного палива, легкозаймистих або отруйних речовин.

Відомо, що саме частково заповнені резервуари схильні до особливо сильних плескань. Потужний рух рідини (а саме такий рух відбувається в резервуарах) веде до появи високого локалізованого тиску рідини на стінки, що, в свою чергу, може призвести до руйнування як окремих конструкційних елементів, так і конструкції в цілому, або викликати втрату стійкості, сходження з розрахункової траєкторії польоту.

Проектування таких резервуарів вимагає ретельного дослідження поведінки рідини в експлуатаційних умовах. Плескання проявляється як результат впливу зовнішніх сил, викликаних прискоренням (раптовим уповільненням або зупинкою) рухомого об'єкту, що містить рідину. Особливої уваги заслуговує вивчення розподілу тиску на стінках резервуара, виявлення його локальних максимумів, які можуть удвічі перевищувати значення відповідних величин в незаповненому резервуарі.

Однією з найважливіших науково-технічних проблем ракетно-космічної техніки є забезпечення стійкості ракет-носіїв на різних етапах польоту. Коливання рідини в баках ракет-носіїв, що розвиваються при їх поздовжньої нестій-

кості, можуть призвести до порушення цілісності конструкції, пошкодження корисного вантажу і іншим аварійним ситуаціям. Необхідність розв'язання таких проблем викликала інтенсивне розроблення нових теорій, методів та алгоритмів розрахунку оболонкових конструкцій протягом останніх десятиріч. Особливий теоретичний і практичний інтерес при цьому має проблема взаємодії твердих і пружних тіл з рідиною.

Таким чином, значна кількість прикладних задач з різних галузей техніки приводить до необхідності дослідження спільного руху твердих деформованих та рідких середовищ. Деякі з цих задач були сформульовані й розв'язані ще в XIX столітті. Однак період найбільш інтенсивної розробки даної проблеми приходить на другу половину XX століття у зв'язку з розвитком ракетної та авіаційної техніки, а також з появою новітньої обчислювальної техніки.

Найбільш ефективні підходи до створення комп'ютерних технологій для аналізу зв'язаних задач механіки деформованого твердого тіла, в яких досліджується взаємодія різних середовищ, ґрунтуються на методах скінченних і граничних елементів та їх поєднанні.

Нелінійні проблеми плескання рідини в загальному формулюванні описуються рівняннями Нав'є-Стокса з динамічними та кінематичними умовами на вільній поверхні. Але є багато досліджень нелінійного плескання на основі формулювань з теорії потенціалу для ідеальної нестисливої рідини.

Міцнісні та динамічні характеристики резервуарів і конструкцій з рідиною слід визначати, розв'язуючі зв'язані задачі гідропружної взаємодії. Особливо важливими є дослідження міцності цих конструкцій в умовах дії імпульсних, ударних і сейсмічних навантажень. Аварійний ризик, пов'язаний з сейсмічною небезпекою, форс-мажорними обставинами, довгий час недооцінювався в багатьох країнах, зокрема, в Україні, внаслідок недостатнього опрацювання проблеми. Катастрофічні наслідки найбільших землетрусів останніх років привернули увагу до теоретичних робіт, присвячених оцінці і моніторингу аварійного ризику, як при сейсмічних впливах, так і при позаштатних ситуаціях на виробництві. Актуальність таких досліджень підтверджується новими картами

сейсмічної активності (сейсмічна зона Вранча) України та близькістю розташування промислових центрів до зон сейсмічної активності. Нагальними є питання розроблення методів, що відповідають світовим і національним стандартам.

У останні десятиріччя значний внесок в розробку математичних моделей описаних процесів та методів їх аналізу внесли О.М. Гузь, В.Д. Кубенко, В. Tian, С. Betts та інші. В їх роботах в основному були вирішення проблеми взаємодії пружних конструкцій з рідиною. Незважаючи на значні успіхи в розробці математичних моделей для дослідження вільних та вимушених коливань рідини у резервуарах було виявлено протиріччя, пов'язане з тим, що відсутній розв'язок задач з урахуванням ефекту пружності оболонок та встановлення деяких типів перегородок для гасіння плескань вільної поверхні рідини. Отже, математичне моделювання системи оболонка-рідина та розробка і вдосконалення методів її числового аналізу є актуальною науковою задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки та в рамках:

– держбюджетної науково-дослідної теми № ДР 0111U001758 «Розробка наукових основ аналізу нестационарного динамічного напруженого стану елементів енергетичного та іншого обладнання з урахуванням пошкоджень»;

– роботи для Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля» за господарськими договорами № ДР 0114U101241 «Підвищення ефективності елементів конструкцій аерокосмічних систем при силових та аеродинамічних навантаженнях», № ДР 0120U101241 «Підвищення ефективності елементів конструкцій ракетно-космічної техніки шляхом їх чисельного моделювання та оптимізації» і № ДР 0117U00880 «Динамічна міцність елементів аерокосмічної та бронетанкової техніки під дією механічних навантажень»;

– гранту Міністерства освіти і науки України «Сучасні обчислювальні методи для аналізу плескань в паливних баках з перегородками» в рамках спільного українсько-індійського проекту (2019–2021 рр.), у яких автор брав участь як виконавець.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розроблення сучасного ефективного обчислювального методу для аналізу власних і вимушених коливань складених оболонкових конструкцій з перегородками за різними умовами експлуатації.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі розрахунку міцності та динамічного стану оболонкових конструкцій при частковому заповненні рідиною;
- уточнити математичні моделі для аналізу міцнісних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною, та мають перегородки різних типів для демпфування плескань;
- обґрунтувати доцільність зведення задач гідропружної взаємодії до граничних інтегральних рівнянь;
- побудувати математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах;
- розробити метод оцінки вібрації рідини в призматичних та циліндричних резервуарах під дією періодичних горизонтальних і вертикальних навантажень;
- удосконалити метод граничних суперелементів для розв’язання задач про коливання рідини в оболонкових конструкціях з внутрішніми перегородками, які ставлять для гасіння плескань;
- дослідити ефекти взаємного впливу пружності стінок та плескань рідини при вимушених коливаннях;
- розробити комп’ютерну програму на основі методу граничних елементів та мультимодального підходу для числового аналізу ефектів нелінійного плескання в жорстких оболонках обертання при поздовжніх збудженнях та провести низку обчислювальних експериментів для тестових задач.

Об’єктом дослідження є процеси коливань рідини в оболонкових конструкціях з відсіками, частково заповненими рідиною.

Предметом дослідження є частоти та форми коливань рідини у оболонкових конструкціях і методи їх числового аналізу.

Методи дослідження. У роботі використовуються модифіковані обчислю-

вальні методи скінченних і граничних елементів для визначення власних частот рідини та врахування ефекту стисливості та їх поєднання; метод Фур'є для визначення власних частот та форм оболонок різного вигляду; метод заданих форм для визначення вимушених коливань рідини в жорсткій оболонці; методи математичної фізики для дослідження розглядуваних задач та методів їх розв'язання.

Наукова новизна отриманих результатів. У результаті виконання дисертаційного дослідження розроблено сучасний ефективний обчислювальний метод для аналізу власних і вимушених коливань складених оболонкових конструкцій з перегородками за різними умовами експлуатації. При цьому отримано такі нові наукові результати:

- побудовано ефективний редукований метод граничних елементів для розв'язання крайових задач теорії потенціалу та нові наближені методи числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з урахуванням властивостей ядер відповідних інтегральних операторів та перевіркою точності побудованих квадратурних формул для інтегралів зі слабкою особливістю та особливістю в сенсі Коші;

- вперше досліджені ефекти взаємного впливу пружності стінок та плескань рідини при вимушених коливаннях та знайдені умови, коли частоти коливань стінок і рідини є близькими;

- удосконалено метод граничних суперелементів для розв'язання задач про коливання рідини в оболонкових конструкціях з внутрішніми перегородками, які ставлять для гасіння плескань, в частині врахування ефекту пружності;

- надано уточнену оцінку частот і форм вільних коливань рідини в жорстких циліндричних і циліндрично-конічних оболонках з урахуванням дії сили тяжіння;

- проведено уточнене дослідження комбінованих вертикально-горизонтальних навантажень в частині врахування пружних ефектів.

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів дисертаційної роботи доведено шляхом співставлення з аналітичними, числовими та експериментальними даними інших дослідників, а також результатами, що характеризують

ють збіжність та точність розробленого методу.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації результати можуть бути використані під час проектування елементів конструкцій, що містять рідину, при відстроюванні від небажаних резонансних частот та при встановленні оптимальних місць розташування демпферів.

Ряд результатів та рекомендацій прикладних досліджень дисертаційної роботі використано при виконанні спільного українсько-індійського проекту «Сучасні обчислювальні методи для аналізу плескань в паливних баках з перегородками» (2019–2021 рр.).

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем і опубліковані в роботах [21, 81, 86, 113, 124 – 127, 131–134, 141, 142, 149 – 162]. У роботах, опублікованих зі співавторами, здобувачу належать такі результати: [81, 86, 113, 125, 127, 132 – 134, 141, 151–157, 161] – дослідження вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною при горизонтальних та вертикальних навантаженнях; [21, 126, 131, 142, 149, 150, 158, 159] – моделювання власних та вимушених коливань рідини в призматичних резервуарах з перегородками за допомогою методів граничних елементів та суперелементів; [124, 160 – 162] – комп’ютерне моделювання власних коливань рідини в оболонках різної форми. Роботи [127, 141, 149, 159] опубліковано без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- Міжнародній науково-технічній конференції «Комп’ютерне моделювання в наукоємних технологіях» (Україна, Харків, 2018 р.);
- Сьомій міжнародній науково-практичній конференції «Комп’ютерна гідродинаміка» (Україна, Київ, 2020 р.);
- II Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Україна, Харків, 2020 р.);
- 3th International Scientific and Practical Conference «Scientific Community: Interdisciplinary Research» (Germany, Hamburg, 2021);

- International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering (CAMPE-2021) (Ukraine, Kharkiv, 2021);
- 6th International congress on innovative scientific approaches (Turkey, Samsun, 2021);
- 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (Ukraine, Kharkiv, 2022);
- 5th International Anatolian Scientific Research Congress (Turkey, Hakkari, 2023);
- науково-технічній проблемній раді Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України (Харків, 2020 р.);
- науковому семінарі кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки (Харків, 2023 р.).

Публікації. Матеріали дисертації викладені у 28 наукових роботах: 20 статей, з яких 9 статей опубліковані у виданнях, зазначених в переліку наукових фахових видань України (категорія Б) за спеціальністю 113 Прикладна математика, 7 статей опубліковані у закордонних фахових науковому виданнях (з них 5 статей включено до міжнародної наукометричної бази Scopus), та 8 тез доповідей, опублікованих у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертацій. Дисертаційна робота є рукописом і складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел з 162 найменувань на 16 сторінках та трьох додатків на 23 сторінках, а також містить 62 рисунка та 25 таблиць. Загальний обсяг роботи складає 225 сторінок, включаючи 161 сторінка основного тексту.

1 СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ МІЦНОСТІ ТА КОЛИВАНЬ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНІ РІДИНОЮ

1.1 Огляд науково-технічної літератури щодо методів розрахунку міцності та динамічного стану оболонкових конструкцій при частковому заповненні рідиною

Перші результати в області динаміки коливань пружних оболонок, що взаємодіють з рідиною, пов'язані з іменами Релея та інших дослідників кінця XIX – початку XX століть. Однак період найбільш інтенсивного розроблення даної тематики приходить на другу половину XX століття у зв'язку з розвитком ракетної та авіаційної техніки, а також з появою електронних обчислювальних систем нового покоління.

Великий внесок у розвиток вирішення проблеми взаємодії пружних конструкцій з рідиною зроблено у роботах відомих вчених L. Jiao [1], Y. Wu, H. Maeda, T. Kinoshita [2], A. Read, P. Temarel [3, 4], C. Soares, T. Moan [5, 6], B. H. Буйвола [7], A.C. Bishop [8], Ш. У. Галієва [9], E. Lehn, M. Ren [10, 11], K. Kim, J. Kim [12], О.М. Гузя і В.Д. Кубенко [13], B. Tian, C. Betts [14, 15], Y. Yamamoto [16], І.А. Луковського [17], R. Datta [18, 19], I. Senjanović, D. Cho [20], K. Paik, P. Carrica [22], N. Fonseca, D. Spalding [23, 24], C. Hirt, A. Romano [26] та ін.

Задачі взаємодії інженерних конструкцій з рідиною виділилися в новий напрямок обчислювальної та прикладної механіки, що отримав за кордоном назву «Fluid-Structure Interaction Problems».

Бурхливий розвиток методів аналізу плескань рідини в контейнерах та паливних баках пов'язаний з початком в 60-х роках минулого сторіччя космічних програм СРСР та NASA. Зауважимо, що перші місії до Юпітера закінчились руйнуванням космічних апаратів саме через невдале відстроювання від резонансних частот, пов'язаних з плесканнями палива. Серед перших досліджень

відмітимо роботи Г. Абрамсона [27, 28]. В роботах Г. Попова і співавторів [29, 30] досліджено коливання вільної поверхні при русі прямокутних контейнерів (плоска задача) і встановлено, що частоти та форми коливань системи суттєво залежать від співвідношення ширини контейнера до рівня заповнення його рідиною. Останнім часом для аналізу плескань все більш використовуються методи обчислювальної механіки рідини (Computational Fluid Dynamics, CFD). До цього напрямку відносяться праці [31, 32], де доведено, що власні частоти коливань суттєво залежать від рівня заповнення.

Дослідження з питань плескань рідини в контейнерах, спираються на побудову механічних аналогій, в яких розглядаються пружинні елементи, параметри яких призначені для імітації динамічних навантажень, що діють на цистерну під час плескань [33, 34]. В [33] отримані класичні результати для імпульсних параметрів наземних прямокутних та кругових резервуарів (при горизонтальних прискореннях). Робота була узагальнена з метою аналізу резервуарів для збереження питної води, які встановлюються на деякій висоті [34]. Стінки резервуарів в цих дослідженнях вважались жорсткими. Слід зазначити, що інженерні підходи до сейсмічного аналізу та проектування резервуарів для зберігання рідини зазвичай ґрунтуються на багатокomпонентній пружинно-маятниковій аналогії [33]. Така аналогія дозволяє розглядати складну динамічну поведінку цистерни та її заповнювача в спрощеному формулюванні.

У роботах [35, 36] надані кваліфіковані та всебічні огляди явища плескання, включаючи аналіз аналітичних та експериментальних досліджень. В [36] також доведено, що точні розв'язки для плескань рідини в лінійному формулюванні обмежуються ємностями з прямими стінками, такими як прямокутні та вертикальні циліндричні контейнери. Зауважимо, що фундаментальні частоти та форми коливань рідини для двовимірних та тривимірних прямокутних цистерн були отримані в [35] та [36] з використанням методу відокремлення змінних. Методи, викладені в [35], складають базу для наближеної оцінки ефективності пристроїв, що здійснюють демпфування. Оскільки аналітичних розв'язків для резервуарів зі складною геометричною формою не існує, крім аналітичних

методів застосовуються числові методи для розв'язання лінійних крайових задач щодо плескань рідкого заповнювача в контейнерах. Динамічний аналіз оболонкових конструкцій часто виконується за допомогою комп'ютерних програм, заснованих на використанні методу скінченних елементів (МСЕ) [37]. У [38] в лінійному формулюванні здійснено аналіз з використанням МСЕ коливань рідкого заповнювача у вертикальному циліндричному резервуарі під дією горизонтального збудження. В [39] отримані формули на основі МСЕ для дослідження плескань рідини у частково заповнених жорстких прямокутних цистернах під дією зовнішнього збудження. Гідропружні коливання прямокутних плит, що спираються на пружну основу Пастернака та взаємодіють з ідеальною нестисливою рідиною з вільною поверхнею, вивчаються за допомогою МСЕ в [40]. Хоча МСЕ є дуже потужним інструментарієм комп'ютерного аналізу, однак при аналізі плескань при врахуванні ефектів пружної взаємодії в сучасних програмних комплексах на основі МСЕ не враховуються такі явища, як поверхневий натяг, нелінійні ефекти при коливаннях рідини з помірними амплітудами. При цьому врахування перегородок, взаємного впливу пружних стінок та плескань рідини потребує значних обчислювальних ресурсів. Такий тривимірний нелінійний аналіз з використанням МСЕ, включаючи рідину, що міститься в резервуарах, з врахуванням пружності стінок оболонки є складним та надзвичайно трудомістким. В свою чергу, це ускладнює аналіз точності отриманих результатів. Це призвело до появи кількох спрощених теоретичних досліджень, а також до розроблення відповідних числових методів. Тому актуальним є розв'язання альтернативних числових та чисельно-аналітичних методів.

Так, в [41] запропоновано мультимодальний метод для вивчення коливань рідини в двовимірному формулюванні в горизонтальному циліндричному резервуарі. На основі лінійного підходу потенціал швидкості та рівень вільної поверхні виражаються у вигляді рядів за модами фундаментальних плескань. Це дозволило звести розглядувану зв'язану задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь. В [42] також розглядалися рівняння потенціального потоку для вивчення вільних коливань рідини в циліндричних та сферичних кон-

тейнерах з використанням методики конформних відображень і знайдені власні частоти коливань для різного рівня заповнення рідиною.

В [43, 44] досліджено вплив різних граничних умов, в тому числі умов закріплення, на поведінку тонких циліндричних оболонок, які повністю контактували з рухомою рідиною, з використанням МСЕ та методу граничних елементів (МГЕ).

Коливання вільної поверхні рідини досліджують за допомогою альтернативних методів, таких як метод скінченних об'ємів. Цей метод був розроблений в [45, 46] на основі вивчення поведінки рідини в фіксованому об'ємі.

Вплив в'язкості на частоти плескань вивчався в [47]. Для гасіння інтенсивного руху рідини та запобігання нестабільності було запропоновано багато приладів, що запобігають втраті стійкості. Такі пристрої використовуються для зменшення конструктивних навантажень, викликаних рухомою рідиною, для контролю положення рідини в баку або для функціонування в якості демпферів. Ці пристрої можуть містити жорсткі або пружні кільцеві перегородки різного розміру та орієнтації, прямокутні пластини, занурені в наповнений рідиною бак, різні пластини або мембрани, що частково покривають вільну поверхню. Вибір та проектування систем демпфування вимагають знань динамічних характеристик системи «оболонка-рідина».

На практиці ефект перегородок зазвичай можна помітити після встановлення перегородки. Але часто ця експериментальна робота занадто дорога. Тому розробка обчислювальних методів для кваліфікованого чисельного моделювання є дуже актуальною проблемою. Одна з піонерських робіт належить J.W. Miles [48].

Значна кількість досліджень плескань рідини в циліндричному резервуарі з жорсткими перегородками пов'язана з використанням таких резервуарів та демпферів в космічних апаратах. Експериментальні та числові результати отримані в [49].

У [39, 50 – 52] вивчались коливання рідини в резервуарах з перегородками за допомогою МСЕ в лінійному двовимірному формулюванні. Також у [39]

було застосовано МСЕ для числового дослідження ефектів демпфування за допомогою пружної перегородки дискового типу на динамічні характеристики циліндричного резервуара, що рухається з рівномірним прискоренням.

В [52] розроблено аналітичний метод для дослідження впливу жорсткої внутрішньої перегородки на частоти та форми коливань рідини в циліндричній ємності, частково заповненої рідиною, з використанням проєкційних методів. В [53] запропоновано МСЕ у сполученні з варіаційним методом для аналізу зв'язаних коливань частково наповненого рідиною циліндричного контейнера з циліндричним внутрішнім корпусом, тобто розглянуто кільцеву вільну поверхню.

Вплив перегородок на фундаментальні (найнижчі) частоти плескань досліджено в [54] з використанням МГЕ. В [55] досліджені сейсмічні реакції вертикального циліндричного резервуара з кільцевою перегородкою з використанням МГЕ та методу заданих форм. Основним досягненням цих робіт стало значне зменшення обчислювальної вартості порівняно з іншими числовими методами, такими як МСЕ. В [55, 56] МГЕ використано для дослідження проблеми руйнування та оцінки впливу розмірів та розташування перегородки на власні частоти плескань вертикально встановленого жорсткого циліндричного резервуара.

Відтоді граничні інтегральні рівняння широко використовуються для розв'язання різноманітних технічних задач. Такий підхід має певні переваги. У основних рівняннях функції та їх похідні визначатимуться лише на межах розрахункової області. Це дозволяє суттєво зменшити розмірність задачі. МГЕ надає нові якісні можливості в моделюванні динамічних зв'язаних задач.

Незважаючи на те, що формулювання та застосування МГЕ дають надійні рішення інженерних проблем, одержані дискретні системи алгебраїчних рівнянь, як правило, щільно заповнені та несиметричні, що призводить до збільшення витрат на обчислення. Це стало причиною того, що методи підобластей або методи граничних суперелементів (МГСЕ), які базуються на граничних елементах, почали стрімко розвиватися для розв'язання як внутрішніх, так і для зовнішніх крайових задач [57 – 59].

Основна ідея МГСЕ полягає у розбитті розрахункової області на менші

(підобласті або суперелементи). У кожній підобласті використовується формалізм МГЕ. Фіктивні (інтерфейсні) границі вводяться для розмежування підобластей, коли це необхідно, і далі рух рідини описується у термінах тиску та швидкості, які визначаються лише на спільних межах підобластей. На цих фіктивних межах мають виконуватись рівняння неперервності. Потім записуються алгебраїчні рівняння МГЕ для кожного суперелементу, а глобальна система лінійних алгебраїчних рівнянь формується шляхом ансамблювання результатів за усіма підобластями за умови рівноваги та сумісності в спільних інтерфейсних вузлах. Внаслідок такої процедури отримують блочні розріджені системи алгебраїчних рівнянь [57 – 59]. МГСЕ особливо ефективний при числовому моделюванні плескань рідини в резервуарах із перегородками.

Коли рідина рухається в закритих ємностях, можна спостерігати безліч конфігурацій (форм), за якими може рухатися вільна поверхня. Взагалі різні форми коливань вільної поверхні визначаються хвильовим числом (кількістю хвиль у окружному напрямку) та за номером форми n .

Хоча перегородки зазвичай використовуються як ефективний засіб зменшення величин підйому вільної поверхні, лише в деяких дослідженнях оцінено роль факторів, що дозволяють провести оптимальне проектування перегородки. Лише у двох дослідженнях йдеться про вплив розмірів та розміщення перегородки на частоти коливань рідини та рівень підйому вільної поверхні [60, 61].

Слід зазначити, що властивості конструкцій перегородки були досліджені за допомогою лабораторних експериментів з використанням резервуарів невеликої величини різної геометрії в [62].

Огляд досліджень, проведених в [60, 62 – 64] демонструє, що на динамічну реакцію конструкцій, що містять рідину, можуть суттєво впливати коливання їх пружних стінок при взаємодії з рідиною, що здійснює плескання. Плескання вільної поверхні рідкого палива у паливних баках великих ракетноносіїв є загальновідомою технічною проблемою, особливо у випадках незначного осьового прискорення, коли окрім взаємодії рідини з пружними стінками баків враховуються сили міжмолекулярної взаємодії (поверхневого натягу) рідини та

гравітаційні сили. Відбувається плескання палива в умовах низької гравітації. Експериментально-теоретична робота з дослідження цього явища почалась ще в 60-х роках минулого сторіччя. Було визначено, що в експериментальних умовах достатньо низької гравітації вільна поверхня рідини відхиляється від рівноважного плаского положення та набуває кривизни. Динамічну поведінку рідини, зокрема, вплив поверхневого натягу на частково заповнені рідиною резервуари в мікрогравітаційному середовищі розглянуто у [65]. Результати показують, що під дією силового поля сили тяжіння і відцентрових сил виникає ряд хвиль у поперечному та поздовжньому напрямках з різними амплітудами та довжинами. Проте низькочастотне плескання рідини є режимом більш високої енергії хвилі у порівнянні з хвилями більш високих частот.

В роботах [66 – 76] розроблено підхід, заснований на сполученні МГЕ та МСЕ, до дослідження вільних коливань наповнених рідиною оболонок обертання, а також до проблеми власних коливань рідини в жорстких резервуарах. Але в [66, 68, 70, 76] розглядалися лише жорсткі резервуари. В роботі [69] досліджувалась взаємодія пружної конструкції з рідиною, але без врахування ефектів плескання, а в роботах [66, 67, 72] ефекти плескань та пружності стінок розглядалися окремо.

Параметрична нестійкість вільної поверхні рідини в різних наповнених рідиною резервуарах, що викликана поздовжніми збудженнями, була предметом низки досліджень в багатьох наукових галузях з часу перших праць Фарадея [77]. Інтенсивне плескання рідини в ракетних баках було причиною втрати стійкості космічних кораблів під час їх перших польотів у середині ХХ століття. У роботах [78 – 80] доведено, що невдалі польоти часто були викликані нестійкістю, спричиненою вібраціями паливних баків. Серед перших досліджень у цій галузі слід зазначити роботу Н. Abramson [81]. Стаття присвячена моделюванню частот та форм плескань рідини для дво- та тривимірних прямокутних резервуарів з використанням методу відокремлення змінних. Інтенсивні землетруси з плесканням рідини у великих резервуарах для зберігання нафти та палива, піднятих на водонапірних вежах, привернули увагу багатьох дослідни-

ків та інженерів [82, 83]. Інший напрямок досліджень пов'язаний з морською технікою, де велике значення мають ефекти плескання в резервуарах танкерів [84]. Плескання рідини в частково заповнених горизонтальних циліндричних резервуарах є актуальною проблемою в галузі автомобільних перевезень [85, 86]. Монографії О. Faltinsen та О. Timokha [84], N. Ibrahim [87] дають ґрунтовний аналіз теорії та застосувань явищ плескань внаслідок дії різних навантажень. У [84, 88] доведено, що маючи відомі власні частоти та форми плескань, використовуючи аналітичні чи числові методи для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь, можна знаходити аналітичні або напіваналітичні розв'язки будь-якої лінійної задачі плескання. Труднощі виникають лише при отриманні власних форм та частот плескань для резервуарів складної геометрії: з перегородками, кришками, розгалуженнями тощо [89, 90].

Зазвичай для опису нелінійних плескань використовують рівняння Нав'є-Стокса з кінематичною та динамічною умовами на вільній поверхні. Але є багато досліджень нелінійного плескання, що застосовують теорію потенціалу для нестисливої ідеальної рідини. В одній з перших дослідницьких робіт N. Moiseev [91] було побудовано асимптотичний розв'язок нелінійної задачі щодо плескань рідини в жорстких резервуарах при горизонтальному гармонічному збудженні з частотою, яка близька до найнижчої фундаментальної частоти. Наразі відомі вагомні дослідження, що використовують різні числові методи при аналізі нелінійних плескань. Це роботи Y. Wu [92], D. Zhou [93], I. Raynovskyy та O. Timokha [94], J. D. Wang [95], E. Demirel, M. Aral [96], O. Limarchenko [97 – 99] та ін.

1.2 Підходи до вивчення нелінійних проблем плескання рідини

Перший підхід можна розглядати як аналітичний. Це прийнятне, коли коливання рідини розглядаються з малими амплітудами. Для нелінійного плескання аналітичний метод був запропонований у піонерських роботах N. Moiseev [91] та G. Narimanov [100]. Подальший розвиток аналітичного асимптотичного методу пов'язаний з дослідженнями О. Faltinsen [101], M. Hermann

та О. Timokha [102], що стосуються нелінійних процесів плескань в прямокутних резервуарах (баках).

Для другого підходу характерне застосування методу скінченних елементів [103, 104] та методів обчислювального моделювання динаміки рідини [105]. Хоча ці методи є універсальними, але вони дуже трудомісткі, особливо при розв'язанні тривимірних задачах.

Третім підходом є мультимодальний метод, заснований на припущенні, що висота вільної поверхні та потенціал швидкості можуть бути виражені через узагальнене розвинення Фур'є [106, 107]. Тут вважається, що рідина є ідеальною і нестисливою без врахування явищ перекидання і розбиття хвиль. Функції висоти підйому вільної поверхні та потенціалу швидкості розглядаються як нескінченні ряди за відомими базисними функціями з невідомими коефіцієнтами, що залежать від часу. Кожна базисна функція тут має задовольняти як рівняння Лапласа, так і умову непротікання на змочених стінках резервуару. Потім ці ряди підставляються в нелінійні умови, що описують рух вільної поверхні. Отже, мультимодальний метод зводить вказані нелінійні проблеми до систем нелінійних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат. Вперше ці координати були знайдені як розв'язок зв'язаної системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, отриманих із граничної задачі щодо вільної поверхні G. Narimanov [100].

Однак слід зазначити, що для резервуарів довільної форми важко знайти базисні функції. Наприклад, є вимога, щоб стінка резервуара була вертикальною поблизу вільної поверхні. Базисні функції повинні утворювати повну систему на середній вільній поверхні. Слід зазначити, що термін «мультимодальність» спочатку був запропонований О. Faltinsen у [107]. Детальний огляд застосування мультимодальних методів до лінійного та нелінійного моделювання плескань був проведений І. Луковським та О. Timokha в [108].

Існують різні версії нелінійного мультимодального методу, але загальним моментом є зведення вихідної граничної задачі до нескінченної системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат.

Асимптотичні співвідношення для редукції нескінченновимірної модальної системи були запропоновані N. Moiseev [81] і G. Narimanov [100] і вдосконалені F. Dodge із співавторами [109] та J. Miles і D. Henderson [110].

Порівняння експериментальних та числових результатів із використанням як теорії потенціалу, так і підходів обчислювальної динаміки рідини зроблено Y. Cao та ін. у [111].

Результати робіт [100, 107, 108 – 111] свідчать про суттєвий вплив нелінійних факторів при дослідженні коливань оболонкових конструкцій з рідиною.

1.3 Постановка задач дослідження

З наведеного аналізу задачі про власні та вимушені коливання оболонкових конструкцій з відсіками, що частково заповнені рідиною, бачимо, що рідина передбачається ідеальною та нестисливою, а її рух, внаслідок коливань оболонки, є потенціальним. Внаслідок цього шляхом розв'язання відповідної крайової задачі, знаходимо потенціал швидкостей, рівень підйому вільної поверхні рідини, переміщення пружної оболонки, тиск рідини на стінки оболонки. Це дає змогу дослідити стійкість руху оболонки, а також визначити небажані частоти змушувальних сил, з метою відстроювання від резонансних частот.

Виходячи з цього, задачами дисертаційної роботи є:

- уточнення математичних моделей для аналізу міцнісних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною, та мають перегородки різних типів для демпфування плескань;
- обґрунтування доцільності зведення задач гідропружної взаємодії до граничних інтегральних рівнянь;
- побудова математичних моделей для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах;
- розробка методу оцінки вібрації рідини в призматичних та циліндричних резервуарах під дією періодичних горизонтальних і вертикальних навантажень;
- удосконалення методу граничних суперелементів для розв'язання задач

про коливання рідини в оболонкових конструкціях з внутрішніми перегородками, які ставлять для гасіння плескань;

– дослідження ефектів взаємного впливу пружності стінок та плескань рідини при вимушених коливаннях;

– розроблення комп'ютерної програми на основі методу граничних елементів та мультимодального підходу для числового аналізу ефектів нелінійного плескання в жорстких оболонках обертання при поздовжніх збудженнях та провести низку обчислювальних експериментів для тестових задач.

Висновки за розділом 1

1. Як свідчить аналіз літературних джерел, проблема коливань оболонкових конструкцій з відсіками, частково заповненими рідиною, ще далека від повного розв'язання і потребує врахування різних факторів. Серед них зазначимо стисливість та в'язкість рідини, врахування пружності стінок резервуарів, сил тяжіння та плескань вільної поверхні рідини, нелінійних ефектів. Ці фактори потребують дослідження проблеми в зв'язаних формулюваннях, що дозволить врахувати їх взаємний вплив.

2. Для гасіння вільних та вимушених коливань рідини важливим є встановлення перегородок, які виконують роль демпферів. Зазвичай знаходження оптимального положення перегородок в резервуарах відбувається шляхом досить коштовних експериментів, тому актуальним є комп'ютерне моделювання поведінки резервуарів з рідиною в різних умовах експлуатації.

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [1 – 20, 22 – 80, 82 – 85, 87 – 111].

2 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ: ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Міцність і динамічні характеристики резервуарів і конструкцій паливних баків, цистерн слід визначати, розв'язуючи задачі гідропружної взаємодії. Особливо важливими є дослідження міцності цих конструкцій в умовах дії імпульсних, ударних і сейсмічних навантажень.

В цьому розділі запропоновано уточнену математичну модель для визначення частот та форм вільних коливань резервуару, частково заповненого рідиною, за наявності внутрішніх перегородок та плавучої кришки. Описано методику дослідження вільних та вимушених коливань пружної оболонки обертання з довільним меридіаном при частковому заповненні ідеальною нестисливою рідиною. Запропоновано метод розкладання шуканих форм коливань оболонки з рідиною в ряд за власними формами коливань незаповненої оболонки. Для дослідження вільних і вимушених коливань оболонкових конструкцій з відсіками, що містять рідину, розроблений метод заданих форм. Суть його полягає в наступному. Складається зв'язана система диференціальних рівнянь відносно пружних переміщень конструкції тиску рідини на змоченій поверхні оболонкової конструкції. Для подання розв'язку цієї системи використовується три набори базисних функцій. Перший з них містить власні форми коливань конструкції при відсутності заповнювача і використовується для побудови саме гідропружних переміщень. Другий і третій набори базисних функцій відносяться до побудови потенціалу швидкостей і тиску рідини на змоченій поверхні конструкції. Потенціал швидкостей описується сумою двох частинних потенціалів. Перший з них описує власні коливання пружної оболонки з рідиною без урахування гравітаційних сил, другий описує коливання рідини в жорсткому резервуарі з урахуванням сил гравітації. Побудові цих базисних систем присвячений даний розділ.

2.1 Загальне формулювання задачі

В даному розділі сформульовані задачі дослідження вільних і вимушених коливань оболонок обертання, що заповнені рідиною. Задачі розглядаються в зв'язаному формулюванні. При цьому переміщення оболонки знаходяться з системи рівнянь руху, в яку входить тиск рідини; саме цей тиск, в свою чергу, залежить від переміщень пружної оболонки.

Наведемо математичні формулювання задач про коливання оболонкових конструкцій з рідиною. Припускається, що рідина ідеальна нестислива, а її рух, індукований коливаннями оболонки, є безвихровим. Цей рух викликаний дією змушувальної сили і починається зі стану спокою. Розглядається зв'язана динамічна задача для пружної оболонкової конструкції, частково заповненої рідиною та підданій короткочасному імпульсному або періодичному гармонічному навантаженню.

Розглянемо пружну оболонку, частково заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Нехай $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ – вектор пружних переміщень оболонки, σ – змочена поверхня оболонки, S_0 – вільна поверхня рідини (рис. 2.1).

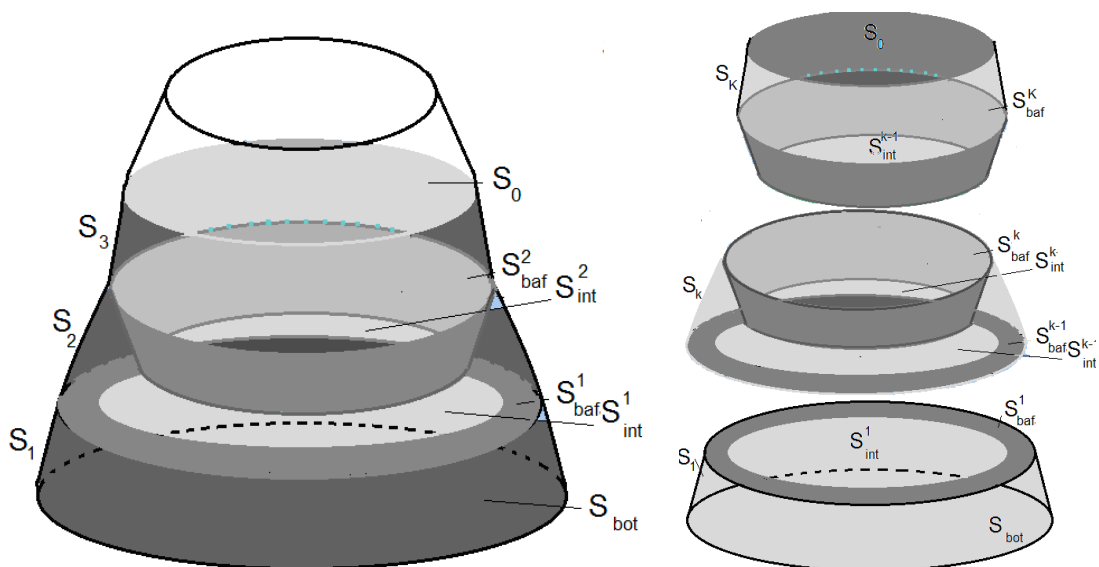


Рисунок 2.1 – Оболонкова конструкція з внутрішніми перегородками

Припускаємо, що оболонкова конструкція може мати декілька внутрішніх

перегородок досить довільної форми, які встановлюють для гасіння коливань. Їх поверхні позначимо як S_{baf}^i , а поверхню днища оболонки як S_{bot} . Нехай декартова система координат $Oxyz$ пов'язана з оболонкою, вільна поверхня рідини S_0 співпадає з площиною xOy в стані спокою. Припускаємо також, що вільна поверхня рідині може бути покрита гнучкою кришкою, для опису якої використовуватимемо рівняння коливань тонкої мембрани. Вважаємо, що резервуар з рідиною піддається динамічному впливу, оболонка має однакову товщину h , виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу з модулем пружності E , коефіцієнтом Пуассона ν та густиною матеріалу ρ_s .

Рівняння руху оболонкової системи записуються в операторній формі

$$\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = p\mathbf{n} + \mathbf{Z}, \quad (2.1)$$

де \mathbf{L} , \mathbf{M} – оператори пружних та масових сил;

p – тиск рідини на змоченій поверхні оболонкової конструкції, Н/м²;

\mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль;

\mathbf{Z} – сила збудження, Н.

Для моделювання руху рідини була розроблена математична модель, що базується на таких гіпотезах: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. Досліджуємо лише малі коливання (лінійна теорія). В цих умовах існує потенціал швидкостей $\varphi(x, y, z, t)$, градієнт якого є швидкістю рідини, а саме

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Використовуючи рівняння руху і умови потенціальності потоку, приходимо до інтеграла Коші-Лагранжа в такій формі, як в роботі [39]:

$$p = -\rho_l \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right], \quad (2.2)$$

де ρ_l – густина рідини, кг/м^3 ;

$a_x(t)$, $a_z(t)$ – компоненти прискорення збуджувальної сили, м/сек^2 ;

g – прискорення вільного падіння, м/сек^2 .

Якщо розглядаються малі коливання рідини (лінійне формулювання), то $|\nabla\varphi|^2 \ll 1$, та з формул (2.2) отримуємо

$$p = -\rho_l \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz \right]. \quad (2.3)$$

У припущенні, що потік є безвихровим, рух ідеальної нестисливої рідини описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (2.4)$$

Для визначення тиску з рівняння (2.3) необхідно обчислити потенціал швидкостей. Для цього треба сформулювати граничні умови для рівняння (2.4) на ділянках межі розрахункової області.

Позначимо змочену частину поверхні оболонки через σ . Об'єм рідини за допомогою перегородок ділиться на декілька підобластей. Внутрішні з них мають як одну з меж поверхню інтерфейсу. На кожній з поверхонь інтерфейсу мають виконуватися умови спряження. На бічних поверхнях та на днищі виконуються умови непротікання. На вільній поверхні виконуються кінематична та динамічна умови.

Кінематична умова полягає в тому, що ті точки рідини, що знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього наступного руху. Припустимо, що функція $\zeta = \zeta(x, y, t)$ описує форму та положення вільної поверхні за часом, тобто вважаємо, що

$$z = \zeta(x, y, t)|_{S_0}.$$

Математичне подання кінематичної умови в лінійному формулюванні має

вигляд [17, 123]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}}.$$

Динамічна умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні S_0 атмосферному тиску. Згідно з рівнянням (2.3) динамічна умова має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0.$$

Зауважимо, що це рівняння застосовується у випадку вимушених коливань. Якщо розглядатимуться вільні коливання, то динамічна умова приймає форму

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0.$$

Таким чином, маємо такі граничні умови для визначення потенціалу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)\zeta + g\zeta \Big|_{S_0} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma} &= \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

де $w = (\mathbf{u}, \mathbf{n})$ – нормальна складова переміщення оболонкової конструкції;

$\zeta = \zeta(x, y, t)$ – функція, що описує рух вільної поверхні.

З врахуванням (2.1), (2.4) отримано таку систему диференціальних рівнянь для визначення п'яти невідомих функцій $u_1, u_2, u_3, \varphi, \zeta$:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz \right), \\ \nabla^2 \varphi = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Систему диференціальних рівнянь (2.6) розв'язуємо за виконання граничних умов (2.5). Крім того, додаємо до умов (2.5) умови спряження на поверхнях інтерфейсу. Для i -ї поверхні інтерфейсу ці умови мають вигляд

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i, \quad q_{i+1} = -q_i, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (2.7)$$

Для отримання однозначного розв'язку системи рівнянь (2.6) з граничними умовами (2.5), (2.7) додаємо виконання умови Неймана

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2.8)$$

Систему диференціальних рівнянь (2.6) слід також доповнити умовами закріплення оболонкової конструкції, тобто умовами на вектор-функцію \mathbf{u} .

Для розв'язання задач гідропружності застосований метод заданих форм. За базисні функції для розв'язання задач щодо вільних і вимушених коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною, приймаються власні форми коливань незаповненої оболонки. Для визначення тиску будуються додаткові системи базисних функцій, які описані в наступних розділах.

2.2 Система диференціальних рівнянь зв'язаної гідродинамічної задачі і граничні умови

2.2.1 Диференціальні рівняння руху оболонки

Розглянемо задачу гідропружних коливань оболонки обертання, частково заповненої рідиною (рис. 2.2).

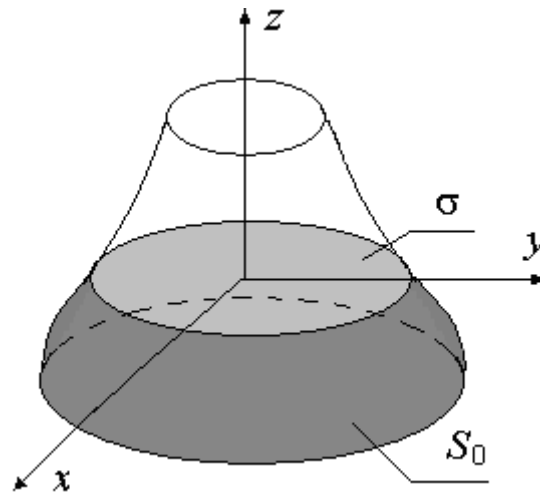


Рисунок 2.2 – Оболонка обертання, що частково заповнена рідиною

Як відомо [112 – 114], у загальному випадку рівняння руху пружної оболонки сталої товщини можна записати у формі

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_1, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Q_2, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P + Q_3. \end{cases} \quad (2.9)$$

Тут L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – диференціальні оператори, що відповідають обраній теорії оболонок; u, v, w – поздовжнє, окружне і нормальне переміщення оболонки; ρ – густина матеріалу, з якого виготовлена оболонка, h – товщина стінок оболонки; Q_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненти сили, що викликає коливання рідини; P – тиск рідини на оболонку.

Припускаємо, що змушувальні сили можуть діяти як імпульсні і сейсмічні навантаження.

Розглядаються або жорстко закріплена оболонка (а), або оболонка консольного типу (б), один торець якої Γ_1 закріплений жорстко, а другий Γ_2 – вільний від навантажень. У цих випадках граничні умови приймають вигляд:

а) на обох торцях оболонки компоненти узагальненого вектору перемі-

щення $\mathbf{u} = (u, v, w)$ дорівнюють нулю (переміщення і кути поворотів)

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = 0; \quad (2.10)$$

б) на одному торці компоненти узагальненого вектору переміщення дорівнюють нулю, на другому торці компоненти узагальненого зусилля \mathbf{T} дорівнюють нулю

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{T}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (2.11)$$

Тут через Γ_1, Γ_2 позначені торці оболонки; \mathbf{u} – переміщення; \mathbf{T} – зусилля.

Наприклад, для циліндричної оболонки, що розглядається в рамках теорії Кірхгофа-Лява, компоненти диференціального оператора L_{ij} мають вигляд [115]

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad L_{12} = L_{21} = -\frac{1+\nu}{2} \delta \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}, \\ L_{13} &= -L_{31} = -\nu \delta \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{22} = -\left(\frac{1-\nu}{2} \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad L_{23} = L_{32} = -\frac{\partial}{\partial \theta}, \\ L_{33} &= 1 + \tilde{h}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2, \quad \tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad \tilde{h} = \frac{hR}{\sqrt{12}L^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тут R – радіус оболонки, h – її товщина, L – довжина оболонки, ν – коефіцієнт Пуассона, x та θ – поздовжня і окружна координати.

Далі розглянемо співвідношення для визначення тиску рідини на оболонку, тобто отримаємо співвідношення (2.2).

2.2.2 Диференціальне рівняння для визначення тиску рідини на змочену поверхню оболонки

Для визначення функції тиску $p = p(x, y, z, t)$, що фігурує в правій частині

системи диференціальних рівнянь (2.1), скористаємося рівняннями руху рідкого середовища в напруженнях [116]

$$\begin{cases} \rho_l w_x = Z_1 + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho_l w_y = Z_2 + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho_l w_z = Z_3 + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (2.13)$$

Тут

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

ρ_l – густина рідини, w_x , w_y , w_z – прискорення рідини, Z_i – компоненти об’ємної сили, σ , τ – компоненти тензора напружень рідкого середовища. Співвідношення між компонентами тензора напружень і тензорів деформацій і швидкостей деформацій визначаються гіпотезами щодо рідкого середовища. У загальному випадку ці співвідношення можуть бути подані у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

де μ – перший і другий коефіцієнти в’язкості, \mathbf{V} – вектор швидкостей рідини.

Оскільки припускається, що рідина є нестисливою, то виконана умова збереження об’єму [116]

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2.15)$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (2.13) для нестисливого рідкого середовища набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix}.$$

Якщо припустити, що рідина є також ідеальною, то відсутні дотичні компоненти тензора напружень, тобто відсутній девіатор напружень, і тензор напружень є кульовим. Середнє арифметичне значення нормальних напружень, що діють на трьох взаємно-перпендикулярних площадках, що проходять через одну точку, взяте з протилежним знаком, вважають гідродинамічним тиском p в цій точці. Знак мінус ставиться тут умовно, і показує, що в рідині завжди маємо справу з тиском (а не розтягуванням), спрямованим всередину об'єму. Таким чином,

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$$

і рівняння (2.13) набувають вигляду

$$\rho_l w_x = Z_1 - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_l w_y = Z_2 - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho_l w_z = Z_3 - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.16)$$

Далі будемо розглядати ідеальну нестисливу рідину, рух якої є безвихровим (потенціальним). Відзначимо, що згідно з теоремою Томсона, при русі ідеальної нестисливої рідини під дією потенціальних сил, циркуляція швидкості за замкнутим рідким контуром не змінюється з часом. Це означає, наприклад, що

рух рідини, що почався зі стану спокою, залишається потенціальним в усі наступні моменти часу.

Припустимо, що об'ємні сили мають потенціал. Тоді мають місце умови теореми Томсона. Відповідні прискоренням $a_x(t)$, $a_z(t)$ компоненти об'ємної сили дорівнюють

$$Z_1 = -\rho_l a_x(t), \quad Z_2 = 0, \quad Z_3 = -\rho_l g - \rho_l a_z(t).$$

Тоді $\mathbf{Z} = -\rho_l \text{grad}(a_x(t)x + gz + a_z(t)z)$, отже, об'ємні сили в цьому випадку мають потенціал, який дорівнює $-\rho_l(a_x(t)x + gz + a_z(t)z)$.

Залежність складових прискорення тільки від часу обумовлюється великими розмірами театру (зони) землетрусу в порівнянні з розмірами ємності, що розглядається. Співвідношення (2.16) набувають вигляду

$$\rho_l \mathbf{w} = -\text{grad}(p + \rho_l a_x(t)x + \rho_l gz + \rho_l a_z(t)).$$

Таким чином, прискорення руху ідеального нестисливого рідкого середовища завжди мають потенціал, який називається потенціалом прискорень або потенціалом Прандтля.

Розглядатимемо задачу в лінійному формулюванні, тобто нехтуємо добутками швидкостей на їх похідні. Тоді співвідношення (2.16) приймають форму

$$\begin{aligned} \rho_l \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_l a_x(t)x, & \rho_l \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho_l \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_l a_z(t)z - \rho_l gz. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Оскільки розглядається потенціальний рух, то існує така функція ϕ , яка є потенціалом швидкостей. Тому для визначення тиску з боку рідини на оболонку (з урахуванням дії об'ємних сил) служить лінеаризований інтеграл Коші-Лагранжа у формі (2.3).

2.3 Наявність покриття вільної поверхні

Як ефективний демпфер для зменшення амплітуди плескань може бути використано плавучу кришку (рис. 2.3). Динамічну поведінку такої кришки будемо описувати, виходячи з рівняння руху мембрани. При цьому на вільній поверхні треба задати умову рівності швидкостей рідини та мембрани.

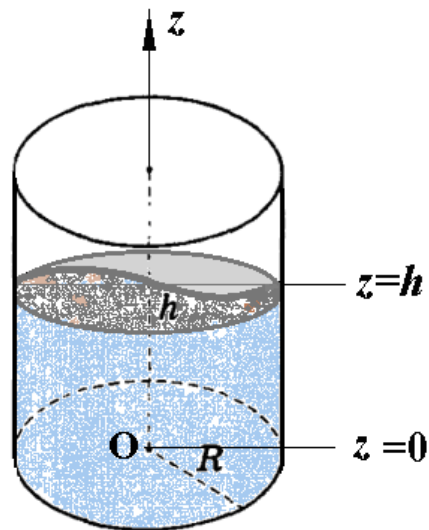


Рисунок 2.3 – Покриття вільної поверхні мембраною

Розглядається жорстка циліндрична оболонка, вільна поверхня якої покрита мембраною. Вважається, що оболонка заповнена ідеальною нестисливою рідиною, рух якої, індукований зовнішніми впливами, вважається безвихровим. На циліндричній стінці $r = R$ та на дні резервуара $z = 0$ умови непротікання сформульовано так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Щоб сформулювати граничну умову на вільній поверхні, розглянемо рівняння руху мембрани

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{p}{T},$$

де w – нормальне переміщення, м;

T – натяг на одиницю довжини, Н/м;

μ – маса на одиницю площини, кг;

p – тиск рідини на поверхню мембрани, Н/м².

Далі сформульовано граничні умови для переміщення мембрани при $r = R$:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = w = 0.$$

На вільній поверхні рідини нормальні компоненти швидкості рідини та мембрани мають дорівнювати одне одному

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Також має виконуватись динамічна умова у вигляді

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g w. \quad (2.18)$$

Отже, сформульовано зв'язану крайову задачу для визначення невідомих функцій φ та w .

Результати розрахунків, що характеризують вплив мембрани на вільні коливання рідини, відображені у роботі [21]

2.4 Метод заданих форм

Для розв'язання задач про власні та вимушені коливання оболонкових конструкцій з відсіками, що містять рідину, запропоновано метод заданих форм. Вище було отримано зв'язану систему диференціальних рівнянь відносно пружних переміщень конструкції та діючого тиску рідини (2.6). Для зображення розв'язків цієї системи використовуються три набори базисних функцій. Пе-

рший з них складається з власних форм коливань конструкції за відсутністю заповнювача і використовується далі для побудови гідропружних переміщень. Другий та третій набори базисних функцій отримані при побудові потенціалу швидкостей і тиску рідині на змочених поверхнях конструкції. Потенціал швидкостей подається сумою двох частинних потенціалів. Один з них відповідає власним коливанням рідини в жорсткому резервуарі при урахуванні сил гравітації; другий – відноситься до власних коливань пружної оболонки з рідиною без урахування гравітаційних сил.

У загальному випадку будемо шукати переміщення оболонкової конструкції з відсіками, частково заповненими рідиною, у вигляді

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{u}_k, \quad (2.19)$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

\mathbf{u}_k – форми коливань незаповненої оболонкової конструкції;

N – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

При цьому виконуються співвідношення ортогональності [70]

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj}, \quad (\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj}, \quad (2.20)$$

де Ω_k – k -та частота власних коливань незаповненої конструкції.

Будемо шукати потенціал швидкостей у вигляді суми двох потенціалів $\varphi = \Phi_1 + \Phi_2$. Потенціал Φ_1 подамо у вигляді

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_{1k}, \quad (2.21)$$

де φ_{1k} – базисні функції.

В формулі (2.21) залежні від часу коефіцієнти $c_k(t)$ визначені в рівнянні (2.19). Для функцій φ_{1k} маємо такі крайові задачі

$$\nabla^2 \varphi_{1k} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = w_k, \quad w_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad \varphi_{1k} \Big|_{S_0} = 0. \quad (2.22)$$

Ці функції побудовано в роботі [70].

Подамо потенціал Φ_2 у вигляді ряду за власними формами коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}, \quad (2.23)$$

де $d_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

φ_{2k} – базисні функції;

M – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Для функцій φ_{2k} формулюємо крайові задачі так:

$$\nabla^2 \varphi_{2k} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (2.24)$$

При цьому на вільній поверхні маємо співвідношення [69]

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}, \quad (2.25)$$

де χ_k – частоти власних коливань вільної поверхні, Гц.

Базисні функції φ_{2k} побудовано в роботі [69].

Рівняння вільної поверхні при цьому набуває вигляду

$$\zeta = \zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (2.26)$$

а для потенціалу швидкостей маємо

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}. \quad (2.27)$$

Зауважимо, що для сумарного потенціалу (2.27) виконані такі співвідношення

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Таким чином, для остаточного розв'язання початково-крайової задачі (2.6) з граничними умовами (2.5) необхідно також задовольнити системи диференціальних рівнянь (2.1) та динамічній граничній умови на вільній поверхні, яка описується першим з рівнянь (2.5).

При цьому на вільній поверхні має виконуватись таке співвідношення:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t) \varphi_{2k} + \\ & + (g + a_z(t)) \left(\sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} \right) + a_x(t)x = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Крім того, внаслідок рівняння (2.1) має виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} & \mathbf{L} \left(\sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{u}_k \right) + \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^M \ddot{c}_k(t) \mathbf{u}_k \right) = \\ & = -\rho_l \left[\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t) \varphi_{2k} \right) + a_x(t)x + a_z(t)z \right] + \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В рівнянні (2.28) поверхневий натяг не враховано.

Із співвідношень (2.28), (2.29) знаходимо невідомі функції часу $c_k(t)$ та $d_k(t)$. Для їх однозначного визначення використовуємо початкові умови

$$c_k(0) = c_{k0}, \quad \dot{c}_k(0) = c_{k1}, \quad d_k(0) = d_{k0}, \quad \dot{d}_k(0) = d_{k1}.$$

Це дає змогу дослідити вимушені коливання оболонкової конструкції з відсіками, частково заповненими рідиною. Оскільки зазвичай припускалося, що в початковий момент часу (наприклад, до початку землетрусу) система «оболонка-рідина» знаходилась в стані спокою, то при розрахунках приймаються нульові початкові умови.

Варто відмітити, що для дослідження вільних коливань вважаємо, що

$$c_k(t) = C_k \exp(i\omega t), \quad d_k(t) = D_k \exp(i\omega t).$$

Підставляємо ці вирази в співвідношення (2.28), (2.29) та приходимо до проблеми власних значень, аналогічно роботі [73].

2.5 Побудова основних рівнянь, що описують коливання пружних оболонок з рідиною без урахування сили тяжіння, на основі методу граничних інтегральних рівнянь

Розглянемо задачу визначення вільних коливань пружної оболонки обертання, частково заповненої ідеальною нестисливою рідиною. Вивчаємо спочатку задачу про малі гармонічні коливання пружної оболонки.

Будемо шукати власні форми коливань оболонки з рідиною у вигляді ряду (2.19). Припустимо, що константи, які залежать від часу, мають вигляд $c_k(t) = C_k \exp(i\omega t)$. Опишемо методіку розв'язання мішаної задачі (2.24) для рівняння Лапласа. Опускаючи індекс k , цю задачу можна подати у вигляді

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = i\omega w, \quad \varphi|_{S_0} = 0.$$

Будемо шукати гармонічну функцію φ у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шарів, як у роботі [117], тобто використовуємо пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS. \quad (2.30)$$

Тут $S = \sigma \cup S_0$, обидві точки P і P_0 належать поверхні S . Величина $|P-P_0|$ є декартовою відстанню між точками P і P_0 , при цьому

$$P = (x, y, z), \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Для мішаної задачі (2.24) подання (2.30) приводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(P_0) + \iint_{\sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 &= \iint_{\sigma} w \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma, \quad P_0 \in \sigma, \\ \iint_{\sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 &= \iint_{\sigma} w \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma, \quad P_0 \in S_0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

відносно невідомих функцій φ і q . При цьому функція φ , що визначена на поверхні σ , є тиском на змочену поверхню оболонки, а функція q , яка визначена на поверхні S_0 , є нормальною складовою швидкості рідини на вільній поверхні. Зазначимо, що у співвідношеннях (2.22) відсутній множник $i\omega$; це буде враховано при розв'язанні проблеми власних значень.

У випадку, коли розрахункова область рідини є тілом обертання, доцільно замінити декартові координати (x, y, z) , циліндричними координатами (r, θ, z) . Враховуючи, що $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, будемо мати наступне співвідношення

$$|P-P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2 - 2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)}.$$

Оскільки σ – поверхня оболонки обертання, то функцію w подаємо у вигляді

$$w = w(r, z) \cos \alpha \theta,$$

де (r, θ, z) – циліндричні координати,

α – задане ціле число (кількість вузлових діаметрів).

Будемо шукати розв'язок системи інтегральних рівнянь (2.31) у вигляді

$$\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta, \quad q = q(r, z) \cos \alpha \theta. \quad (2.32)$$

Як у роботі [70], встановлюємо, що система інтегральних рівнянь (2.31) набуває вигляду

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \\ = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1, \quad P_0 \in S_1, \\ \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \\ = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1, \quad P_0 \in S_0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де R – радіус вільної поверхні;

Γ – твірна поверхні обертання σ ;

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k);$$

$$a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0;$$

$$F_\alpha(k) = (-1)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}};$$

$$E_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

Зазначимо, що внутрішні інтеграли в $Q(z, z_0)$, $\Psi(P, P_0)$ є узагальненими повними еліптичними інтегралами першого та другого роду. Оскільки еліптичні інтеграли першого роду є несингулярними, то для їх чисельного обчислення можна успішно використовувати стандартні квадратури Гаусса. Для еліптичних інтегралів другого роду застосовано підхід, заснований на такій характерній властивості середнього арифметично-геометричного значення $AGM(a, b)$, яка описана в роботі [75]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2AGM(a, b)}.$$

Для визначення $AGM(a, b)$ існує простий алгоритм Гаусса, описаний нижче,

$$a_0 = a, b_0 = b, a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, b_1 = \sqrt{a_0 b_0}, \dots, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \dots;$$

$$AGM(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Це ефективний метод обчислення еліптичних інтегралів другого роду та високоточна числова процедура для обчислення внутрішніх інтегралів. Точність $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$ зазвичай досягається при $n = 6$.

Але зовнішні інтеграли в формулах (2.33) мають логарифмічні особливості. При цьому, чим точніше обчислюються внутрішні інтеграли, тим більш чітко проявляється логарифмічна особливість. Числова симуляція цих інтегралів була здійснена за спеціальними квадратурами Гаусса із застосуванням методики, що описана в роботі [121].

Таким чином, задачу визначення частот та форм коливань пружної оболонкової конструкції, без урахування сили тяжіння, зведено до розв'язання одновимірної системи сингулярних інтегральних рівнянь (2.33).

Для розв'язання системи рівнянь (2.33) використано метод граничних

елементів зі сталою апроксимацією густини на елементі [57]. Елементи в даному випадку – це ділянки твірної. На не особливих елементах використовуються стандартні квадратурні формули Гаусса; сингулярні елементи діляться особливою точкою на два елементи, на кожному з яких знову застосовуються стандартні квадратурні формули Гаусса. Такий метод розв’язання системи сингулярних інтегральних рівнянь застосовано в [121].

2.6 Способи задання вільної поверхні

Є кілька підходів для визначення форми вільної поверхні. Ряд дослідників [118, 119] вважають, що коливаннями форми вільної поверхні можна знехтувати, тобто приймають $\zeta = 0$.

Підставою для цього є поділ спектру коливань конструкції на два підспектри: власні коливання, обумовлені рухом вільної поверхні рідини, і власні коливання, обумовлені пружністю конструкції, яка містить рідину, що часто зустрічається в літературі [21, 120].

Якщо мета дослідження полягає у вивченні саме гідропружних коливань без урахування сили тяжіння, то задовільну точність можна забезпечити, формально поклавши в розглянутих рівняннях $g = 0$. При цьому умови на вільній поверхні замінюються одним співвідношенням

$$p|_{s_0} = 0. \quad (2.34)$$

Тоді тиск визначається зі змішаної задачі для рівняння Лапласа

$$\Delta p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{\sigma_0}, \quad p|_{s_0} = 0. \quad (2.35)$$

Після того, як задача (2.35) розв’язана, на вільній поверхні визначається

значення $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}$, що дає можливість побудови форми вільної поверхні

Зауважимо, що при такому підході умова $p = 0$ не виконана. Тому слід розв'язувати задачу в припущенні, що $g = 0$.

Якщо поділ власних коливань на два підспектри не реалізується, то виключення впливу хвиль на вільній поверхні рідини є неможливим.

Другий підхід до визначення форми вільної поверхні запропонований і розвинений у роботі [70]. Тут вважається, що функція ζ , яка описує форму вільної поверхні, залежить тільки від часу. Тоді отримуємо

$$\iint_{\sigma_0} \zeta(t) d\sigma_0 = \zeta(t) S(\sigma_0),$$

де $S(\sigma_0)$ – площа вільної поверхні σ_0 . Маємо

$$f(t) = \frac{1}{S(\sigma_0)} \iint_{\sigma_0} w d\sigma_0. \quad (2.36)$$

У цьому підході умова рівності тиску на вільній поверхні атмосферному тиску виконується наближено. Окрім того, вільна поверхня залишається паралельною до свого початкового положення під час всього руху.

Третій підхід полягає у наступному. Потенціал швидкостей подається у вигляді суми двох функцій, одна з яких описує рух рідини в деформованій оболонці при відсутності хвильових рухів вільної поверхні, а друга є потенціалом швидкостей, що описує вільні коливання рідини в жорсткому резервуарі з урахуванням дії сил гравітації.

Аналіз літературних джерел показує, що саме такий підхід найбільш адекватно дозволяє описати форму вільної поверхні. Тут відсутнє припущення про те, що вільна поверхня залишається паралельною до свого початкового положення за весь час руху, а також задовольняється рівність тиску на вільній поверхні атмосферному тиску. Крім того, є можливість розглядування течій, в яких

враховується сила гравітації. Саме цей підхід використаний у дисертації.

2.7 Основні рівняння для дослідження коливань рідини в жорстких оболонках з перегородками на основі методу граничних інтегральних рівнянь і розробка числового алгоритму їх розв'язання

Для розв'язання задачі про коливання рідини в оболонкових конструкціях з внутрішніми перегородками, які ставлять для гасіння плескань (рис. 2.1), використовується метод граничних суперелементів (МГСЕ), який описано нижче.

Плескання будемо визначати як рух вільної поверхні рідини в частково заповненому резервуарі. Зазначимо, що невдале розташування перегородок або їх відсутність можуть призвести до руйнування конструкції. Наприклад, один з перших польотів на Юпітер зазнав фіаско внаслідок того, що програма, яка керує поворотами космічного апарату, працювала з частотою, яка виявилася близькою до частоти коливань рідини, і плескання, що виникли при цьому, призвели до втрати стійкості апарата.

В цьому підрозділі розглянуто застосування МГСЕ і здійснено зведення отриманих систем двовимірних інтегральних рівнянь до одновимірних задач.

На рис. 2.4 зображено розділення розрахункової області, що зайнята рідиною, на ряд підобластей. Використовуємо інтегральне подання (2.30). Введемо деякі позначення. Підобласті позначаємо так: Ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Ці підобласті (суперелементи) зображені на рис. 2.4.

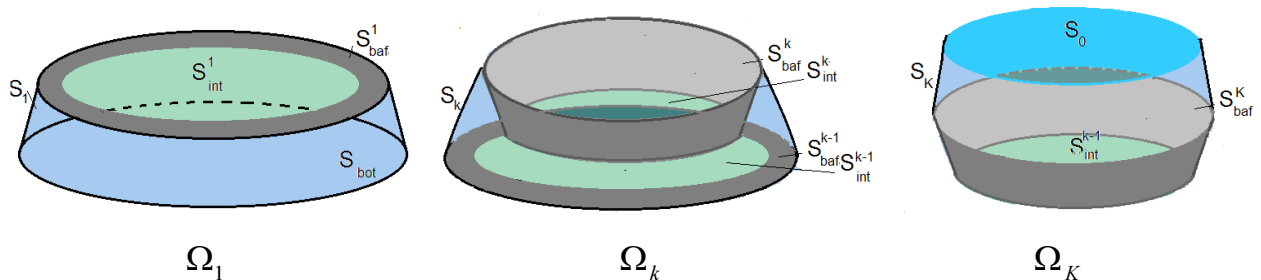


Рисунок 2.4 – Суперелементний підхід

Вводимо штучні поверхні S_{int}^k , $k = 1, 2, \dots, K - 1$, які називають також поверхнями інтерфейсу. Поверхні стінок оболонкової конструкції в k -й підобласті позначені як S_k , $k = 1, 2, \dots, K$, S_{bot} є поверхнею днища, та S_{baf}^k , $k = 1, 2, \dots, K - 1$, є поверхнями перегородок. Зауважимо, що розроблений підхід дозволяє розглядати довільну кількість перегородок.

Основна ідея використання МГСЕ полягає в наступному. Вплив кожного суперелементу на сусідній враховується шляхом введення матриці впливу. Ця матриця зв'язує значення потенціалів швидкостей на поверхнях інтерфейсу з відповідними потоками. Це дозволяє отримати фінальну систему інтегральних рівнянь відносно лише значень невідомих величин на вільній поверхні. Після поділу межі рідини на граничні елементи отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень потенціалу у припущенні, що потоки є відомими. Введемо також такі позначення для жорстких поверхонь, що обмежують підобласті:

$$\sigma_1 = S_1 \cup S_{\text{bot}} \cup S_{\text{baf}}^1, \quad \sigma_k = S_k \cup S_{\text{baf}}^{k-1} \cup S_{\text{baf}}^k, \quad k = 2, \dots, K - 1, \quad \sigma_K = S_K \cup S_{\text{baf}}^{K-1}.$$

В цілому, границі суперелементів Ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$, позначені як

$$\Sigma_1 = \sigma_1 \cup S_{\text{int}}^1, \quad \dots, \quad \Sigma_k = \sigma_k \cup S_{\text{int}}^{k-1} \cup S_{\text{int}}^k, \quad k = 2, \dots, K - 1, \quad \Sigma_K = \sigma_K \cup S_{\text{int}}^{K-1}.$$

Використовуються такі позначення для масивів значень потенціалів у вузлах на жорстких межах в підобластях Ω_k :

$$\varphi^k = \varphi(x, y, z)|_{\sigma_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Потоки на жорстких поверхнях дорівнюють нулю внаслідок умови непротікання. Масиви значень потенціалу та потоку у вузлах поверхонь інтерфейсу позначаються як

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{int}}^{k1} &= \varphi(x, y, z)|_{S_{\text{int}}^k}, \quad q^{k1} = q(x, y, z)|_{S_{\text{int}}^k}, \quad S_{\text{int}}^k \subset \Sigma_k, \\ \varphi_{\text{int}}^{k2} &= \varphi(x, y, z)|_{S_{\text{int}}^k}, \quad q^{k1} = q(x, y, z)|_{S_{\text{int}}^k}, \quad S_{\text{int}}^k \subset \Sigma_{k+1}, \quad P = (r, z, \theta), \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned}$$

На вільній поверхні масиви значень потенціалу та потоку у вузлах позначаються через φ_0 та $q_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_0}$, відповідно. На поверхнях інтерфейсу виконуються умови з роботи [57]

$$\varphi_{\text{int}}^{k1} = \varphi_{\text{int}}^{k2}, \quad q^{k1} = -q^{k2}.$$

Тому на цих поверхнях є лише два набори невідомих

$$\varphi_{\text{int}}^{k1} = \varphi_{\text{int}}^{k2} = \varphi_{\text{int}}^k, \quad q^{k1} = q^k, \quad q^{k2} = -q^k.$$

Зазначимо, що в інтегральних операторах, наведених вище, є два типи сингулярних ядер. А саме, ми маємо

$$A(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma, \quad B(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma, \quad P_0 \in \sigma. \quad (2.37)$$

Вводимо далі позначення $\tilde{S}_{2k+1} = \sigma_k$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, $\tilde{S}_{2k} = S_{\text{int}}^k$, $k = 1, 2, \dots, K-1$, та $\tilde{S}_{2K} = S_0$ і отримуємо такі вирази:

$$A_{ij} = \delta_{ij} C(P_0) + A(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), \quad B_{ij} = B(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2K.$$

Отже система інтегральних рівнянь для першої підобласті Ω_1 має такий вигляд:

$$A_{11}\varphi^1 + A_{12}\varphi_{\text{int}}^1 = B_{12}q^1, \quad P_0 \in \sigma_1,$$

$$A_{21}\varphi^1 + A_{22}\varphi_{\text{int}}^1 = B_{22}q^1, \quad P_0 \in S_{\text{int}}^1.$$

З цих рівнянь отримуємо вирази для φ^1 та φ_{int}^1

$$\varphi^1 = F_{1i} q^1, \quad \varphi_{\text{int}}^1 = F_{li} q^1,$$

$$F_1 = A_\varphi^{-1} B_{q_1}, \quad A_\varphi = A_{11} - \frac{1}{2\pi} A_{12} A_{21}, \quad B_{q_1} = B_{12} - \frac{1}{2\pi} A_{12} B_{22}, \quad F_{li} = \frac{1}{2\pi} (B_{22} - A_{21} F_1).$$

Таким чином, отримано рівняння, яке зв'язує потік q^1 з потенціалом швидкості φ_{int}^1 , а саме

$$\varphi_{\text{int}}^1 = F_{li} q^1,$$

де F_{li} – матриця впливу.

Для другої підобласті Ω_2 система інтегральних рівнянь може бути записана як

$$\begin{aligned} A_{22} \varphi_{\text{int}}^1 + A_{23} \varphi^2 + A_{24} \varphi_{\text{int}}^2 + B_{22} q^1 &= B_{24} q^2, \quad P_0 \in S_{\text{int}}^1 = \tilde{S}_2, \\ A_{32} \varphi_{\text{int}}^1 + A_{33} \varphi^2 + A_{34} \varphi_{\text{int}}^2 + B_{32} q^1 &= B_{34} q^2, \quad P_0 \in \sigma_2 = \tilde{S}_3, \\ A_{42} \varphi_{\text{int}}^1 + A_{43} \varphi^2 + A_{44} \varphi_{\text{int}}^2 + B_{42} q^1 &= B_{44} q^2, \quad P_0 \in S_{\text{int}}^2 = \tilde{S}_4. \end{aligned} \quad (2.38)$$

З рівнянь (2.38) отримуємо зв'язок потоку та потенціалу швидкостей на другій поверхні інтерфейсу $\varphi_{\text{int}}^2 = F_{2i} q^2$.

Рівняння, аналогічні (2.38), можна записати для кожного граничного суперелементу (підобласті)

$$\begin{aligned} A_{2k, 2k} \varphi_{\text{int}}^{k-1} + A_{2k, 2k+1} \varphi^k + A_{2k, 2k+2} \varphi_{\text{int}}^k + B_{2k, 2k} q^{k-1} &= B_{2k, 2k+2} q^k, \quad P_0 \in \tilde{S}_{2k}, \\ A_{2k+1, 2k} \varphi_{\text{int}}^{k-1} + A_{2k+1, 2k+1} \varphi^k + A_{2k+1, 2k+2} \varphi_{\text{int}}^k + B_{2k+1, 2k} q^{k-1} &= B_{2k+1, 2k+2} q^k, \quad P_0 \in \tilde{S}_{2k+1}, \\ A_{2k+2, 2k} \varphi_{\text{int}}^{k-1} + A_{2k+2, 2k+1} \varphi^k + A_{2k+2, 2k+2} \varphi_{\text{int}}^k + B_{2k+2, 2k} q^{k-1} &= B_{2k+2, 2k+2} q^k, \quad P_0 \in \tilde{S}_{2k+2}. \end{aligned}$$

З цих рівнянь та співвідношення $\varphi_{\text{int}}^{k-1} = F_{k-1, i} q^{k-1}$ отримуємо $\varphi_{\text{int}}^k = F_{k, i} q^k$ і,

остаточно, $\varphi_{\text{int}}^K = \varphi_0 = F_{K,i} q^K \Big|_{S_{2K}}$. Але $\tilde{S}_{2K} = S_0$, тому отримаємо $q^K = q_0 = \omega^2 \varphi_0$.

Звідси

$$\varphi_0 = \omega^2 F_{K,i} \varphi_0. \quad (2.39)$$

на вільній поверхні. Таким чином, розв'язання проблеми власних значень, що подана формулами (2.24), (2.25), визначає частоти та форми коливань рідини в резервуарі з перегородками.

У формулах (2.37) поверхні S і σ можуть бути різними або співпадати. Якщо $S = \sigma$, то інтеграли в рівняннях (2.37) є сингулярними, і їх обчислення має враховувати наявність цієї сингулярності. Підінтегральні функції є сильно нерівномірними по елементу і стандартні квадратури втрачають точність.

Висновки за розділом 2

1. Розроблено уточнені математичні моделі для аналізу міцнісних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною, та мають перегородки різних типів для демпфування плескань. Обґрунтовано доцільність зведення задач гідропружної взаємодії до граничних інтегральних рівнянь та здійснено зведення систем двовимірних інтегральних рівнянь до одновимірних для аксіально-симетричних задач.

2. Встановлено, що для розв'язання зв'язаної динамічної задачі для оболонкової конструкції при частковому заповненні рідиною треба побудувати три системи базисних функцій а саме: форми вільних коливань незаповненої оболонки; форми коливань рідини в жорсткій оболонці під дією сили тяжіння; форми коливань пружної оболонки без урахування дії сили тяжіння. Для побудови цих базисних функцій використовуються одновимірні методи скінченних та граничних елементів.

3. Отримано вирази для фундаментальних розв'язків та їх похідних в термінах повних еліптичних інтегралів першого і другого роду. Побудовані нові

ефективні наближені методи числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь на основі ретельного вивчення властивостей ядер відповідних інтегральних операторів.

4. Сформульовані задачі дослідження динамічної поведінки оболонок, частково заповнених рідиною. Запропоновано новий метод, заснований на єдиному підході до дослідження динаміки незаповнених оболонок; визначенню частот і форм коливань вільної поверхні рідини в жорстких оболонках; визначенню частот і форм коливань оболонки з рідиною з урахуванням і без урахування сил тяжіння; визначенню динамічних характеристик оболонок з рідиною, підданих дії різних змушувальних сил.

5. Описано переваги запропонованого підходу. Серед них – засіб задання вільної поверхні, що дозволяє аналізувати рівень підйому рідини в резервуарі при дії змушувальних сил без спрощуючих припущень, а також без диференціювання даних акселограми.

Основні результати другого розділу опубліковані у роботах автора [21, 124, 125 – 127, 131, 133, 141, 142, 149, 156, 162].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [21, 116, 120, 121].

3 ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЖОРСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ

Явища плескань рідини в частково заповнених резервуарах притаманні широкому колу конструкцій, які використовуються в нафтохімічній, аерокосмічній промисловості та при транспортуванні. Серед цих резервуарів зазначимо циліндричні, конічні, сферичні оболонки та складені оболонки обертання. Припускається, що рідина є ідеальною нестисливою, а її рух є безвихровим. Надалі розглянуті вільні коливання в призматичних, циліндричних та циліндрично-конічних резервуарах з перегородками та без перегородок.

3.1 Вільні коливання рідини в призматичних резервуарах

3.1.1 Вільні коливання рідини в призматичних резервуарах без перегородок

Розглядається призматичний резервуар, частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною на висоту H . Вважаємо, що днище резервуара є прямокутником з бічними сторонами $2a$ і $2b$.

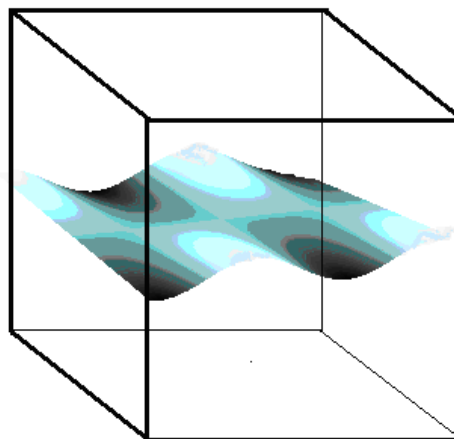


Рисунок 3.1 – Призматичний резервуар, частково заповнений рідиною

Припустимо, що з контейнером зв'язано декартову систему координат $Oxyz$, при цьому вільна поверхня рідини S_0 розташована в площині $z = H$ в

стані спокою. Для обчислення тиску рідини p будемо використовувати лінеаризоване рівняння Бернуллі у вигляді (2.3).

Отримаємо аналітичний розв'язок крайової задачі (2.4), (2.5) для призматичного резервуару у випадку гармонічних коливань. Подамо потенціал швидкостей у вигляді

$$\varphi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z). \quad (3.1)$$

Далі використовуємо метод відокремлення змінних, а саме вважаємо, що

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (3.2)$$

Підставляючи подання (3.2) у диференціальне рівняння (2.4), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= 0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далі знайдемо, що

$$Z(z) = C_1 \exp(\lambda z) + C_2 \exp(-\lambda z). \quad (3.4)$$

Задовольняючи крайову умову непротікання на поверхні днища, що знаходиться в площині $z = 0$, будемо мати

$$\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad \lambda(C_1 - C_2) = 0. \quad (3.5)$$

Звідси маємо

$$Z(z) = C_1 \cosh(\lambda z).$$

Далі з (3.3) знаходимо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2 = -\mu^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\gamma^2,$$

$$\lambda^2 = \mu^2 + \gamma^2. \quad (3.6)$$

Отримуємо

$$X(x) = E_1 \cos \mu x + E_2 \sin \mu x,$$

$$Y(y) = D_1 \cos \gamma y + D_2 \sin \gamma y. \quad (3.7)$$

Для виконання граничної умови на бічних поверхнях $y = -b$, $y = b$, знайдемо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma X(x)(D_1(-\sin \gamma x) + D_2 \cos \gamma x)Z(z) = 0. \quad (3.8)$$

Тоді для знаходження констант D_1 , D_2 будемо мати наступну систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} D_1 \sin \gamma b + D_2 \cos \gamma b = 0, \\ -D_1 \sin \gamma b + D_2 \cos \gamma b = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Для того, щоб система (3.9) мала ненульовий розв'язок, її дискримінант має дорівнювати нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \gamma b & \cos \gamma b \\ -\sin \gamma b & \cos \gamma b \end{vmatrix} = \sin \gamma b \cos \gamma b + \cos \gamma b \sin \gamma b = \sin 2\gamma b = 0.$$

З отриманого рівняння знаходимо значення сталих відокремлення

$$\gamma_l = \frac{\pi l}{2b}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Аналогічно, використовуючи граничну умову на бічних поверхнях $x = -a$, $x = a$, знайдемо, що

$$\mu_k = \frac{\pi k}{2a}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Також зауважимо, що потрібно врахувати значення $\mu_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, але вони приводять до нульової частоти і коливання відсутні.

Введемо частотний параметр

$$\lambda_{kl} = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2b}\right)^2}.$$

Отримаємо такі частинні розв'язки диференційного рівняння (2.4):

$$\varphi_{kl}(x, y, z) = \cosh(\lambda_{kl}z) \cos(\mu_k(x - a)) \cos(\gamma_l(y - b)).$$

Зауважимо, що $\lambda_{kl}^2 = \mu_k^2 + \gamma_l^2$.

Отримаємо таку умову на вільній поверхні:

$$-\omega^2 \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Задовольняючи цю умову, матимемо

$$\omega_{kl} = \sqrt{g \lambda_{kl} \tanh(\lambda_{kl} H)}. \quad (3.10)$$

В табл. 3.1 наведено числові значення частот ω_{kl} та частотного параметру λ_{kl} для призматичного резервуару в формі куба $a = b = H = 1$ м.

Форми коливань вільної поверхні зображені на рис. 3.2. На вільній поверхні $z = H$, тому $Z(z) = \text{const}$.

Таблиця 3.1 – Частоти власних коливань рідини в призматичному резервуарі

| n | k | l | λ_{kl} | ω_{kl} |
|-----|-----|-----|----------------|---------------|
| 1 | 0 | 1 | 1.570796327 | 3.759370945 |
| 2 | 1 | 0 | 1.570796327 | 3.759370945 |
| 3 | 1 | 1 | 2.221441469 | 4.613638284 |
| 4 | 0 | 2 | 3.141592654 | 5.541131019 |
| 5 | 2 | 0 | 3.141592654 | 5.541131019 |
| 6 | 2 | 1 | 3.512407365 | 5.864765128 |
| 7 | 1 | 2 | 3.512407365 | 5.864765128 |
| 8 | 2 | 2 | 4.442882939 | 6.600956288 |

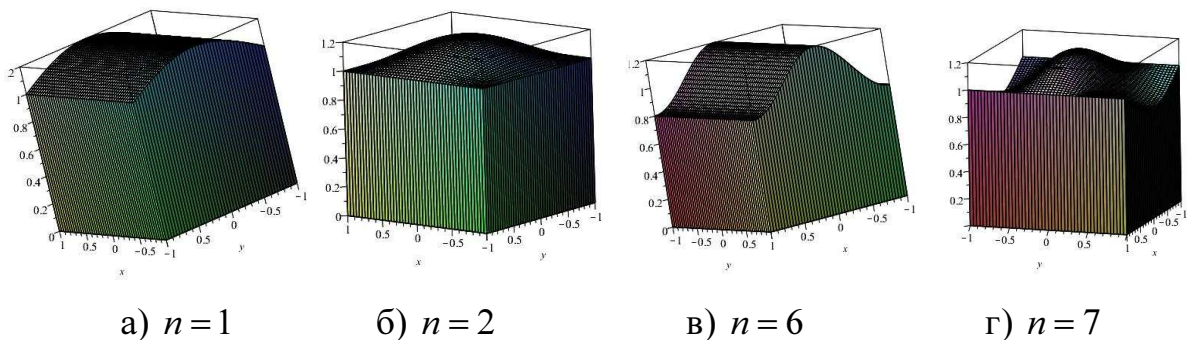


Рисунок 3.2 – Форми коливань вільної поверхні в кубічному резервуарі

Функції, що описують отримані форми коливань, обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
 \varphi_{01}(x, y, H) &= E_1 \sin \frac{\pi y}{2b}, & \varphi_{10}(x, y, H) &= E_2 \sin \frac{\pi x}{2a}, \\
 \varphi_{11}(x, y, H) &= E_3 \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}, & \varphi_{02}(x, y, H) &= E_4 \cos \frac{\pi y}{b}, & \varphi_{20}(x, y, H) &= E_5 \cos \frac{\pi x}{a}, \\
 \varphi_{21}(x, y, H) &= E_6 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{2b}, & \varphi_{12}(x, y, H) &= E_7 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\
 \varphi_{22}(x, y, H) &= E_8 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отримані форми надалі будуть використовуватись як базисні функції при дослідженні вимушених коливань.

3.1.2 Вільні коливання рідини в призматичних резервуарах з вертикальними перегородками

Розглядається призматичний резервуар з хрестовими вертикальними перегородками (рис. 3.3, 3.4).

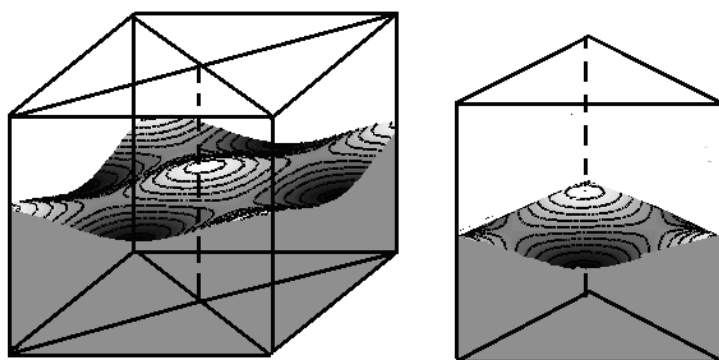


Рисунок 3.3 – Призматичний резервуар з вертикальними перегородками та його відсік

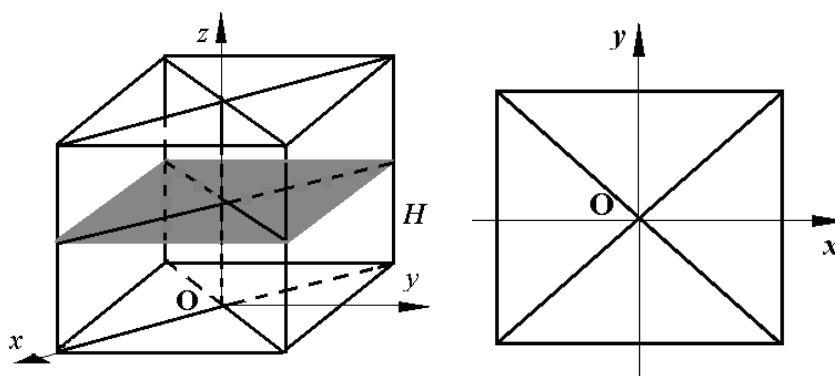


Рисунок 3.4 – Горизонтальний переріз резервуару

Вважаємо, що чотири відсіки резервуару частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною, причому рівень заповнення H у всіх відсіках однаковий. Вільні коливання рідини в призматичному резервуарі з перегородками, частково заповненому рідиною, знаходимо з рівнянь (2.24), до яких додаємо до-

даткові умови на перегородках. Для формулювання граничних умов на хрестових перегородках припустимо для спрощення, що днище резервуару є квадратом зі стороною $2a$.

Рівняння площин, в яких знаходяться перегородки є такими:

$$y + x = 0, \quad y - x = 0.$$

Одиничними нормаллями до поверхонь перегородок є, відповідно, такі вектори

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

Оскільки $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = (\text{grad } \varphi, \mathbf{n})$, то граничні умови на перегородках $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$ і

$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$ набувають вигляду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (3.12)$$

Таким чином, сформульовано крайову задачу (2.24), (3.12) для визначення вільних коливань рідини в резервуарі з хрестовими вертикальними перегородками.

Подамо потенціал швидкостей у вигляді $\varphi(x, y, z, y) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z)$ та використовуємо метод відокремлення змінних, описаний вище. Знаходимо, що частинним розв'язком диференціального рівняння (2.4), що задовольняє умови непротікання на бічних поверхнях, є функція

$$\varphi_{kl}(x, y, z) = \cosh(\lambda_{kl}z) \cos(\mu_k(x - a)) \cos(\gamma_l(y - a)), \quad (3.13)$$

де

$$\lambda_{kl} = \frac{\pi}{2a} \sqrt{k^2 + l^2}, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{2a}, \quad \gamma_l = \frac{\pi l}{2a}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

З'ясуємо як мають бути пов'язані μ_k і γ_l з (3.14), щоб задовольнити умови (3.12). Перша з цих умов відноситься до поверхні $y + x = 0$. На цій поверхні маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} &= -\mu_k \cosh(\lambda_{kl} z) \sin(\mu_k (x - a)) \cos(\gamma_l (y - a)) = \\ &= -\mu_k \cosh(\lambda_{kl} z) \sin(\mu_k (x - a)) \cos(\gamma_l (x + a)), \\ \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} &= -\gamma_l \cosh(\lambda_{kl} z) \cos(\mu_k (x - a)) \sin(\gamma_l (y - a)) = \\ &= \gamma_l \cosh(\lambda_{kl} z) \cos(\mu_k (x - a)) \sin(\gamma_l (x + a)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Зауважимо, що $\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} = 0$, якщо $\gamma_l = \mu_k$, тобто $l = k$. Аналогічно, на поверхні $y - x = 0$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} &= -\mu_k \cosh(\lambda_{kl} z) \sin(\mu_k (x - a)) \cos(\gamma_l (y - a)) = \\ &= -\mu_k \cosh(\lambda_{kl} z) \sin(\mu_k (x - a)) \cos(\gamma_l (x - a)), \\ \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} &= -\gamma_l \cosh(\lambda_{kl} z) \cos(\mu_k (x - a)) \sin(\gamma_l (y - a)) = \\ &= \gamma_l \cosh(\lambda_{kl} z) \cos(\mu_k (x - a)) \sin(\gamma_l (x - a)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

тобто при $\gamma_l = \mu_k$ матимемо $\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} = 0$.

Таким чином, крайові умови (3.12) виконані. Зауважимо, що похідні у (3.15) і (3.16) обчислювались відповідно при $y = -x$ і $y = x$.

Звідси отримаємо такі частинні розв'язки розглядуваної крайової задачі

$$\varphi_{2k+1}(x, y, z) = \cosh \frac{\pi(2k+1)z}{a\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2a} \sin \frac{\pi(2k+1)y}{2a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{2k}(x, y, z) = \cosh \frac{\pi k \sqrt{2} z}{a} \cos \frac{\pi k x}{a} \cos \frac{\pi k y}{a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Переходимо до крайових умов на вільній поверхні. Подамо невідомий потенціал швидкостей $\varphi(x, y, z, t)$ та функцію $\zeta = \zeta(x, y, t)$, що описує еволюцію вільної поверхні, у такий спосіб

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, z), \quad (3.18)$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\varphi_k(x, y, H)}{\partial z}. \quad (3.19)$$

Якщо використовуються подання (3.18), (3.19), то кінематична крайова умова виконується автоматично. Для виконання динамічної крайової умови отримаємо таке співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, H) + g \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\varphi_k(x, y, H)}{\partial z} = 0.$$

З використанням подань (3.18) та (3.19) за умови ортогональності функцій $\varphi_k(x, y, z)$ отримаємо

$$\ddot{c}_k(t) \cosh \left(\frac{\pi \sqrt{2} k H}{a} \right) + c_k(t) g \frac{\pi \sqrt{2} k}{a} \sinh \left(\frac{\pi \sqrt{2} k H}{a} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

З (3.20) знаходимо коефіцієнти $c_k(t)$ у вигляді:

$$c_k(t) = \exp(i\omega_k t), \quad \omega_k^2 = g \frac{\pi \sqrt{2} k}{a} \tanh \left(\frac{\pi \sqrt{2} k H}{a} \right) \quad (3.21)$$

Таким чином, отримано частоти та форми вільних коливань призматичного резервуара з хрестовими перегородками. Частоти обчислюються за формула-

ми (3.21), а форми – за формулами (3.17). На рис. 3.5 зображені перші шість форм коливань рідини в призматичному резервуарі з хрестовими перегородками.

У таблиці 3.2 наведено порівняння частот коливань рідини в призматичних резервуарах з перегородками та без перегородок.

Зауважимо, що отримані форми коливань мають однаковий вигляд в кожному відсіку. Частоти коливань рідини резервуара з перегородками у порівнянні з частотами коливань призматичного бака без перегородок [127] збільшуються. Зазначимо також, що в розглянутому випадку реалізуються лише симетричні форми.

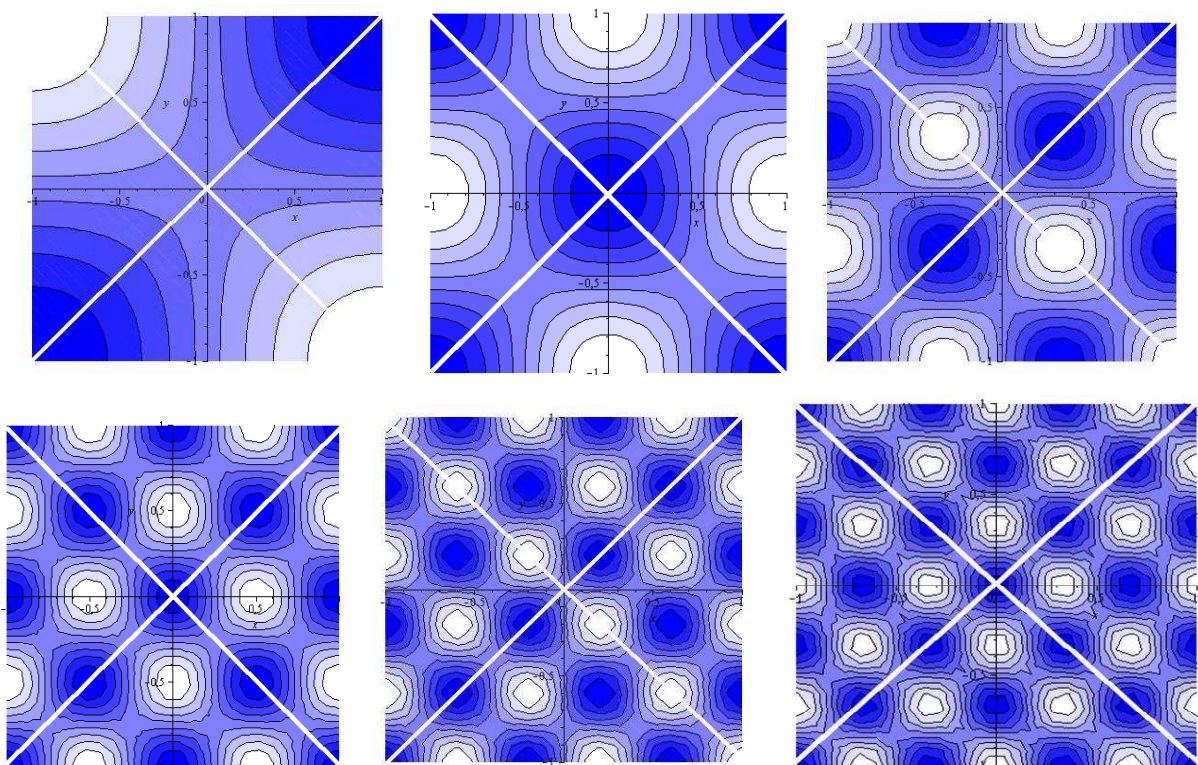


Рисунок 3.5 – Форми коливань рідини в призматичному резервуарі
(горизонтальний переріз)

Таблиця 3.2 – Частоти коливань рідини, Гц

| n | без перегородок | з перегородками |
|-----|-----------------|-----------------|
| 1 | 3.759370945 | 4.613563138 |
| 2 | 3.759370945 | 6.600858707 |
| 3 | 4.613638284 | 8.085473483 |
| 4 | 5.541131019 | 9.336315604 |

3.2 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах

3.2.1 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах без перегородок

Розглянемо жорстку циліндричну оболонку, частково заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Нехай L – висота оболонки, H – рівень заповнення оболонки рідиною, R – радіус оболонки. З оболонкою зв'язана декартова система координат, що зображена на рис. 3.6. Тоді рівняння вільної поверхні матиме вигляд $z = H$.

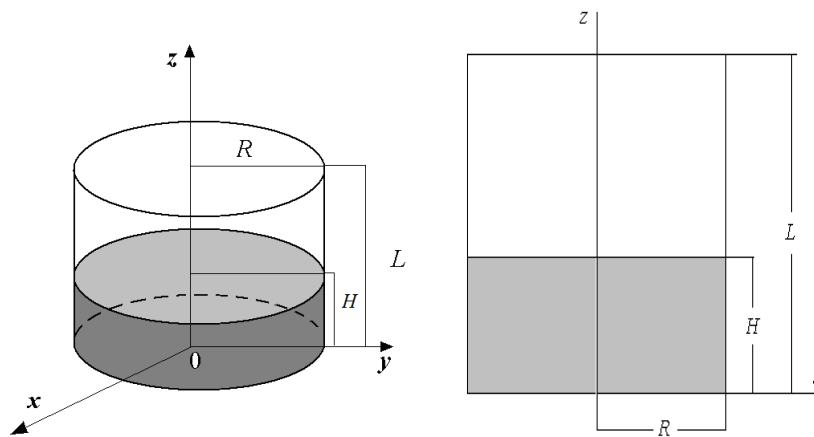


Рисунок 3.6 – Циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною

Для знаходження вільних коливань рідини в циліндричному резервуарі треба розв'язати крайову задачу для диференціального рівняння Лапласа (2.24).

Оскільки розглядається оболонка обертання, доцільно ввести циліндричну систему координат

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z. \quad (3.22)$$

Функції форми мішаної задачі для рівняння Лапласа, що було отримано в [36] шляхом використання методу відокремлення змінних Фур'є, має наступний вигляд

$$\frac{\chi_k^2}{g} = \mu_k \tanh\left(\mu_k \frac{H}{R}\right), \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\varphi_k(\rho, \theta, z) = J_\alpha\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right) \cosh\left(\frac{\mu_k}{R}z\right) \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_k}{R}H\right), \quad (3.23)$$

де μ_k – корені рівняння $J'_\alpha(x) = 0$. Ці корені були розраховані числовим методом та для $\alpha = 1$ наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Характеристичні числа

| μ_1 | μ_2 | μ_3 | μ_4 | μ_5 |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.841 | 5.331 | 8.536 | 11.71 | 14.86 |

Аналітичний розв'язок (3.23) будемо надалі використовувати для виконання тестових розрахунків.

Розглянемо потенціал φ у вигляді (3.18). Для функцій φ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, розглянемо крайові задачі

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (3.25)$$

Продиференціюємо друге співвідношення в (3.25) і підставимо в нього $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ з першого співвідношення в (3.25). Далі будемо подавати функції φ_k у такій формі

$$\varphi_k(x, y, z, t) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z). \quad (3.26)$$

Отримаємо рівність

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k. \quad (3.27)$$

Рівняння вільної поверхні буде мати вигляд

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.28)$$

У циліндричній системі координат для оболонок обертання використовуємо

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha l \theta, \quad l = 1, 2, \quad (3.29)$$

де α – номер гармоніки, l – параметр, який надалі характеризуватиме наявність вертикальних перегородок.

Таким чином, частоти та форми вільних коливань рідини будемо отримувати для різних α .

3.3 Використання методу граничних елементів для обчислення частот і форм коливань рідини в жорстких оболонках обертання

3.3.1 Інтегральні співвідношення

Подамо φ як суму потенціалів простого та подвійного шарів [36], тобто використовуємо метод граничних елементів в прямому формулюванні

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi(P)}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS. \quad (3.30)$$

Тут $S = S_1 \cup S_0$; точки P і P_0 належать поверхні S . Як $r = |P - P_0|$ позначимо відстань між точками P і P_0 .

Використовуючи граничні умови (3.25), (3.26), переходимо до системи

інтегральних рівнянь у вигляді [36, 70]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \\ -\iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Тут, для зручності, потенціал швидкостей позначено як φ_0 на вільній поверхні та як φ_1 – на стінках оболонки.

Введемо циліндричну систему координат за формулами (3.22). Проведемо інтегрування за змінною θ в рівняннях (3.31). Отримаємо таку систему одновимірних сингулярних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2\pi\psi(z_0) + \int_{\Gamma} \psi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma, \quad P_0 \in S_1, \\ \int_{\Gamma} \psi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma, \quad P_0 \in S_0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Тут

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\},$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k),$$

$$E_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\alpha l \psi \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad F_\alpha(k) = (-1)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\alpha l \psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2\rho\rho_0, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}$$

В цих співвідношеннях обираємо $l = 1$ при вивченні руху рідини в оболо-

нках без перегородок.

Для визначення потенціалу ψ з рівнянь (3.32) введемо такі інтегральні оператори:

$$\begin{aligned} A\psi_1 &= 2\pi l\psi_1 + \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1, & B\psi_0 &= \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0, & C\psi_0 &= \iint_{S_0} \psi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0, \\ D\psi_1 &= -\iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1, & F\psi_0 &= \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Тоді крайова задача (3.25) – (3.28) може бути подана в операторному вигляді

$$A\psi_1 = \frac{\chi^2}{g} B\psi_0 - C\psi_0, P_0 \in S_1; \quad D\psi_1 = 2\pi l\psi_0 - \frac{\chi^2}{g} F\psi_0, P_0 \in S_0. \quad (3.34)$$

Визначивши ψ_1 з рівнянь (3.34), отримаємо таку задачу на власні значення щодо потенціалу значень ψ_0 лише на вільній поверхні:

$$(DA^{-1}C + 2\pi^2)\psi_0 - \lambda(DA^{-1}B + F)\psi_0 = 0, \quad \lambda = \frac{\chi^2}{g}. \quad (3.35)$$

Цей розв'язок визначає вільні частоти та форми коливань рідини в циліндричному резервуарі.

Обчислення інтегральних операторів в (3.33) здійснюється за допомогою методу граничних елементів, детальний опис якого надано в [76, 121].

Варто зазначити, що маємо два види ядер в інтегральних операторах, які наведені вище в (3.31). А саме, маємо

$$A(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma, \quad B(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma, \quad P \in \sigma. \quad (3.36)$$

В формулах (3.36) поверхні S та σ можуть бути різними або співпадати.

Якщо поверхня S співпадає з поверхнею σ , то інтеграли в (3.36) сингулярні, і при їх числовому визначенні необхідно приймати до уваги наявність цієї інтегровної особливості. Вирази під знаком інтеграла тут є суттєво неоднорідними, і стандартні квадратури втрачають точність. Тому в роботі використані спеціальні алгоритми для обчислення таких інтегралів [76, 121].

3.3.2 Тестування методу граничних елементів в задачі про вільні коливання оболонки обертання, частково заповненою рідиною

В [128] показано, що для $f(x_0, y_0) = \pi^2$ аналітичний розв'язок рівняння

$$\iint_S \frac{\gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = f(x_0, y_0) \quad (3.37)$$

має вигляд $\gamma(x, y) = 1$. Ми розглянули рівняння (3.37) з такою правою частиною і звели його до розв'язування одновимірного рівняння

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^R \frac{\gamma(\rho)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{\rho + \rho_0} F_0(k) d\rho = 1. \quad (3.38)$$

У рівнянні (3.38) була зроблена заміна змінної $\rho = R \sin \theta$. Це дозволило позбутися від кореневої особливості при ρ , близьких до R . Рівняння (3.38) набуло вигляду

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta}{\sin \theta + \sin \theta_0} F_0(k) d\theta = 1. \quad (3.39)$$

При розбитті області інтегрування на M частин отримані точки з координатами

$$\rho_j = R \sin \theta_j, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2M} \left(j - \frac{1}{2} \right), \quad j = 1, \dots, M.$$

При $M = 40$ були обчислені значення інтеграла, які наведені в табл. 3.4 і демонструють високу точність обчислень.

Таблиця 3.4 – Точність обчислення інтеграла (3.39)

| Номер елемента | 1 | 5 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\gamma(x, y)$ | 1.000092 | 1.000083 | 1.000155 | 1.000163 | 1.000165 | 1.000173 | 1.000168 |

Еліптичні інтеграли другого роду ($\alpha = 0$) обчислювалися за допомогою квадратурних формул Гаусса при $k^2 < 0.9$. В іншому випадку використовувалася асимптотична формула з [117], а саме:

$$F_0(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right) k + \frac{3}{2 \cdot 4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) k + \dots,$$

$$k' = 1 - k^2.$$

Другий тестовий приклад для з'ясування точності запропонованого підходу стосується обчислення потенціалу однорідного простого сферичного шару. Відомо [117], що потенціал однорідного простого сферичного шару з густиною $\rho = \rho_0$ дорівнює $4\pi R \mu_0$ на сфері радіусу R . Це дозволило провести тест на обчислення першого з інтегралів в (3.36) з одиничною густиною на сферичній поверхні. Вважалося, що $\mu_0 = 1$, $R = 10$, точний розв'язок 125.66. Обчислення проводилися при різній кількості елементів N на меридіані сфери. Точність результатів в залежності від N для одного з елементів меридіана приведена в таблиці 3.5.

У таблиці 3.6 наведені результати обчислень $\Delta\psi$ в центрах різних граничних елементів при $N = 80$.

Таблиця 3.5 – Точність обчислення інтегралу $A\psi$ в (3.36) в залежності від кількості граничних елементів

| | | | |
|---------|----------|----------|----------|
| N | 20 | 40 | 80 |
| $A\psi$ | 125.6167 | 125.6403 | 125.6521 |

Таблиця 3.6 – Точність обчислення інтегралу $A\psi$ в (3.36) в залежності від номера елемента

| | | | |
|---------|---------|----------|----------|
| N | 20 | 40 | 80 |
| $A\psi$ | 123.932 | 123.9544 | 124.1632 |

На сфері радіуса R істотно спрощується вираз для похідної

$$\tilde{Q}(z, z_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right).$$

А саме отримуємо, що

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) = -\frac{2}{R\sqrt{a+b}} F_0(k). \quad (3.40)$$

В таблиці 3.7 наведено порівняння результатів для обчислення $\tilde{Q}(z, z_0)$ двома різними способами (за формулою (3.40) і МГЕ при різних значеннях k в (3.32)).

Таблиця 3.7 – Порівняння аналітичного і числового розв'язків

| k | Числовий | Аналітичний |
|---------|---------------|---------------|
| 0.01878 | -1.57655E-002 | -1.57655E-002 |
| 0.16735 | -2.41433E-002 | -2.41431E-002 |
| 0.63048 | -0.100406 | -0.100357 |
| 0.96268 | -0.155331 | -0.155293 |
| 0.99997 | -0.282226 | -0.282217 |

Далі був обчислений інтеграл від $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right)$ по сферичній поверхні за умови, що густина дорівнює 1. Це так званий інтеграл Гаусса [117], і він завжди дорівнює $2\pi = 6.2832\dots$ незалежно від форми гладкої та замкненої оболонки.

Результати чисельного визначення інтеграла Гаусса наведені в табл. 3.8 для різної кількості елементів N на меридіані.

Таблиця 3.8 – Точність обчислення інтегралу Гаусса в залежності від \ кількість елементів

| N | 20 | 40 | 80 |
|-----|--------|--------|--------|
| I | 6.2811 | 6.2819 | 6.2825 |

Зауважимо, що внутрішня задача Неймана для сфери не завжди має розв'язок. Повинна бути виконана додаткова умова на праву частину. Наприклад, не має розв'язку внутрішня задача Неймана з правою частиною, що дорівнює 1. Однак, зовнішня задача Неймана має розв'язок. Нехай $w = \frac{\delta}{R^2}$. Тоді розв'язання зовнішньої задачі $\varphi = \frac{\delta}{R}$ [117].

Числовий розв'язок для $R = 2.0$, $R = 10.0$, $N = 30$ дорівнює 0.20001999777 і відрізняється від аналітичного (0.2) в п'ятому знаку.

Проведені тестові розрахунки дозволили перейти до розв'язання задачі про коливання рідини.

Для перевірки розробленого методу дослідимо коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі та використаємо аналітичний розв'язок (3.23).

Розглянемо циліндричну оболонку з плоским днищем без перегородок з наступними параметрами $R = 1$ м, $H = 1$ м.

У таблиці 3.9 наведені числові значення частот вільних коливань рідини для вузлових діаметрів $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$, отримані запропонованим числовим методом для різних значень N_0 , N_w та N_{bot} і аналітичне значення за формулою

(3.23). Тут ми обирали рівні значення $N_0 = N_w = N_{\text{bot}}$ тому, що радіуси вільної поверхні та днища й висота об'єму рідини дорівнювали 1 м. Використовувались одновимірні граничні елементи з розмірами 0.04 м, 0.02 м та 0.01 м.

Результати, які наведені в таблиці 3.9, свідчать про збіжність запропонованого методу. Зауважимо, що точність $\epsilon = 10^{-4}$ була отримана для $N_0 = N_w = N_{\text{bot}} = 100$. Тому надалі ми розглядали одновимірні граничні елементи довжиною близько 1 % від характерного розміру.

Таблиця 3.9 – Характерний частотний параметр $\frac{\chi_n^2}{g}$ для жорсткого

циліндричного резервуару заповненого рідиною

| № | МГЕ | | | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
|---|-----------------------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | N_0 | N_w | N_{bot} | | | | | |
| 0 | 25 | 25 | 25 | 3.8289 | 7.0163 | 10.1761 | 13.3152 | 6.47089 |
| | 50 | 50 | 50 | 3.8285 | 7.0159 | 10.1735 | 13.3243 | 6.47066 |
| | 100 | 100 | 100 | 3.8281 | 7.0156 | 10.1732 | 13.3233 | 6.47060 |
| | Аналітичний розв'язок | | | 3.8281 | 7.0156 | 10.1734 | 13.3236 | 6.47063 |
| | N_0 | N_w | N_{bot} | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
| 1 | 25 | 25 | 25 | 1.6590 | 5.3301 | 8.5385 | 11.7071 | 14.8684 |
| | 50 | 50 | 50 | 1.6579 | 5.3297 | 8.5372 | 11.7082 | 14.8655 |
| | 100 | 100 | 100 | 1.6573 | 5.3293 | 8.5366 | 11.7066 | 14.8635 |
| | Аналітичний розв'язок | | | 1.6573 | 5.3293 | 8.5363 | 11.7060 | 14.8635 |
| | N_0 | N_w | N_{bot} | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |

На рис 3.7 наведено графіки перших трьох форм коливань вільної поверхні рідини в циліндричному резервуарі для $n = 0$. Суцільними лініями позначені моди, які отримані за формулою (3.23) при $z = H$, а лінії, які позначені точками відповідають числовим значенням при $N_0 = N_w = N_{\text{bot}} = 100$.

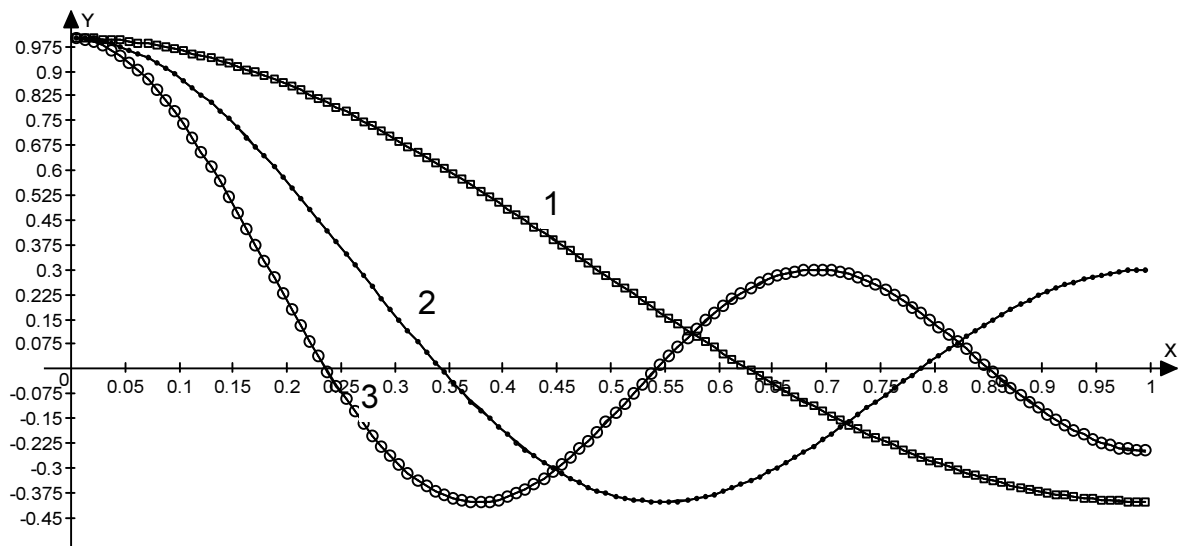


Рисунок 3.7 – Форми коливань, отримані числовим та аналітичним методом

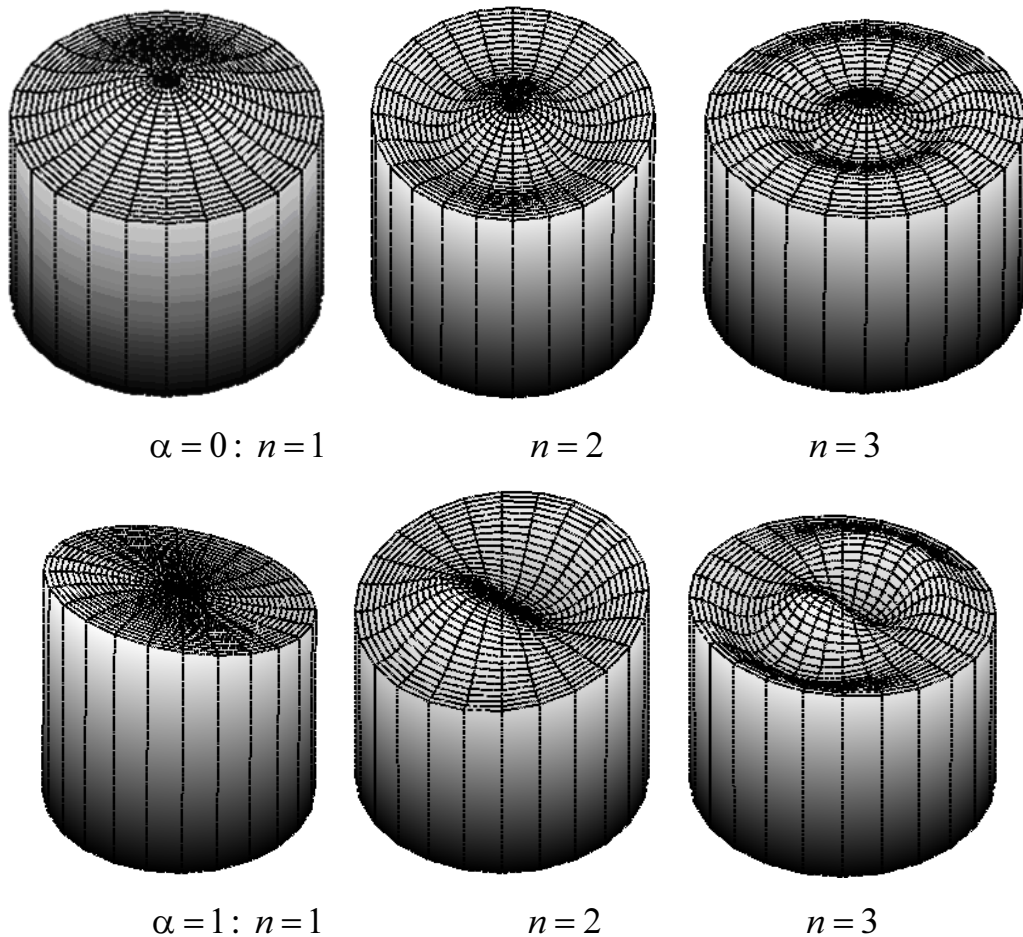


Рисунок 3.8 – Форми коливань рідини у жорстких циліндричних оболонках

На рис. 3.8 наведені форми коливань вільної поверхні рідини в циліндричних резервуарах, що відповідають аксіально-симетричним $\alpha = 0$ та неаксіально-симетричним $\alpha = 1$ коливанням.

3.4 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах з горизонтальними перегородками

Для визначення коливань рідини у резервуарі з горизонтальними перегородками використано метод граничних елементів.

При цьому введено штучну поверхню інтерфейсу S_{int} [36, 73], що розділяє область, яка наповнена рідиною, на дві частини S_1 і S_2 , обмежені поверхнями S_{bot} , S_1 , S_{baf} , S_{int} та S_2 , S_{baf} , S_{int} , S_0 , як показано на рисунку 3.9.

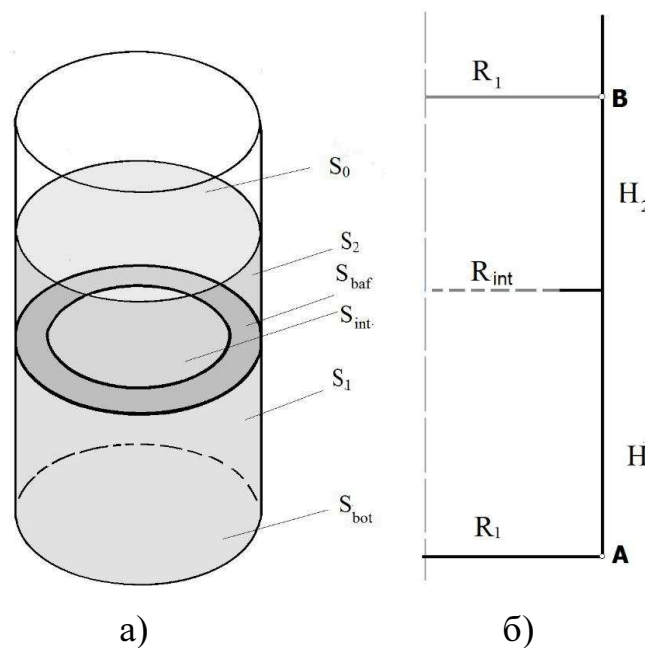


Рисунок 3.9 – Циліндричний резервуар з перегородками, заповнений рідиною

Нехай $\sigma_1 = S_1 \cup S_{bot} \cup S_{baf}$ і $\sigma_2 = S_2 \cup S_{baf}$ – поверхні, що обмежують області S_1 та S_2 . Межі областей Ω_1 і Ω_2 :

$$\Sigma_1 = S_{baf} \cup S_1 \cup S_{bot} \cup S_{int},$$

$$\Sigma_2 = S_{baf} \cup S_2 \cup S_{bot} \cup S_0.$$

Позначимо значення потенціалу швидкостей у вузлах S_1 , S_2 і S_0 як S_1 , S_2 і S_0 відповідно і як w_1 , w_2 значення функції $w = (\mathbf{U}, \mathbf{n})$ на межах Σ_1 , Σ_2 . Потоки q_1 , q_2 відомі з граничної умови непротікання як w_1 , w_2 , а на вільній поверхні

невідомий потік позначається як q_0 . Значення потенціалу швидкостей та потоку

на поверхні інтерфейсу S_{int} будуть невідомими функціями $q_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{int}}}$,

$q_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{int}}}$, $S_{\text{int}} \subset \Sigma_j$, $j = 1, 2$. Маємо такі умови сумісності

$$\varphi_{2i} = \varphi_{1i}, q_1 = -q_2. \quad (3.41)$$

Розглянемо задачу для визначення потенціалу швидкостей. Введемо позначення $\tilde{S}_1 = \sigma_1$, $\tilde{S}_2 = S_{\text{int}}$, $\tilde{S}_3 = \sigma_2$, $\tilde{S}_4 = S_0$.

З використанням матричних операторів (3.36) отримуємо матриці

$$A_{ij} = A(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), B_{ij} = B(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), i, j = \overline{1, 4}.$$

Використовуємо метод суперелементів для знаходження потенціалу [73].

$$\begin{aligned} A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_{1i} &= B_{11}w_1 + B_{12}q_1, P_0 \in \sigma_1, \\ A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_{1i} &= B_{21}w_1 + B_{22}q_1, P_0 \in S_{\text{int}}, \\ A_{32}\varphi_{1i} + A_{33}\varphi_2 &= B_{33}w_2 - B_{32}q_1 + B_{34}q_0, P_0 \in \sigma_2, \\ A_{22}\varphi_{1i} + A_{23}\varphi_2 &= B_{23}w_2 - B_{22}q_1 + B_{24}q_0, P_0 \in S_{\text{int}}, \\ A_{42}\varphi_{1i} + A_{43}\varphi_2 &= B_{43}w_2 - B_{42}q_1 + B_{44}q_0, P_0 \in S_0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Зауважимо, що умови сумісності (3.41) враховані при отриманні системи (3.42). У результаті розв'язання системи (3.42) здобудемо

$$\varphi = \mathbf{Q}\mathbf{w}, \quad \varphi = (\varphi_i)_{i=1}^2, \quad \mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^2, \quad \mathbf{Q} = (Q_{ij})_{ij=1}^2,$$

де вирази для Q_{ij} отримані в [73].

Дослідимо вільні коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці з горизонтальними перегородками. Розглянемо циліндричну оболонку з плоским

дном, що має такі параметри: радіус $R = 1$ м, товщина $h = 0.01$ м, довжина $L = 2$ м. Нехай H – рівень заповнення рідиною. Перегородка є круглою пластиную з центральним отвором (кільцева перегородка) (див. рис. 3.9). Вертикальну координату перегородки (висоту розміщення перегородки) позначимо як H_1 ($H_1 < H$). Радіус поверхні інтерфейсу позначимо як R_{int} . Будемо мати $H = H_1 + H_2$, $R_{\text{baf}} = R - R_{\text{int}}$.

Числові результати отримано за допомогою методу граничних елементів. Використано 100 граничних елементів вздовж радіуса днища (N_b), 120 елементів уздовж змочених циліндричних частин (N_w) і 100 елементів вздовж радіусу вільної поверхні (N_0). Подальше збільшення кількості елементів не призводило до суттєвої зміни результатів. На поверхні інтерфейсу та перегородки використано різну кількість елементів в залежності від радіуса перегородки. При числовому моделюванні розглянуто різні значення для R_{int} та H_1 . Застосовано аналітичний розв'язок (3.23) для порівняння та валідації числового розрахунку.

Для тестування суперелементного підходу розраховані власні частоти коливань рідини в резервуарі при встановленні перегородки на рівнях $H_1 = 0.5$ м, $H_1 = 0.9$ м з $R_{\text{int}} = 0.7$ м, $H = 1.0$ м. Порівняння результатів з обчислення частотного параметру $\omega^2 = \frac{\chi^2}{g}$, отриманих запропонованим методом граничних суперелементів (МГСЕ), та аналітичних даних з роботи І. Гаврилюка [129] подано в таблиці 3.10.

Таблиця 3.10 – Порівняння результатів для $\omega^2 = \frac{\chi^2}{g}$ при $\alpha = 0$

| Позиція перегородки | Метод | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ |
|---------------------|-------|---------|---------|---------|---------|
| $H_1 = 0.5$ | МГСЕ | 3.756 | 7.012 | 10.176 | 13.328 |
| | [129] | 3.759 | 7.010 | 10.173 | 13.324 |
| $H_1 = 0.9$ | МГСЕ | 2.278 | 6.200 | 9.609 | 12.810 |
| | [129] | 2.286 | 6.197 | 9.608 | 12.808 |

Результати, отримані двома підходами, добре узгоджені.

Три перші форми коливань рідини для $\alpha = 0$ наведені на рис. 3.10.

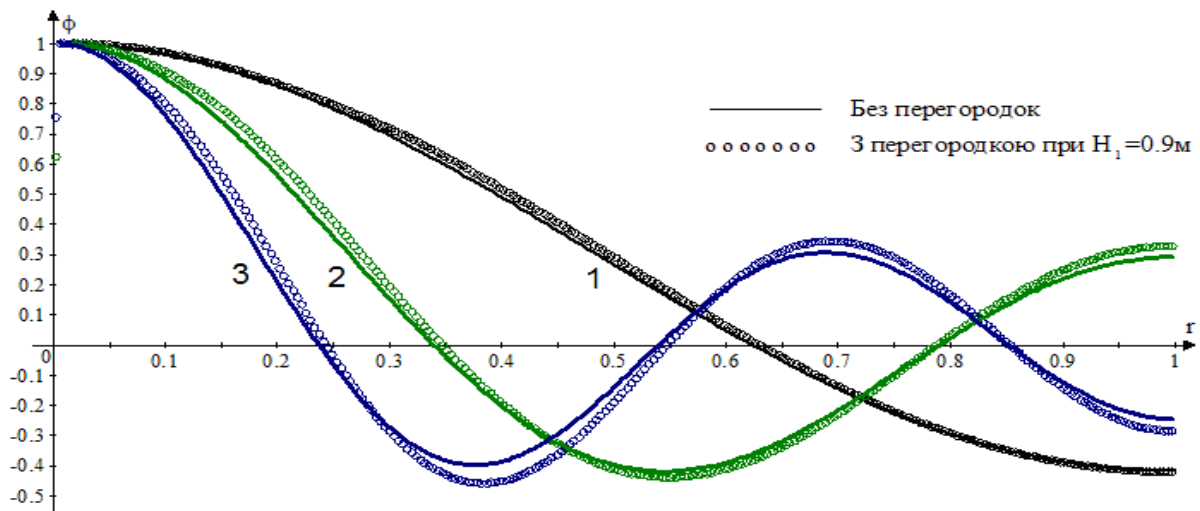


Рисунок 3.10 – Форми коливань рідини в циліндричному резервуарі

Дані, наведені на рис. 3.10, відповідають $R_{\text{int}} = 0.2$ м і висоті розміщення перегородки $H_1 = 0.9$ м. Тут номери 1, 2, 3 відображають першу, другу і третю форми коливань. Встановлення перегородки з параметрами $R_{\text{int}} = 0.2$ м, $H_1 = 0.9$ м приводить до максимального зменшення частот. Звернувши увагу на рис. 3.10, можна зробити висновок, що коливання вільної поверхні рідини у резервуарах з перегородками схожі з формами коливань для аналогічних резервуарів без перегородок. Розглянемо $\alpha = 1$. У цьому випадку значення μ_k є коренями такого рівняння [136]:

$$J_1'(x) = 2(J_0(x) - J_2(x)).$$

В таблиці 3.11 наведені числові значення частотного параметру коливань рідини для вузлових діаметрів $H = 0$ та $H = 1.0$ м. Числові результати, отримані запропонованим методом граничних суперелементів, порівнюються з даними, отриманими за допомогою формул (3.23).

Також були отримані частоти вільних коливань рідини при $\alpha = 1$ і різних висотах встановлення перегородок, а саме $H_1 = 0.5$ м, $H_1 = 0.9$ м та при

$R_{int} = 0.7$ м. Порівняння результатів, отриманих запропонованим методом, та аналітично орієнтованим підходом, запропонованим Гаврилюком І. із співавтори в [129], наведено в табл. 3.12.

Таблиця 3.11 – Аналітичні та числові результати для $\omega^2 = \frac{\chi^2}{g}$ при $\alpha = 1$

| Форми коливань | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
|------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Метод суперелементів | 1.750 | 5.332 | 8.538 | 11.709 | 14.870 |
| Аналітичний розв'язок (3.23) | 1.750 | 5.331 | 8.536 | 11.706 | 14.864 |

Таблиця 3.12 – Порівняння аналітичних та чисельних результатів ($\alpha = 1$)

| Положення перегородки | Метод | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ |
|-----------------------|----------------|---------|---------|---------|---------|
| $H_1 = 0.5$ м | суперелементів | 1.3663 | 5.2941 | 8.5359 | 11.7097 |
| | [129] | 1.3662 | 5.2940 | 8.5357 | 11.7092 |
| $H_1 = 0.9$ м | суперелементів | 0.7078 | 4.5066 | 8.1947 | 11.5556 |
| | [129] | 0.7079 | 4.5068 | 8.1945 | 11.5550 |

Три перші форми коливань рідини зображені на рис. 3.11. Ці дані відповідають наявності кільцевої перегородки з $R_{int} = 0.2$ м і висотою розміщення $H_1 = 0.9$ м.

Цифри 1, 2, 3 відповідають першій, другій та третій формам коливань рідини. Результати демонструють, що форми коливань рідини в резервуарі без перегородки при $\alpha = 1$ значно відрізняються від даних для $\alpha = 0$.

Отримані результати можуть бути використані для проектування резервуарів з рідиною, які піддаються зовнішнім впливам.

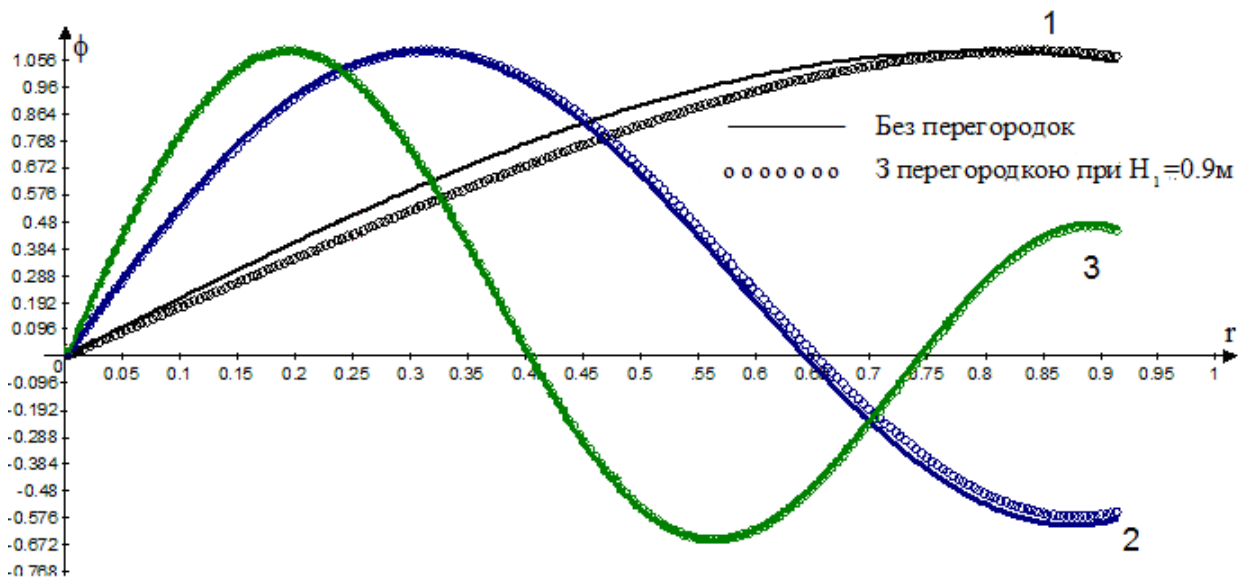


Рисунок 3.11 – Форми коливань рідини в циліндричному резервуарі, $\alpha = 1$

3.5 Вільні коливання рідини в циліндричних резервуарах з вертикальними перегородками

Розглянуто вільні коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з радіусом R і з двома вертикальними перегородками. Схема резервуара наведена на рис. 3.12 б).

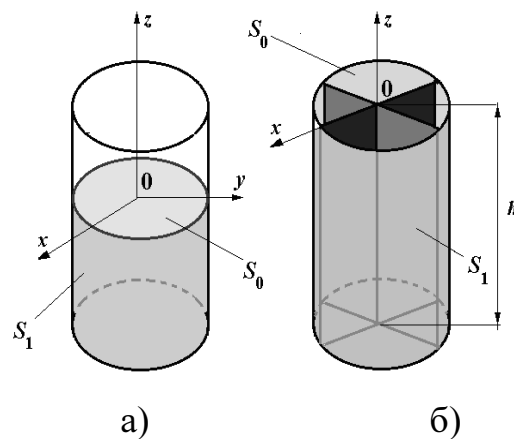


Рисунок 3.12 – Циліндричні резервуари з рідиною

Нехай S_1 є змоченою поверхнею оболонки, а S_0 – вільною поверхнею рідини. Зауважимо, що для циліндричного резервуару з вертикальними перегородками будемо мати

$$S_1 = \left\{ z = 0 \cup r = R \cup \theta = 0 \cup \theta = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Крайова задача для визначення потенціалу швидкостей φ та функції ζ , яка описує форми коливань вільної поверхні рідини, сформульовано так:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \theta=\frac{\pi}{2}}} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Додаємо для однозначної розв'язності задачі (3.43) додаткову умову (3.8).

З використанням інтегрального співвідношення (3.30) отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (3.32) в якій вважаємо, що $l=2$. Після розв'язання задачі (3.35) отримаємо власні частоти та форми коливань резервуара з вертикальними перегородками.

Для $\alpha=1$ маємо $\omega_{11} = 5.461$, $\omega_{12} = 8.11$, $\omega_{13} = 9.889$, $\omega_{14} = 11.45$. Якщо перегородки відсутні, то значення частот є такими: $\omega_{11} = 4.14$, $\omega_{12} = 7.22$; $\omega_{13} = 9.14$, $\omega_{14} = 10.7$. Таким чином, встановлення вертикальних перегородок приводить до збільшення найменших частот.

У таблиці 3.13 для порівняння наведені частоти коливань рідини в циліндричних оболонках з вертикальними перегородками та без перегородок

Таблиця 3.13 – Частоти коливань рідини в оболонках

| № | Тип оболонки | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ |
|---|-------------------------|--------|--------|---------|---------|
| 0 | Без перегородки | 6.1248 | 8.2919 | 9.98475 | 11.4295 |
| | Вертикальна перегородка | 6.1248 | 8.2919 | 9.98475 | 11.4295 |
| 1 | Без перегородки | 4.1424 | 7.2286 | 9.14726 | 10.7120 |
| | Вертикальна перегородка | 5.4582 | 8.1067 | 9.87918 | 12.6574 |

Перша, друга та третя форми коливань вільної поверхні при $\alpha = 1$ зображені на рис. 3.12, 3.13 відповідно.

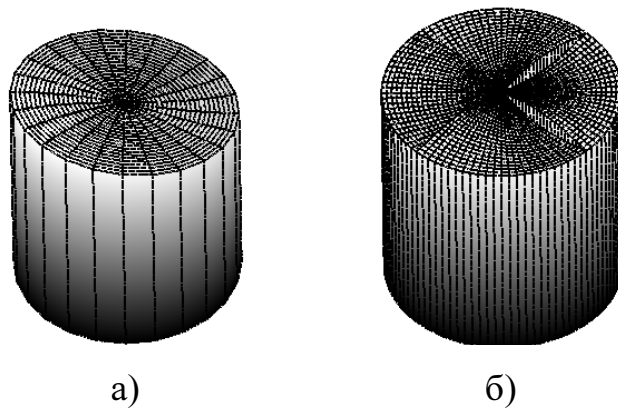


Рисунок 3.12 – Перша форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках

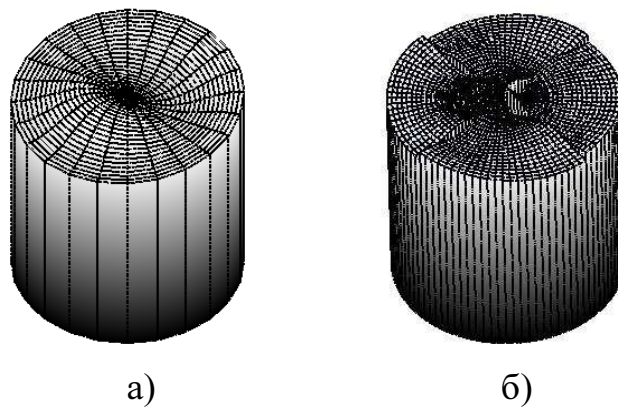


Рисунок 3.13 – Друга форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках

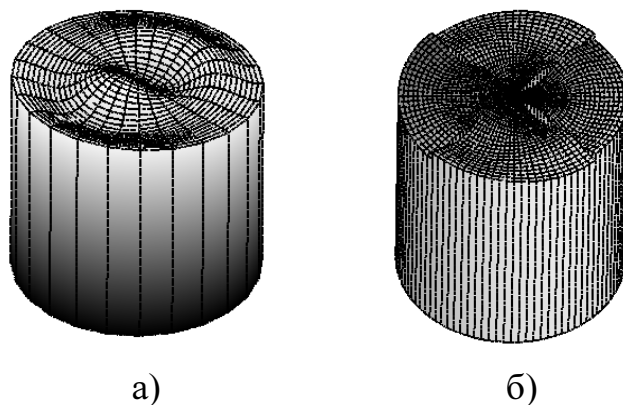


Рисунок 3.14 – Третя форма коливань вільної поверхні рідини в циліндричних оболонках

Рисунки 3.12 а) – 3.14 а) відповідають коливанням рідини в циліндричній оболонці без перегородок, а рисунки 3.12 б) – 3.14 б) – оболонці з вертикальними перегородками.

3.6 Вільні коливання рідини в складених резервуарах

3.6.1 Вільні коливання рідини в циліндрично-конічних резервуарах

Розглянуто задачу про коливання рідини в складеній оболонці обертання, яка має циліндричну і конічну частини. Позначимо змочену частину поверхні оболонки як S_1 , а вільну поверхню як S_0 . Припустимо, що декартова система координат $Oxyz$ зв'язана з оболонкою, вільна поверхня співпадає з площиною $z = H$ в стані спокою (рис. 3.15). Рідина є нестисливою та нев'язкою, рух рідини безвихровий, розглядаються лише малі коливання (використовується лінійна теорія). Задачу визначення частот і форм вільних коливань складеного резервуару зводимо до розв'язання проблеми власних значень (3.35).

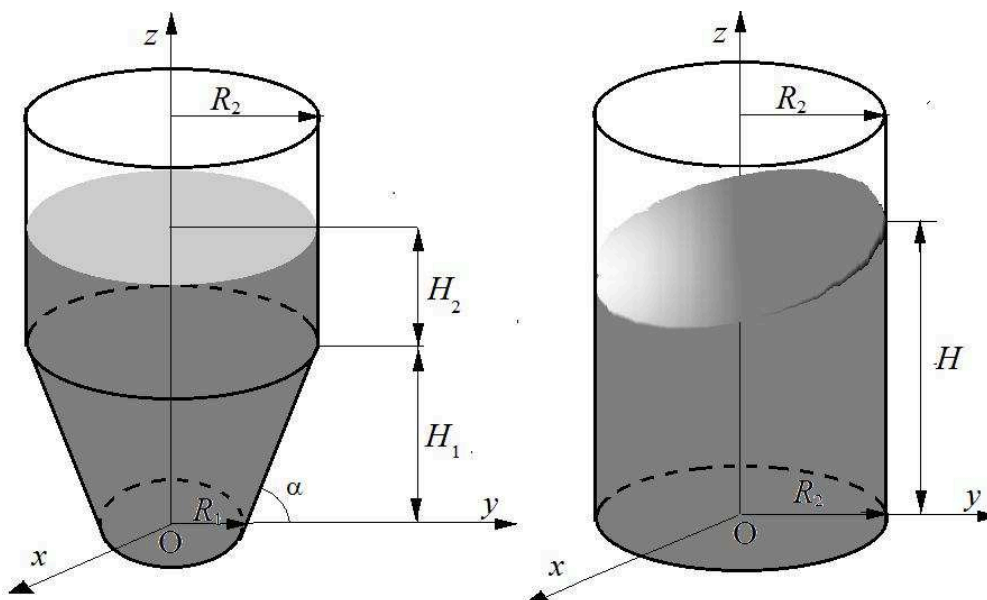


Рисунок 3.15 – Циліндрична та циліндрично – конічна оболонки обертання з рідиною

Далі наведено аналіз числових результатів.

Розглядаються циліндричні і циліндрично-конічні оболонки, зображені на рис. 3.16. Тут R_1 та R_2 – менший і більший радіус конічної частини, R_2 – це також радіус циліндра, $\theta = 90^\circ - \alpha$, α – половина кута при вершині конуса, що створює конічну частину, H – рівень заповнення рідиною, H_1 і H_2 висоти конічної і циліндричної частин, $H = H_1 + H_2$. Обидві оболонки віднесені до циліндричної системи координат (x, y, z) . Для всіх подальших обчислень кут $\alpha = 60^\circ$, $\frac{H_1}{R_2} = 1.0$, $R_1 = 0.5$ м і $H_1 = 1$ м. Для H_2 розглядаємо такі значення: $H_2 = 1$ м, 0.5 м, 0.25 м та 0.1 м.

Для обох оболонок далі оцінюємо частоти плескань.

По-перше, визначаємо необхідну кількість граничних елементів для знаходження власних частот із заданою точністю. Точність $\varepsilon = 10^{-3}$ досягається, коли кількість граничних елементів вздовж стінки оболонки дорівнює 120, вздовж радіусу днища 120 і вздовж радіусу вільної поверхні також 120.

Частоти плескань обчислені з використанням варіанту МГЕ, що описаний в роботі [67]. Нижче показано, що частоти плескань для жорсткої конічної (С) і циліндрично-конічної (СС) оболонок дуже близькі, якщо $H_1 = H_2 = 1$ м, $H = 2$ м. Порівняння результатів для $m = 0$ (аксіально-симетричних форми коливань) і для різних n наведено в таблиці 3.14.

Таблиця 3.14 – Частоти аксіально-симетричних плескань, Гц

| Тип оболонки і метод | n | | | | | | |
|--------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| С, числовий розв'язок | 6.13 | 8.30 | 9.99 | 11.44 | 12.71 | 13.9 | 14.98 |
| С, аналітичний розв'язок | 6.13 | 8.29 | 9.99 | 11.43 | 12.71 | 13.87 | 14.94 |
| СС, числовий розв'язок | 6.13 | 8.3 | 9.99 | 11.44 | 12.71 | 13.9 | 14.98 |

Тут числові розв'язки отримано за допомогою запропонованого методу граничних елементів [67]. Для порівняння і верифікації використаний аналітичний розв'язок R. Ibrahim [36], який виражається формулою (3.23).

Дані таблиці 3.13 показують незначну різницю між частотами циліндричної і циліндрико-конічної оболонок при заданих параметрах. Отримані результати також підтверджують точність запропонованого чисельного методу. Це впливає з хорошого узгодження аналітичного і числового розв'язків.

На рис. 3.16 показані перші форми аксіально-симетричних коливань рідини ($n = 1, 2, 3$) в циліндричній оболонці.

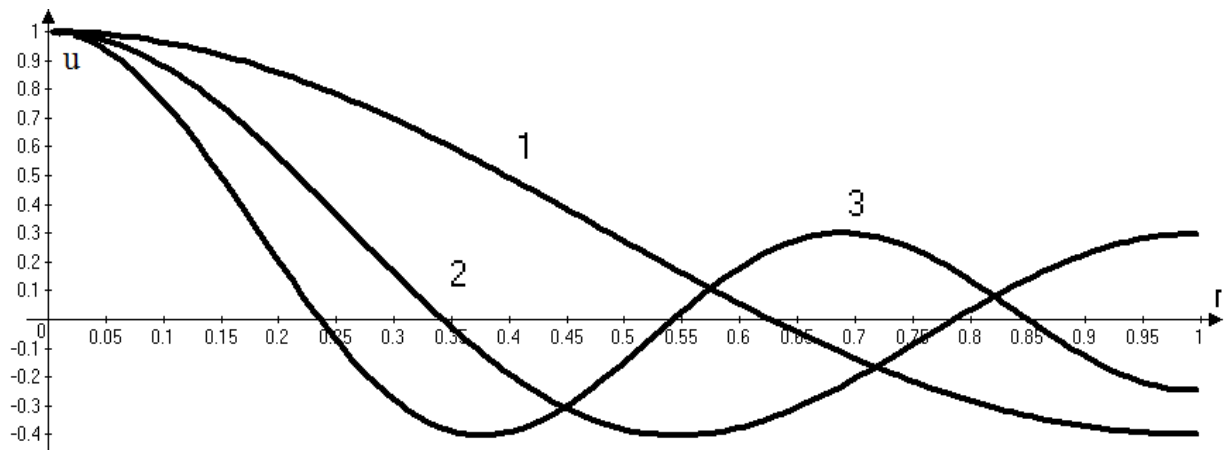


Рисунок 3.16 – Аксіально-симетричні форми коливань рідини $n = 1, 2, 3$ в циліндричній оболонці

Тут і далі цифри 1, 2, 3 на рисунках відповідають 1, 2 і 3 формам плескань рідини. Далі порівнюємо частоти аксіально-симетричних коливань для $m = 1, 2, 3$ і різних n для циліндричної (С) і циліндрико-конічної (СС) оболонок. Результати наведені в таблиці 3.15.

Таблиця 3.15 – Частоти неосисиметричних коливань рідини, Гц

| m | Тип оболонки | n | | | | | | |
|-----|--------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | С | 4.24 | 7.23 | 9.16 | 10.72 | 12.08 | 13.31 | 14.43 |
| | СС | 4.23 | 7.23 | 9.16 | 10.72 | 12.08 | 13.31 | 14.43 |
| 2 | С | 5.47 | 8.11 | 9.89 | 11.37 | 12.67 | 13.85 | 14.93 |
| | СС | 5.47 | 8.11 | 9.89 | 11.37 | 12.67 | 13.85 | 14.93 |
| 3 | С | 6.41 | 8.87 | 10.55 | 11.97 | 13.22 | 14.36 | 15.41 |
| | СС | 6.41 | 8.87 | 10.55 | 11.97 | 13.22 | 14.36 | 15.41 |

На рис. 3.17 показані три перших невісесиметричних форм плескань для $\alpha = 1$.

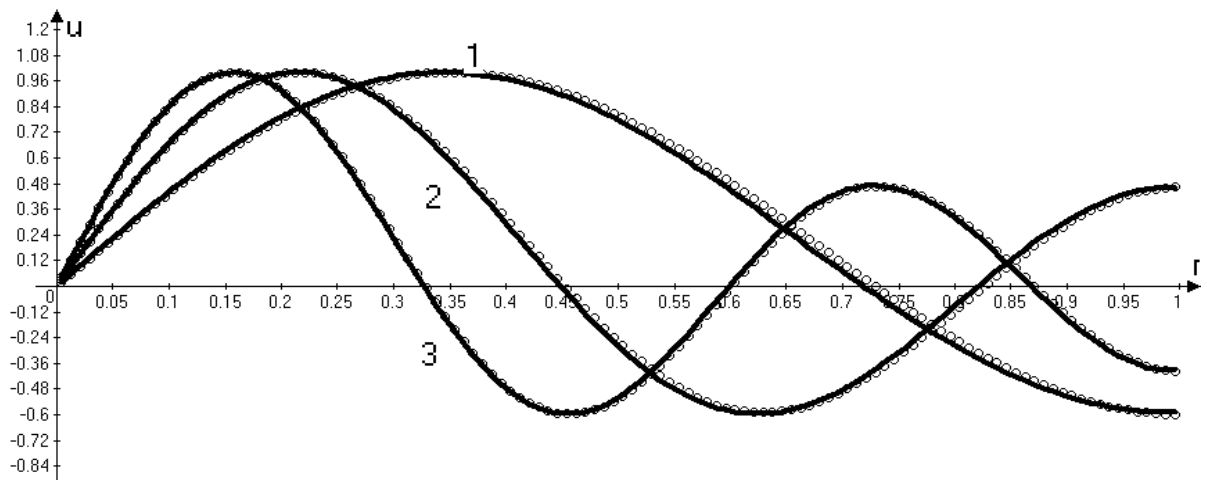


Рисунок 3.17 – Невісесиметричні форми плескань для $m = 1$

Тут та надалі суцільні лінії відповідають формам циліндричної оболонки, крапками позначені дані, що відповідають складеній оболонці.

На рис. 3.17 зображені три перших невісесиметричні форми плескань для $\alpha = 2$.

Відзначимо, що форми плескань практично однакові для двох розглянутих типів оболонок.

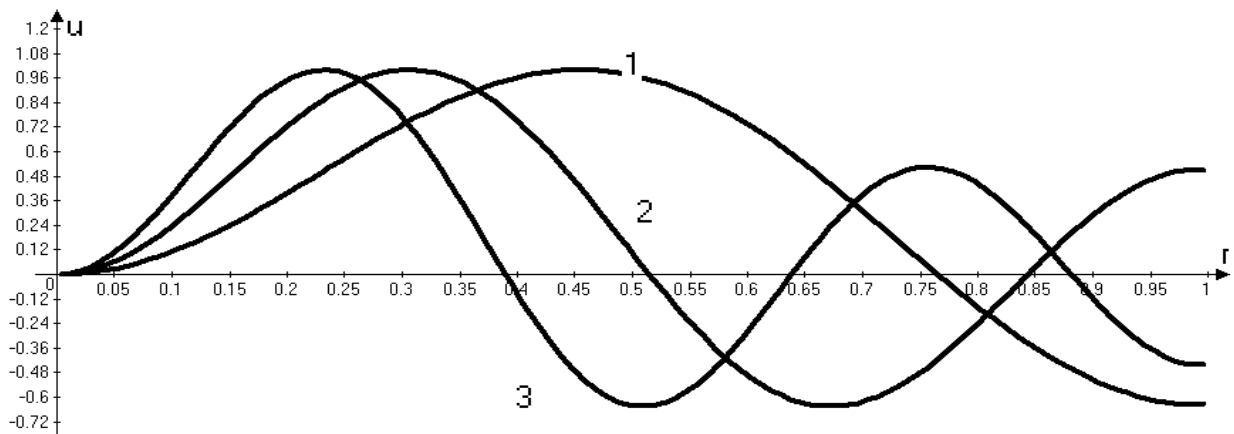


Рисунок 3.18 – Невісесиметричні форми плескань для $m = 2$

На перший погляд, здається, що можливо розглядати циліндричні оболонки замість циліндрико-конічних, якщо оболонки мають рівні висоти і радіуси верхньої частини. Насправді, результати демонструють, що частоти і форми коливань

обох оболонок розрізняються незначно. Але подальший чисельний експеримент довів істотно різний характер зміни частот зі зменшенням висоти H_2 (рис. 3.15).

В таблиці 3.16 наведено порівняння частот плескань циліндричної і циліндрико-конічної оболонок при $H_2 = 1$ м, 0.5 м, 0.25 м, 0.1 м. Тут розглядаємо $m = 1$, тому що нижчі частоти відповідають саме цьому хвильовому числу.

Таблиця 3.16 – Частоти невісесиметричних коливань рідини, Гц, $m = 1$

| H_2 , м | Тип оболонки | n | | | | | | |
|-----------|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1.0 | С | 4.2474 | 7.2352 | 9.1573 | 10.726 | 12.089 | 13.312 | 14.433 |
| | СС | 4.2346 | 7.2352 | 9.1573 | 10.726 | 12.089 | 13.312 | 14.433 |
| 0.5 | С | 4.1455 | 7.2305 | 9.1531 | 10.721 | 12.083 | 13.306 | 14.425 |
| | СС | 4.2270 | 7.2317 | 9.1531 | 10.721 | 12.083 | 13.306 | 14.425 |
| 0.25 | С | 4.0001 | 7.2146 | 9.1491 | 10.718 | 12.081 | 13.303 | 14.423 |
| | СС | 4.1993 | 7.2301 | 9.1515 | 10.719 | 12.081 | 13.303 | 14.423 |
| 0.1 | С | 3.8311 | 7.1538 | 9.1203 | 10.704 | 12.073 | 13.299 | 14.420 |
| | СС | 4.1691 | 7.2294 | 9.1507 | 10.718 | 12.080 | 13.303 | 14.421 |

На рис. 3.19 зображені невісесиметричні форми коливань рідини в складеному циліндрико-конічному резервуарі.

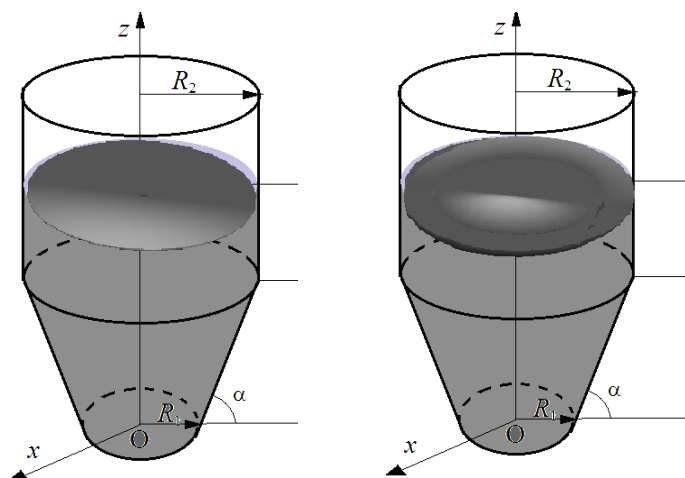


Рисунок 3.19 – Перша і друга неосесиметричні форми коливань вільної поверхні

Отримані результати дозволяють зробити висновок про те, що зі зменшенням висоти H_2 відмінність між частотами плескань для циліндричної і циліндрико-конічної оболонок стає більш відчутною. Ця різниця помітна навіть при великих n . Однак форми коливань відрізняються несуттєво, про що свідчать дані, наведені на рис. 3.18 та 3.19. Нижча частота для обох оболонок відноситься до форми $m = 1$.

3.6.2 Вільні коливання рідини в циліндрико-сферичних резервуарах

У цьому підрозділі вивчено вплив форми днища на частоти і форми коливань рідини в резервуарах, зображених на рис. 3.20. Розглянуто циліндрична, циліндрико-конічна і циліндрико-сферична оболонки.

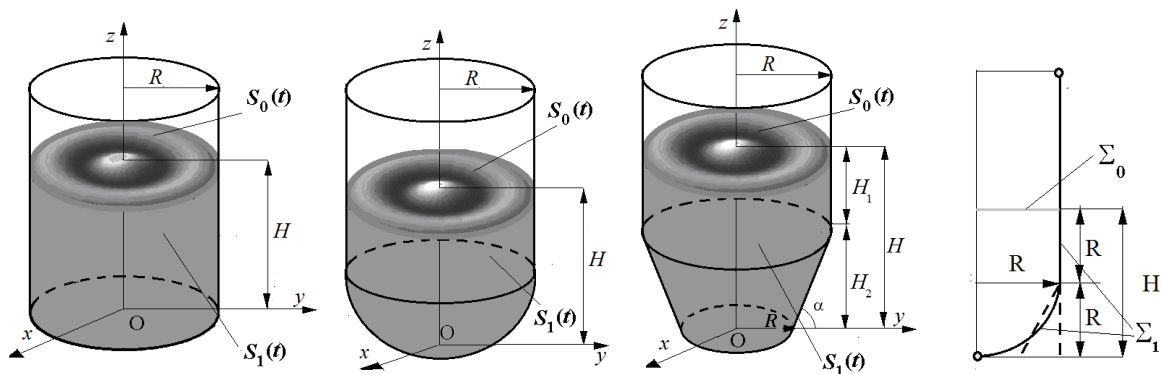


Рисунок 3.20 – Складені оболонки обертання з рідиною

Методом граничних елементів, описаним в підрозділі 3.3, отримані частоти і форми коливань рідини в складених оболонках обертання.

В таблиці 3.16 наведені частоти осесиметричних коливань рідини для різних оболонок при наступних параметрах: $H = 2$ м, $H_1 = H_2 = 1$ м, $R = 1$ м, $\alpha_0 = 60^\circ$.

В таблиці 3.17 наведені частоти невісесиметричних коливань для оболонок, зображених на рис. 3.21.

В таблицях 3.17 та 3.18 використані наступні позначення: С – циліндрична оболонка з плоским дном, СС – циліндрико-конічна оболонка, СС – цилінд-

рико-сферична оболонка.

Таблиця 3.17 – Частоти вісесиметричних плескань, Гц

| Тип оболонки | <i>n</i> | | | | | | |
|--------------|----------|------|------|-------|-------|------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| C | 6.13 | 8.3 | 9.99 | 11.44 | 12.71 | 13.9 | 14.98 |
| CC | 6.13 | 8.3 | 9.99 | 11.44 | 12.71 | 13.9 | 14.98 |
| CS | 6.13 | 8.29 | 9.99 | 11.44 | 12.71 | 13.9 | 14.98 |

Таблиця 3.18 – Частоти невісесиметричних коливань рідини, Гц

| <i>m</i> | Тип оболонки | <i>n</i> | | | | | | |
|----------|--------------|----------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | C | 4.24 | 7.23 | 9.15 | 10.72 | 12.08 | 13.31 | 14.43 |
| | CC | 4.2346 | 7.2352 | 9.1573 | 10.72 | 12.08 | 13.31 | 14.43 |
| | CS | 4.2323 | 7.2331 | 9.1542 | 10.71 | 12.07 | 13.3 | 14.35 |
| 2 | C | 5.4733 | 8.1148 | 9.8966 | 11.37 | 12.67 | 13.85 | 14.93 |
| | CC | 5.4718 | 8.1148 | 9.8966 | 11.37 | 12.67 | 13.85 | 14.93 |
| | CS | 5.4622 | 8.0914 | 9.8136 | 11.32 | 12.55 | 13.61 | 14.9 |
| 3 | C | 6.4197 | 8.8719 | 10.558 | 11.97 | 13.22 | 14.36 | 15.41 |
| | CC | 6.4195 | 8.8719 | 10.558 | 11.97 | 13.22 | 14.36 | 15.41 |
| | CS | 6.4089 | 8.8601 | 10.055 | 11.49 | 13.11 | 14.36 | 15.41 |

На рис. 3.21 показані перші форми вісесиметричних коливань рідини, а на рис. 3.22 перші форми невісесиметричних коливань, що відповідають першій гармоніці.

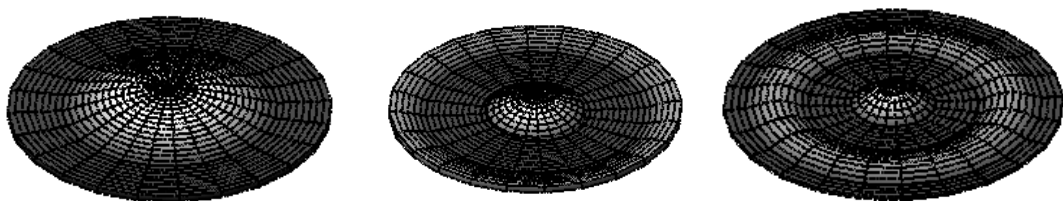


Рисунок 3.21 – Перші форми вісесиметричних коливань вільної поверхні

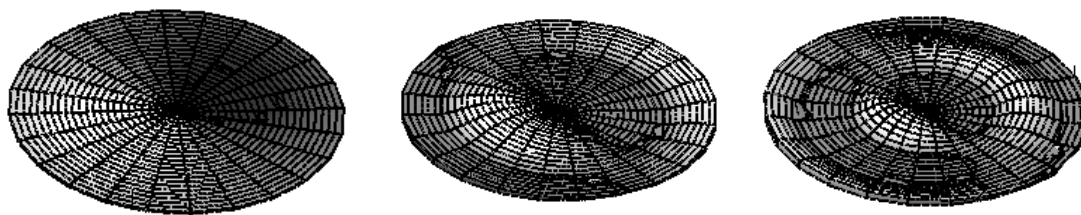


Рисунок 3.22 – Перші форми невісесиметричних коливань вільної поверхні

Відзначимо, що при вибраних параметрах оболонок як частоти, так і форми коливань достатньо близькі. Це свідчить про те, що форма днища при таких параметрах несуттєво впливає на частоти і форми коливань, визначальним фактором є рівень заповнення оболонок H .

Висновки за розділом 3

1. Побудовані математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах. Для визначення частот та форм коливань рідини застосовані методи відокремлення змінних, методи граничних елементів та суперелементів. За допомогою метода відокремлення змінних вивчені плескання рідини в призматичному резервуарі без перегородок та з вертикальними хрестовими перегородками, отримані частоти та форми коливань для горизонтального циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною.

2. Методи граничних інтегральних рівнянь та граничних елементів використано при обчисленні динамічних характеристик рідини в жорстких циліндричних резервуарах як без перегородок так і за наявності горизонтальних або вертикальних перегородок. Метод граничних суперелементів використано при дослідженні коливань рідини в циліндрико-конічних та циліндрико-сферичних оболонках. Встановлено, що наявність горизонтальних перегородок призводить до зменшення частот коливань вільної поверхні рідини, в той час, як наявність вертикальних перегородок веде до збільшення частот.

3. Дана оцінка частот і форм вільних коливань рідини в жорстких циліндричних і циліндрико-конічних оболонках з урахуванням дії сили тяжіння. Зада-

чу розв'язано з використанням редукованого (одновимірного) методу граничних елементів. Цей метод істотно скорочує час розрахунків і відкриває нові якісні можливості для моделювання динамічної поведінки оболонкових конструкцій. Різниця між частотами плескань для циліндричної і циліндрико-конічної оболонками є істотною лише при наявності невеликої циліндричної частини в складеній оболонці. Ця різниця стає суттєвою, коли враховуються ефекти пружності. Нижча частота відповідає невісесиметричній моді при ($m = 1$) для обох оболонок. Припущення про можливість заміни складеної циліндрико-конічної оболонки циліндричною оболонкою рівної висоти прийнятно для аналізу частот плескань, якщо циліндрична частина складеної оболонки досить протяжна.

4. Програма для розрахунку вільних коливань рідини в оболонці знаходиться у додатку В.

Результати цього розділу відображені в роботах автора [131, 132, 150, 155, 158, 159, 161].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [36, 67, 70, 73, 76, 117, 121, 127 – 129, 136].

4 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З РІДИНОЮ

Коливання рідин у жорстких резервуарах класифікуються за методом їх збудження. Коливання називаються вимушеними, якщо динамічна система піддається періодичному зовнішньому збудженню, яке може виражатися в диференціальних рівняннях як окремий член, заданий періодичною функцією часу. Коливання рідини називаються параметричними, якщо їх збуджує періодична зміна деякого параметра динамічної системи.

4.1 Вимушені коливання рідини в призматичних резервуарах

Розглянемо призматичний резервуар, зображений на рис. 3.1. Припустимо, що в початковий момент часу рідина у резервуарі знаходилася в стані спокою. На резервуар діють навантаження у вертикальному і горизонтальному напрямках. Складаємо систему диференціальних рівнянь руху рідини, отриману з динамічної граничної умови на вільній поверхні

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0, \quad (4.1)$$

де

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H), \quad \zeta = \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}(x, y, H). \quad (4.2)$$

Зауважимо, що власні частоти призматичного резервуара отримуються за формулою

$$\omega_{ij} = \sqrt{g \lambda_{ij} \tanh(\lambda_{ij} H)}, \quad \lambda_{ij} = \sqrt{\left(\frac{\pi i}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{2b}\right)^2}.$$

Підставивши рівняння (4.2) в (4.1), отримаємо

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H) + a_x(t)x + (g + a_z(t)) \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}(x, y, H) = 0. \quad (4.3)$$

Зауважимо, що на вільній поверхні виконується рівність

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = \frac{\sinh(\lambda_{ij}z) \lambda_{ij}}{\cosh(\lambda_{ij}H)} \varphi_{ij}(x, y).$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_{01}(x, y, H) &= E_1 \sin \frac{\pi y}{2b}, & \varphi_{10}(x, y, H) &= E_2 \sin \frac{\pi x}{2a}, \\ \varphi_{11}(x, y, H) &= E_3 \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}, & \varphi_{02}(x, y, H) &= E_4 \cos \frac{\pi y}{b}, & \varphi_{20}(x, y, H) &= E_5 \cos \frac{\pi x}{a}, \\ \varphi_{21}(x, y, H) &= E_6 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{2b}, & \varphi_{12}(x, y, H) &= E_7 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \varphi_{22}(x, y, H) &= E_8 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що при $z = H$ матимемо

$$\Phi_n(x, y, H) = \frac{1}{ab} \varphi_{ij}(x, y), \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = \frac{1}{g} \omega_n^2 \Phi_n.$$

Після скалярного множення рівняння (4.3) на функції $\Phi_l(x, y, H)$ отримаємо таку систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$ab \ddot{c}_l(t) + a_x(t)(x, \Phi_l) + \omega_l^2 (g + a_z(t)) abc_l(t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4)$$

Зазначимо, що скалярний добуток $(x, \Phi_l) = 0$ для всіх мод, за винятком $i = 2$. Тому ми розглядаємо такі вихідні дані:

$$c_i(0) = 0, \quad \dot{c}_i(0) = 0, \quad i = 1, 3, 4, \dots, \quad c_2(0) = 0, \quad \dot{c}_2(0) = 0.05. \quad (4.5)$$

Далі одержимо таке диференціальне рівняння

$$ab\ddot{c}_2(t) + a_1 \cos \Omega_1 t(x, \Phi_2) + \omega_2^2(g + a_2 \cos \Omega_2 t)c_2(t) = 0. \quad (4.6)$$

Розглянемо коливання рідини в призматичному резервуарі з такими параметрами: $a = b = 1$ м. Будемо вивчати коливання, які відповідають $\omega_2 = 3.75$ Гц при різних значеннях $a_1, a_2, \Omega_1, \Omega_2$. Тобто будемо вивчати одночасну дію горизонтального та вертикального збуджень. Результати розрахунків подані на рис. 4.1 – 4.4 у вигляді фазових портретів.

На рис. 4.1 показані фазові портрети, тобто залежності $(\zeta, \dot{\zeta})$ для горизонтального та вертикального збуджень: рис. 4.1 а) відповідає значенням $a_1 = 0, a_2 = 0.1$, що відображає тільки вертикальне навантаження; рис. 4.1 б) відповідає горизонтальному збудженню, $a_1 = 0.1, a_2 = 0, \Omega_1 = 0.012$ Гц; рис. 4.1 в) відповідає взаємній дії горизонтальних і вертикальних збуджень із зазначеними вище параметрами. Нестабільні процеси коливань відображені на рис. 4.1 а) і в), але втрата стійкості, завдяки взаємній дії горизонтальних і вертикальних навантажень відбувається швидше за часом.

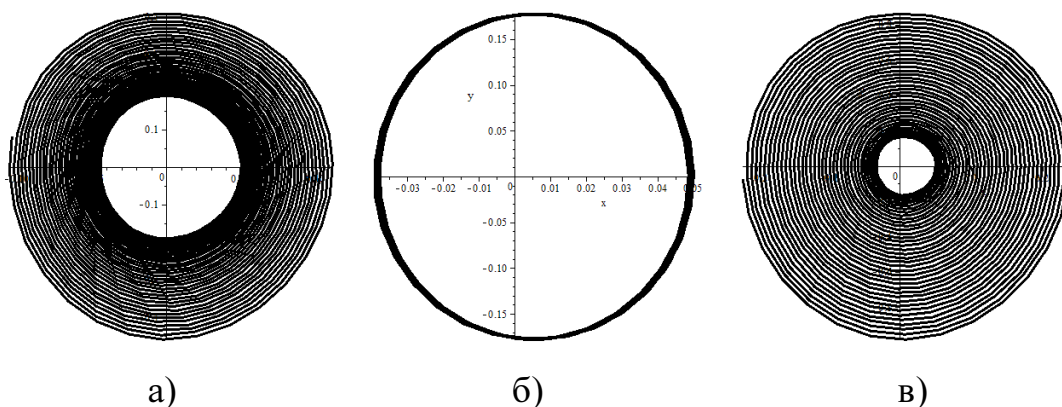


Рисунок 4.1 – Фазові портрети коливань рідини в призматичному резервуарі протягом 60 с

Рис. 4.2 а) відповідає значенням $a_1 = 0, a_2 = 0.1$, що характеризують тіль-

ки вертикальне навантаження; рис. 4.2 б) відповідає значенням $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$, $\Omega_1 = 0.0012$ Гц, що характеризують тільки горизонтальне навантаження; рис 4.2 в) відображає фазові портрети при взаємній дії горизонтальних і вертикальних збуджень із зазначеними вище параметрами. При цих даних процес коливань відбувається без втрати стійкості.

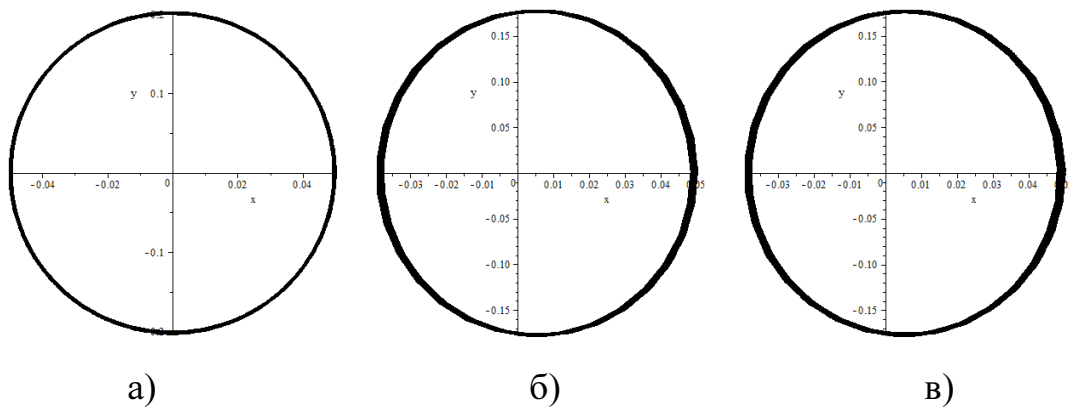


Рисунок 4.2 – Фазові портрети для $\Omega_2 = 3.75$ Гц протягом 60 с

Рис. 4.3 а) відповідає значенням $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$, що характеризують тільки вертикальне навантаження; рис. 4.3 б) відповідає значенням $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$, $\Omega_1 = 7.4$ Гц і описує горизонтальне навантаження; рис 4.3 в) відповідає взаємній дії горизонтальних і вертикальних збуджень із зазначеними вище параметрами. Тут процес коливань нестабільний, а наявність вертикального збудження не має істотного значення.

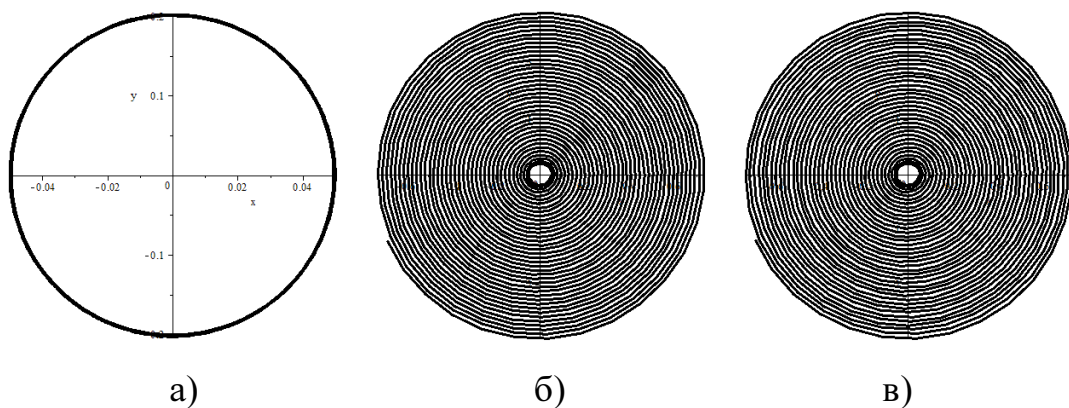


Рисунок 4.3 – Фазові портрети для $\Omega_1 = 7.4$ Гц, $\Omega_2 = 3.75$ Гц протягом 60 с

Рис. 4.4 а) з параметрами $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$ відповідає вертикальному наван-

таженню; рис. 4.4 б) відповідає значенням $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$, $\Omega_1 = 0.0012$ Гц, що характеризують вертикальне навантаження; рис. 4.4 в) відповідає взаємній дії горизонтальних і вертикальних збуджень із зазначеними вище параметрами. Тут вібраційний процес нестабільний, а горизонтальне збудження не має істотного значення. При цьому на частоті $\Omega_2 = 7.5$ Гц відбувається параметричний резонанс.

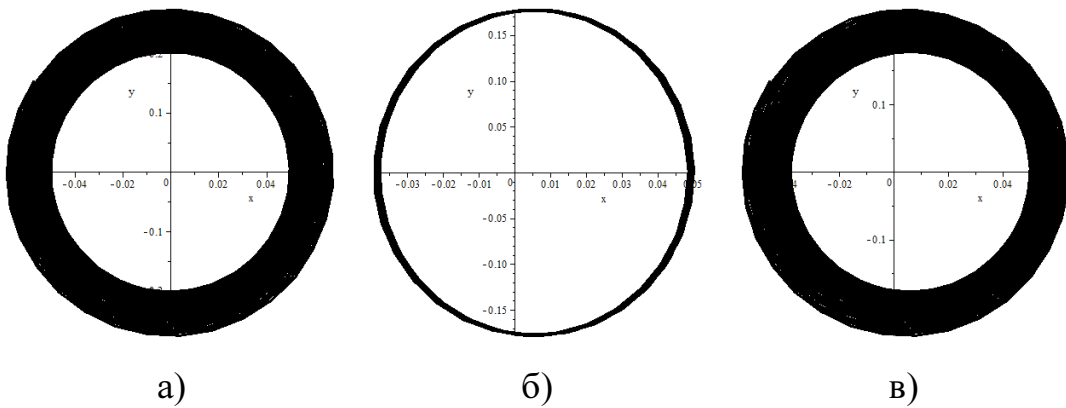


Рисунок 4.4 – Фазові портрети для $\Omega_1 = 0.0012$ Гц, $\Omega_2 = 7.5$ Гц протягом 60 с

Рис. 4.5 а) відповідає значенням $a_1 = 0$, $a_2 = 0.4$, що характеризують тільки вертикальне збудження; рис. 4.5 б) відповідає значенням $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0$, $\Omega_1 = 3.75$ Гц, що характеризує горизонтальне збудження; рис. 4.5 в) показує взаємну дію горизонтальних та вертикальних збуджень при частоті $\Omega_2 = 7.4$ Гц із зазначеними вище параметрами. Тут вібраційний процес нестабільний, важливі як вертикальні, так і горизонтальні збудження, спостерігається явище параметричного резонансу.

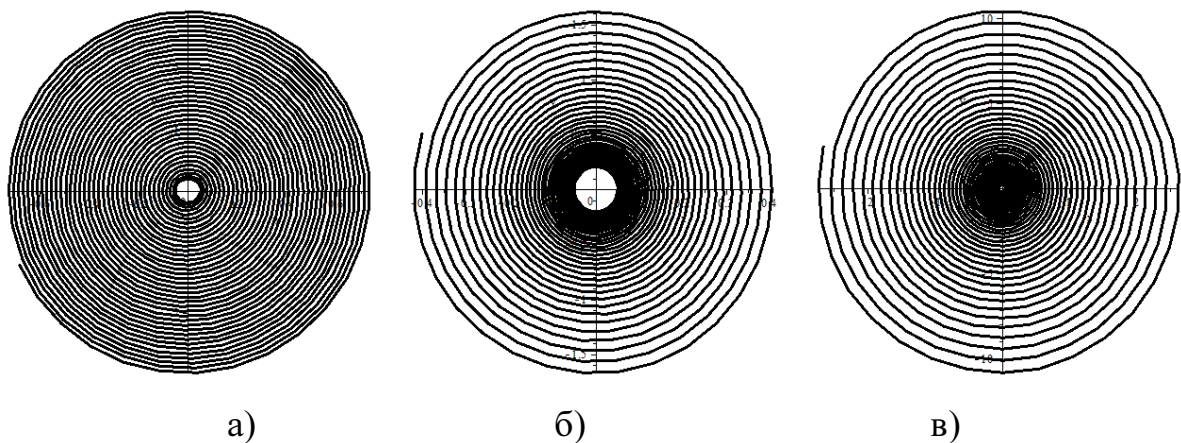


Рисунок 4.5 – Фазові портрети для $\Omega_1 = 3.75$ Гц, $\Omega_2 = 7.4$ Гц протягом 60 с

4.2 Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах

Використовуючи циліндричну систему координат (r, θ, z) , можна сформулювати крайову задачу для знаходження потенціалу швидкості Φ та функції, що характеризує підйом вільної поверхні в циліндричному резервуарі, що знаходиться під дією вертикальних та горизонтальних навантажень

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_w} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p - p_0|_{S_0} = 0, \quad (4.7)$$

$$p - p_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta \right]. \quad (4.8)$$

Розв'язок такої задачі подамо у такий спосіб. Для потенціалу Φ маємо подання

$$\Phi = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{k=1}^M \dot{d}_{nk}(t) \varphi_{nk}(r, z). \quad (4.9)$$

Для рівня підйому вільної поверхні ζ маємо таке подання:

$$\zeta = \frac{1}{g} \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{k=1}^M \chi_{nk}^2(t) d_{nk}(r, z) \varphi_{nk}(r, 0). \quad (4.10)$$

Умова розв'язності зазначеної крайової задачі – рівняння (3.8).

Вважаємо, що базисні функції φ_{nk} отримано. Підставимо їх у вирази (4.9) для потенціалу швидкості Φ та (4.10) для висоти підйому вільної поверхні ζ .

Використавши (4.8), приходимо до наступного співвідношення на поверхні S_0 :

$$\sum_{m=0}^1 \cos m\theta \sum_{k=1}^M \left[\ddot{d}_{nk}(t) + \chi_{nk}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{nk}(t) \right] \varphi(r, z) +$$

$$+r \cos n\theta a_x(t) = 0, \quad z = \zeta. \quad (4.11)$$

Виконав скалярне множення рівняння (4.11) на функції φ_{nl} ($n=0, 1, l=1, \overline{M}$) і використав ортогональність власних форм, отримуємо незв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{0k} = 0, \quad \ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 \left(1 - \frac{a_v \cos \omega_v t}{g} \right) d_{1k} + a_x(t) F_{1k} = 0, \\ F_{1k} = \frac{(r, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.12)$$

Для розв'язання системи (4.12) необхідно задати початкові умови. Задамо початкові умови так:

$$d_{0k}(0) = d_{0k}^0, \quad k = \overline{1, M}; \quad \dot{d}_{0k}(0) = d_{0k}^1, \quad k = \overline{1, M}; \quad (4.13)$$

$$d_{1k}(0) = d_{1k}^0, \quad k = \overline{1, M}; \quad \dot{d}_{1k}(0) = d_{1k}^1, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.14)$$

Спочатку окремо розглянемо горизонтальні та вертикальні навантаження, а далі дослідимо їх сумісну дію.

4.2.1 Коливання рідини в циліндричному резервуарі без перегородок та з горизонтальними перегородками під дією горизонтальних навантажень

Вважаємо, що $a_z(t) = 0$ в рівнянні для тиску рідини (4.8). Оскільки в циліндричній системі координат $x = r \cos \theta$, то нас будуть цікавити осесиметричні ($n=0$) і невісесиметричні ($n=1$) форми коливань у виразах (4.9), (4.10).

Початкові умови (4.14) з нульовими умовами (4.13) застосовуються у випадку чистого горизонтального збудження, якщо $a_z(t) = 0$.

Зазначимо, що система диференціальних рівнянь другого порядку для

оболонок з горизонтальними або вертикальними перегородками також має форму (4.12), але з іншими власними формами та частотами.

Надалі жорсткі кругові циліндричні оболонки з перегородками та без них розглядаються під дією горизонтального навантаження у вигляді

$$a_x(t) = a_h \cos \omega_h t. \quad (4.15)$$

Якщо резервуар піддається періодичному навантаженню (4.15), яке застосовується в горизонтальному напрямку, то розглядаються лише невісесиметричні коливання з $n=1$. Припустимо, що перед прикладенням горизонтального навантаження резервуар знаходився в стані спокою. Тому нам потрібно розв'язати систему (4.12) за нульових початкових умов. З рівняння (4.12) випливає, що за цих початкових умов можна отримати

$$d_{1k}(t) = \frac{a_h F_{1k}}{\chi_{1k}^2 - \omega_h^2} (\cos \omega_h t - \cos \chi_{1k} t), \quad F_{1k} = \frac{(r, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.16)$$

Для отримання висоти підйому вільної поверхні використовуємо рівняння (4.10). Зауважимо, що формули (4.16) придатні як для опису коливань оболонок з перегородками (горизонтальними або вертикальними), так і без них.

Переходимо до вивчення коливань рідини в циліндричному резервуарі без перегородок та з горизонтальними перегородками під дією горизонтальних навантажень. Спочатку визначимо необхідну кількість базисних функцій у рядах (4.9), (4.10) для потенціалу та рівня підйому вільної поверхні. Для всіх оболонок будемо вважати, що радіус $R = 1$ м, а рівень наповнення $H = 1$ м. Розглянемо оболонку без перегородок.

Припустимо, що резервуар піддається гармонічному горизонтальному збудженню, заданому рівнянням (4.15). Числове моделювання проводиться для різних частот вимушених коливань.

На рис. 4.6 а), б) показані залежності від часу рівня підняття вільної поверхні в точках $\rho = 0.5R$, $z = \zeta$ і $\rho = R$, $z = \zeta$ відповідно при $a_h = 0$, $\omega_h = 3$ рад/с,

$a_h = 0.1$ за перші 10 с руху.

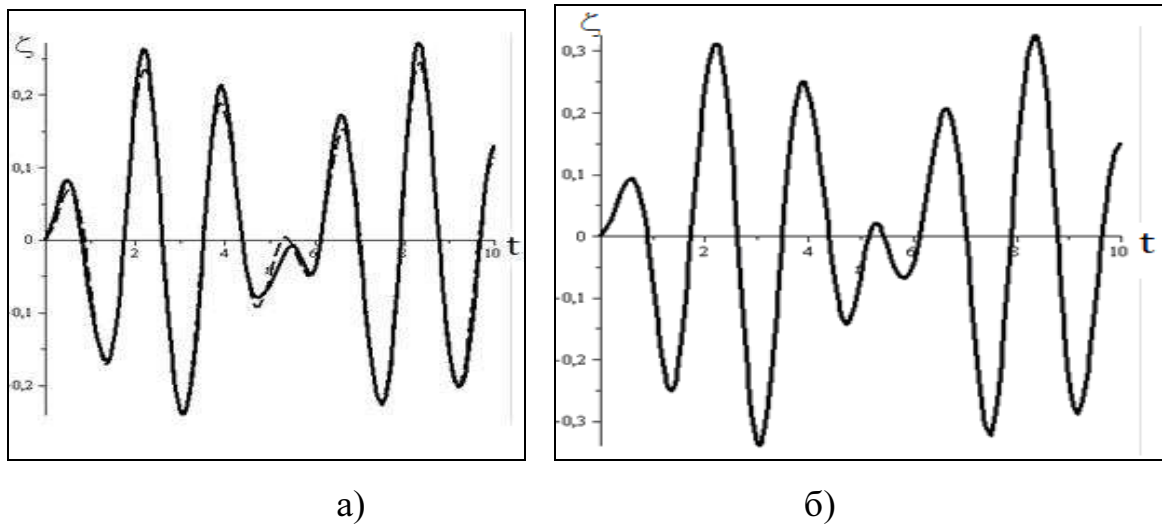


Рисунок 4.6 – Зміна підйому вільної поверхні з часом

Слід зазначити, що збіжність досягається, коли $M = 4$ у (4.9). На рис. 4.6 а) показані відмінності розв'язків при $M = 2$ (пунктирна лінія) і $M = 4$ (суцільна лінія). Результати для $M = 4$ і $M = 5$ практично співпали.

Далі вивчається вплив горизонтальних перегородок (рис. 3.9 а)). Проводиться тестування розробленого методу. Далі представлений тест Ванга (Wang) [29] для підтвердження збіжності запропонованого методу. Розглянуто жорсткий циліндричний резервуар з кільцевою перегородкою радіусу R_1 . Для цього контейнера під дією горизонтального збудження у [29] були обрані такі параметри: $R = 0.550$ м, $H = 0.550$ м. Частота горизонтального збудження (4.15) складає $\omega_h = 5.811$ рад/с, амплітуда збудження є $a_h = 0.001$ м.

Максимальна висота підйому вільної поверхні на стінці контейнера оцінюється при параметрах: $\frac{R_1}{R} = 0.4, 0.6, 0.8$ та $\frac{H_2}{R} = 0.1, 0.3, 0.8$ м. Biswal у [30] вивчав ту ж саму проблему, використовуючи метод скінченних елементів. Порівняння результатів, одержаних у [29], [30] та запропонованим МГЕ, наведено в таблиці 4.1.

Продемонстровано гарну узгодженість між результатами МГЕ та результатами Wang [29] та Biswal [30]. Рух рідини в циліндричній жорсткій ємності з

жорсткою перегородкою вивчається під горизонтальним навантаженням протягом перших 10 с.

Таблиця 4.1 – Максимальна висота підйому, м

| $\frac{H_2}{R}$ | $\frac{R_1}{R} = 0.4$ | | | $\frac{R_1}{R} = 0.6$ | | | $\frac{R_1}{R} = 0.8$ | | |
|-----------------|-----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|
| | МГЕ | [29] | [30] | МГЕ | [29] | [30] | МГЕ | [29] | [30] |
| 0.1 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0016 | 0.0034 | 0.0034 | 0.0036 | 0.0160 | 0.0158 | 0.0166 |
| 0.3 | 0.0050 | 0.0049 | 0.0051 | 0.0097 | 0.0095 | 0.010 | 0.0339 | 0.0330 | 0.0344 |
| 0.8 | 0.0388 | 0.0386 | 0.0390 | 0.0407 | 0.0405 | 0.0406 | 0.0413 | 0.0412 | 0.0411 |

Після виконання тестових розрахунків переходимо до аналізу впливу горизонтальних перегородок на коливання рідини в циліндричних резервуарах з горизонтальними перегородками.

Розглянемо збудження $a_x(t) = 0.1 \cos 3t$. Його частота відрізняється від власних частот як оболонки без перегородки, так і оболонки з вертикальними перегородками.

Рис. 4.7 а) демонструє істотне зменшення амплітуди плескань рідини за наявності горизонтальних перегородок. Чорна лінія тут відповідає рівню підйому вільної поверхні в циліндричній оболонці без перегородок, а зелена лінія відповідає підйому вільної поверхні за наявності горизонтальних перегородок у точці $\theta = 0$, $\rho = R$, $z = \zeta$ за перші 15 с. На рис. 4.7 б), в) показано зміну підйому вільної поверхні в точках $\theta = 0$, $\rho = 0.5R$, $z = \zeta$, $\rho = R$, $z = \zeta$ відповідно при $\omega_h = 4$ рад/с, $a_h = 0.1$ за 50 с. Зелена лінія тут відповідає рівню підйому поверхні за наявності горизонтальної перегородки ($H_2 = 0.9$ м, $R_1 = 0.7$ м). З отриманих результатів можна зробити висновок, що у випадку коли частота збудження $\omega_h = 4$ рад/с близька до першої частоти вільних коливань $\omega_h = 4.14$ рад/с, відбувається режим биття. Після установки перегородки амплітуди коливань різко зменшуються. Зазначимо, що амплітуди підйому вільної поверхні в жорсткому резервуарі в режимі биття дуже великі, тому треба розв'язувати проблему в нелінійному формулюванні.

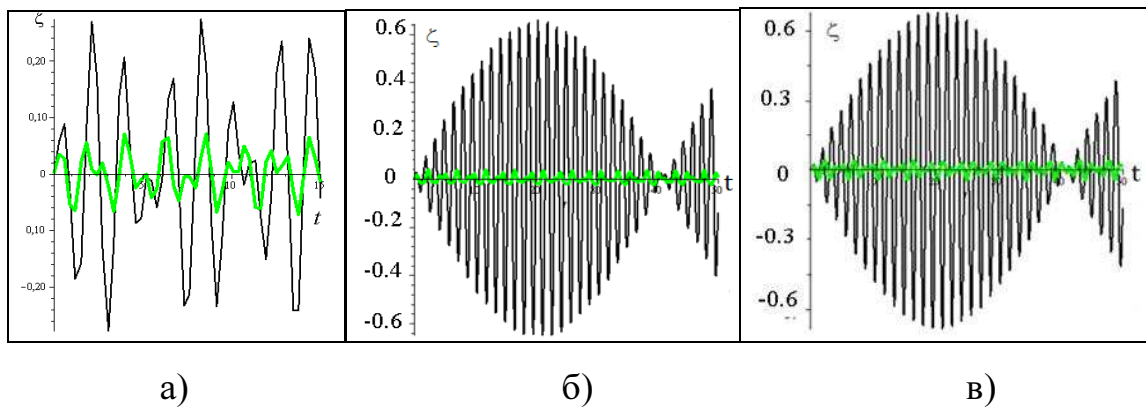


Рисунок 4.7 – Зміна підйому вільної поверхні з часом при різних ω_h

Слід зазначити, що коли частота збудження ω_h наближається до власної частоти ω_{1k} , тоді $d_{1k}(t)$ зростає до нескінченності (тобто відбувається резонанс), оскільки ефект демпфування не враховується в цьому аналізі. Тому, якщо частота збудження знаходиться поблизу власних частот, даний спосіб підходить лише для якісного аналізу.

4.2.2 Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах без перегородок та з перегородками під дією вертикального навантаження

Дослідимо коливання рідини в циліндричних баках під дією лише вертикального збудження. Розглядаються вертикальні збудження, викликані періодичними навантаженнями. Розглянемо резервуари з перегородками (рис. 3.9 б), 3.12 б)) та без них (рис. 3.6). Це необхідно для з'ясування впливу перегородок на зміну рівня вільної поверхні при вимушених коливаннях. Тиск рідини на поверхні резервуара визначається за допомогою лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа (3.4). Після розв'язання задачі (3.25) на власні значення отримуємо частоти та форми коливань оболонок з рідиною.

Зазначимо, що для визначення власних частот та форм використаний метод граничних елементів, при цьому у випадку наявності вертикальних перегородок в формулах (3.32) вважаємо, що $l = 2$ Якщо перегородки відсутні, то $l = 1$.

Спочатку проведемо аналіз збіжності методу. Для цього були здійснені розрахунки зміни рівня вільної поверхні при різній кількості власних форм у виразі (4.7). На рис. 4.8 показані результати, отримані при $M = 1$ та $M = 2$. Крапками зображений розв'язок, що відповідає $M = 1$, а суцільною лінією – $M = 2$. Бачимо, що однієї форми власних коливань достатньо для задовільного опису процесу зміни рівня вільної поверхні.

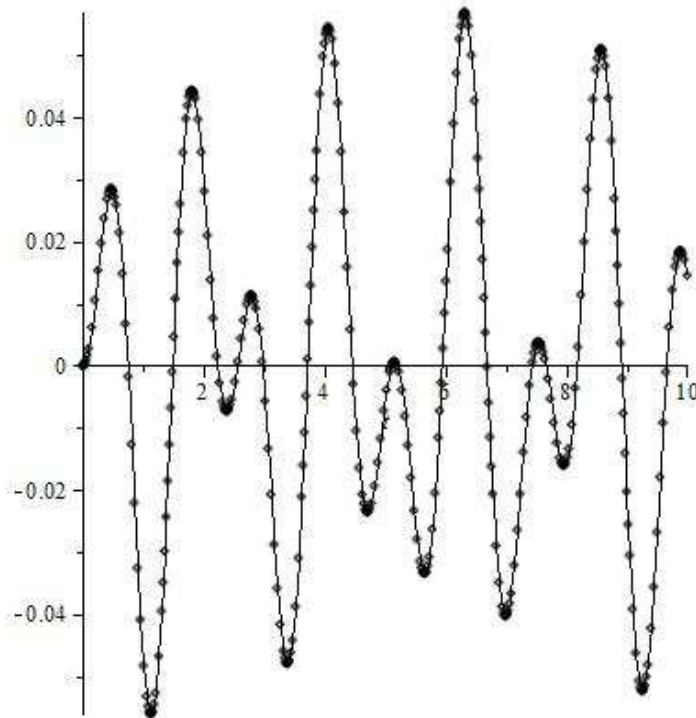


Рисунок 4.8 – Збіжність числового методу

Далі вивчалась поведінка рідини в циліндричних оболонках під дією лише вертикальних гармонічних збуджень. Для цього після отримання відповідних власних форм проводилося розв'язання системи диференціальних рівнянь (4.12). Вважалось, що $a_x(t) = 0$, $a_z(t) = a_2 \cos(\omega_v t)$. Тоді система (4.12) перетворюється на незв'язані рівняння Матсьє.

$$\ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 - \frac{a_v \cos \omega_v t}{g} \right) d_{0k} = 0,$$

$$\ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 \left(1 - \frac{a_v \cos \omega_v t}{g} \right) d_{1k} = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.17)$$

Зробимо зауваження відносно початкових умов, якщо $a_x(t) = 0$. Зазначимо, що у разі лише вертикального збудження на вільній поверхні потрібне деяке початкове збурення. Без цього початкового збурення не виникає коливань на поверхні рідини. Оскільки вільна поверхня знаходиться в стані спокою, вертикальне збудження не може створювати жодного руху. Тобто хоча б одна компонента в початкових умовах (4.13), (4.14) має бути відмінною від нуля. Рівняння (4.17) добре відомі, і їх розв'язки були предметом багатьох досліджень. У цій роботі використаний алгебраїчний метод їх розв'язання [31]. Розв'язок рівняння Мат'є (4.30) може бути стабільним, періодичним або нестабільним залежно від параметрів системи. Коливання вільної поверхні при вертикальному гармонічному збудженні є параметричними. Виникають деякі нестабільні вібрації залежно від значень параметрів. На рис. 4.9 подані залежності рівня підйому вільної поверхні від часу при різних частотах вертикального збудження, а саме: рис. 4.9 а) відповідає $\omega_v = 3$ рад/с; рис. 4.9 б) зображує дані для $\omega_v = 6.125$ рад/с; на рис. 4.9 в) подані залежності для $\omega_v = 12.25$ рад/с.

Субгармонійний (або основний) параметричний резонанс має місце, коли ємність з рідиною збуджується вертикально з частотою, близькою до подвоєної фундаментальної частоти плескань. Це призводить до нескінченного збільшення висоти підйому вільної поверхні (рис. 3.4 в)).

Фазові портрети коливань подано в координатах $(\zeta, \dot{\zeta})$ в точці $z = \zeta, \rho = 0$ при

$$\dot{d}_{01}(0) = 0.05; \dot{d}_{0k}(0) = 0, k = \overline{2, M}; d_{0k}(0) = 0, k = \overline{1, M}.$$

На рис. 4.9 зелені лінії відображують графіки вертикальних збуджень в залежності від часу, цифрами 1 і 2 позначені залежні від часу рівні підйому вільної поверхні циліндричних резервуарів без перегородок (рис. 3.6) і резервуарів з горизонтальними перегородками (рис. 3.9 б)). Параметри перегородки обирались як $H_2 = 0.9$ м, $R_1 = 0.7$ м. Встановлено, що вплив вертикальних перегородок (рис. 3.12 в)) практично відсутній у випадку вертикальних збуджень.

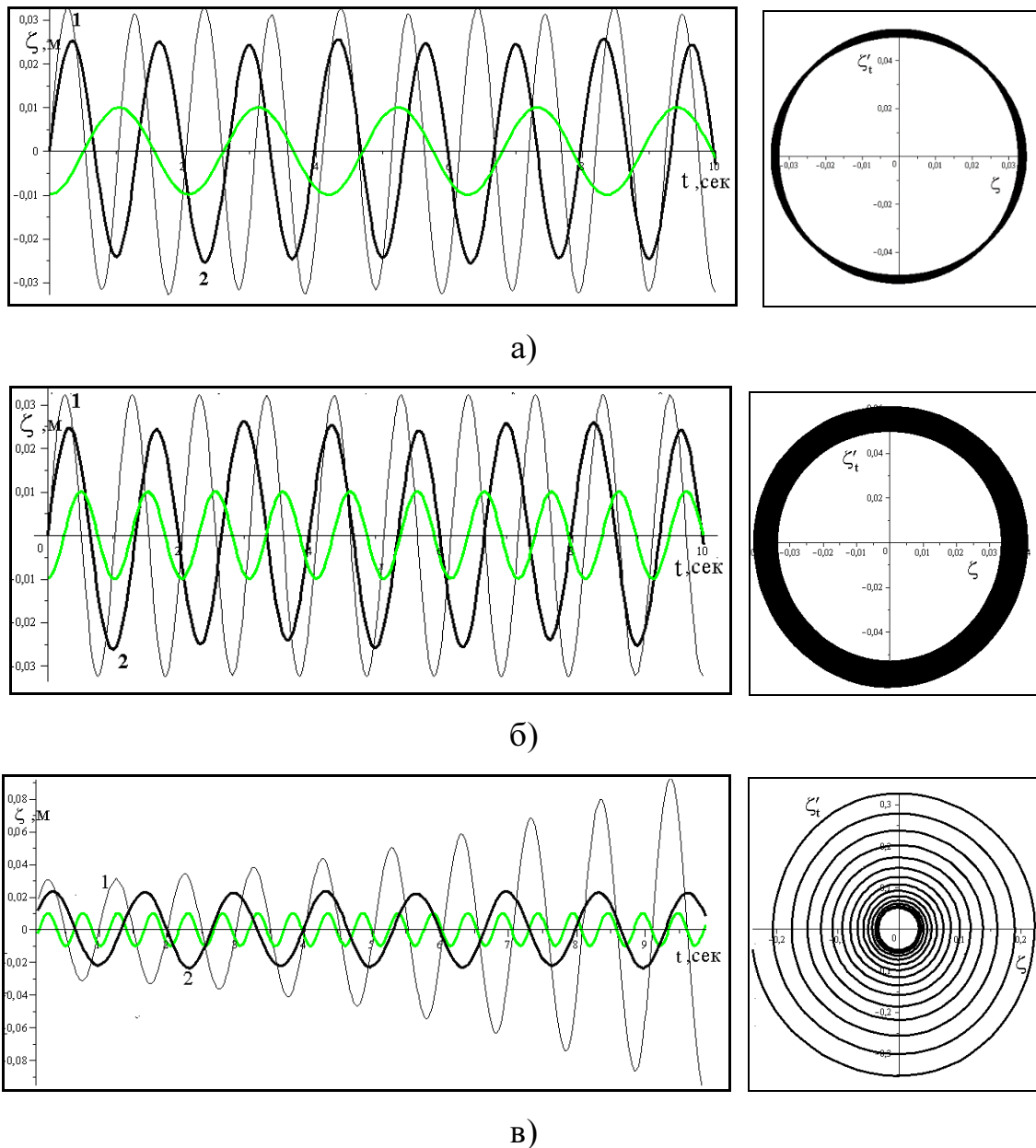


Рисунок 4.9 – Зміна рівня вільної поверхні з часом та фазові портрети для різних ω_h

Зазначимо, що на відміну від вимушених горизонтальних збуджень із нульовими початковими умовами для всіх невідомих, у випадку параметричних коливань необхідно встановити щонайменше одне ненульове початкове значення для отримання ненульових розв'язків рівнянь (4.12). Зауважимо, що $\omega_{11} = 6.1248$ рад/с є фундаментальною частотою плескань рідини в резервуарі без перегородок. Аналізуючи фазовий портрет, що відповідає такій частоті збудження, робимо висновок, що система майже втрачає свою стійкість, але зале-

жність від часу показує періодичну поведінку (рис. 4.9 б)). Для подвоєної частоти коливання вільної поверхні, викликані періодичним збудженням, набувають зростаючого характеру (рис. 4.9 в)). Тобто субгармонічний (або принциповий) параметричний резонанс виникає, коли ємність з рідиною вертикально збуджується на частоті, близькій до подвоєної фундаментальної частоти коливання, що призводить до нескінченного збільшення висоти підйому вільної поверхні. Для більш детального оцінювання областей стійкості використано діаграму Айнса-Стретта у вигляді, запропонованому в [32]. Ця діаграма зображена на рис. 4.10. Для цього перетворюємо рівняння. (4.15) наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u}{d\tau^2} + \kappa(1 - \mu \cos \tau)u = 0,$$

$$\tau = \omega_v t, \quad k = \frac{\chi_{nk}^2}{\omega_v^2}, \quad \mu = \frac{a_v}{g}, \quad u = d_{nk}, \quad k = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1. \quad (4.18)$$

Для кривих 1 – 5 на рис. 4.10 в роботі [32] отримані аналітичні вирази, криві 6, 7 отримані з використанням методу з [33].

Криві 1 – 7 ділять площину (k, μ) на області, що відповідають нестабільним рухам (затінені ділянки) та стабільним рухам, які залишаються обмеженими протягом часу (білі області).



Рисунок 4.10 – Діаграма Айнса-Стретта

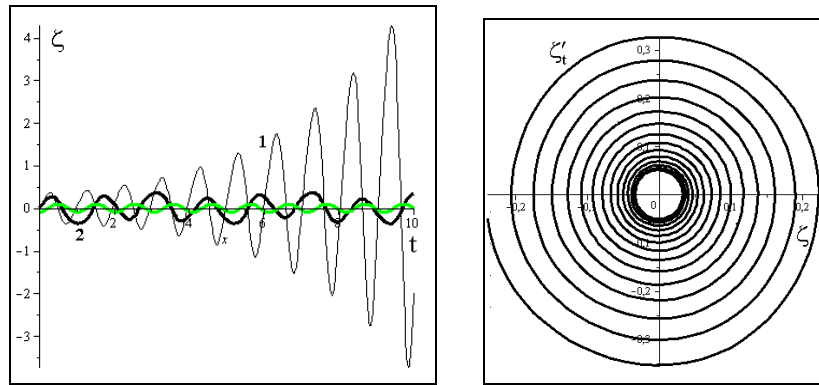
Координати (k, μ) визначаються так:

$$\kappa = \frac{\chi_{nk}^2}{\omega_v^2}, \quad \mu = \frac{a_v}{g}, \quad k = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1.$$

Для кривих 1 – 5 отримані такі аналітичні вирази в [32]:

$$\begin{aligned} \mu_1(k) &= 2\sqrt{\frac{k(k-1)(k-4)}{3k-8}}, \quad k < 0, \\ \mu_2(k) &= \frac{1}{4}\sqrt{(9-4k)(13-29k)} - (9-4k), \quad 0 < k < \frac{1}{4}, \\ \mu_3(k) &= \frac{1}{4}\left(9-4k \pm \sqrt{(9-4k)(13-29k)}\right), \quad \frac{1}{4} < k < \frac{13}{20}, \\ \mu_4(k) &= \sqrt{\frac{2(k-1)(k-4)(k-9)}{k-5}}, \quad \frac{13}{20} < k < 1, \\ \mu_5(k) &= 2\sqrt{\frac{k(k-1)(k-4)}{3k-8}}, \quad k > 1. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Криві 6, 7 отримано за методом, описаним у [33]. Тоді для результатів, зображених на рис. 4.9, отримуємо такі координати (k, μ) точок (A, B, C) на діаграмі Айнса-Стретта для розглянутих випадків: $A(2.34, 0.102)$, $B(0.25, 0.102)$, $C(1.00, 0.102)$. Точки (A, B, C) відповідають результатам, поданим на рис. 4.9 а), в), б), відповідно. Точка C знаходиться на межі областей стабільності, тому, якщо розглядати, наприклад, $\mu = 0.6$, то точка D з координатами $(1.00, 0.6)$ виявиться вже в зоні нестабільності. На графіках, зображених на рис. 4.11, показано підняття вільної поверхні в цій точці в резервуарах без перегородки (лінія 1) та гармонічне навантаження, зелена лінія, та підняття вільної поверхні за умови наявності горизонтальної перегородки (товста лінія 2). Таким чином, розроблений метод дозволяє надати рекомендації щодо відстроювання від небажаних резонансних частот.

Рисунок 4.11 – Нестійкий рух в точці D

4.2.3 Циліндричні оболонки під сумісною дією вертикальних та горизонтальних гармонічних навантажень

Дослідимо одночасну дію горизонтальних і вертикальних збуджень та вивчимо плескання рідини, коли бак піддається такому комбінованому збудженню. Обидва збудження вважаються гармонічними. Початкові умови, необхідні для цього моделювання, є нульовими. Початкове збурення не потрібно, як це було необхідно, у випадку чистого вертикального збудження, оскільки горизонтальне гармонічне збудження створює збурення, необхідне для появи плескань. В цьому випадку маємо

$$\ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{1k} + a_x(t) F_{1k} = 0, \quad F_{1k} = \frac{(r, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.20)$$

Рівняння (4.20) є неоднорідними рівняннями Матьє-Хілла. Як показано, наприклад, в [135], діаграма стійкості Матьє-Хілла не залежить від правої частини. Діаграма стійкості, подана на рис. 4.10, є прийнятною, але на реакцію вільної поверхні впливає й наявність горизонтального навантаження. Ці горизонтальні навантаження можуть створити резонанс, який проявляється в лінійному зростанні висоти підйому вільної поверхні з часом, а саме при чистому горизонтальному збудженні, коли частота зовнішнього збудження дорівнює основній частоті плескань, вільна поверхня зазнає резонансу. У разі чистого горизонта-

льного збудження жорстка оболонка, заповнена рідиною, має єдиний резонанс, але при комбінованому вертикально-горизонтальному збудженні система має інші додаткові резонансні частоти [59]. Якщо частота горизонтального збудження ω_h близька до основної частоти плескань ω_{11} або коли сума чи різниця горизонтальних і вертикальних частот ω_h та ω_v близька до цієї основної частоти, відбувається резонанс. Цей резонанс характеризується лінійним зростанням амплітуди висоти вільної поверхні, навіть якщо параметри вертикального збудження знаходяться в стабільній області (білі області на рис. 4.9). Якщо параметри вертикального збудження знаходяться в нестійкій області (затемнені ділянки на рис. 4.10), то висота підйому вільної поверхні з часом зростає за експоненціальним законом.

Було змодельовано реакцію плескань для різних випадків параметрів усередині і за межами областей параметричного резонансу. Ці параметри наведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Параметри збудження

| Точка | $\frac{\omega_h}{\omega_{11}}$ | $\frac{\omega_v}{\omega_{11}}$ | a_h | a_v | k | μ |
|-------|--------------------------------|--------------------------------|-------|-------|------|-------|
| 1 | 0.01 | 1.99 | 0.1 | 0.3 | 0.25 | 0.03 |
| 2 | 0.01 | 1.99 | 0.1 | 1.0 | 0.25 | 0.1 |
| 3 | 0.18 | 0.99 | 0.1 | 5.30 | 0.99 | 0.5 |
| 4 | 0.99 | 1.22 | 0.1 | 1.0 | 0.67 | 0.1 |
| 5 | 0.18 | 0.82 | 0.1 | 9.61 | 1.48 | 0.7 |
| 6 | 1.63 | 0.63 | 0.1 | 6.95 | 2.5 | 0.97 |
| 7 | 0.18 | 0.70 | 0.1 | 2.95 | 2 | 0.3 |
| 8 | 0.18 | 0.70 | 0.1 | 5.95 | 2 | 0.6 |
| 9 | 0.18 | 0.70 | 0.1 | 8.95 | 2 | 0.9 |

Випадки 1, 2 і 3 відповідають нестабільним областям діаграми Айнса-Стретта. У випадках 1 і 2 ємність для рідини збуджується вертикально з частотою

тою, близькою до подвоєної частоти плескань, і це призводить до нескінченно-го зростання рівня підйому вільної поверхні. Випадок 3 відповідає вертикальному збудженню контейнера на частоті, що дорівнює першій частоті плескань, і матиме місце той же самий ефект. У випадку 4 горизонтальна частота збудження близька до першої частоти плескань.

У випадках 5 та 6 сума та різниця горизонтальних та вертикальних частот ω_h , ω_v близькі до цієї основної частоти відповідно. У випадках 1 – 6 спостерігається нестійкість руху. Слід зазначити, що у випадках 4 – 6 відповідні точки знаходяться в стабільних регіонах. Фазові портрети руху рідини в координатах $(\zeta, \dot{\zeta})$ в цих випадках показані на рис. 4.12.

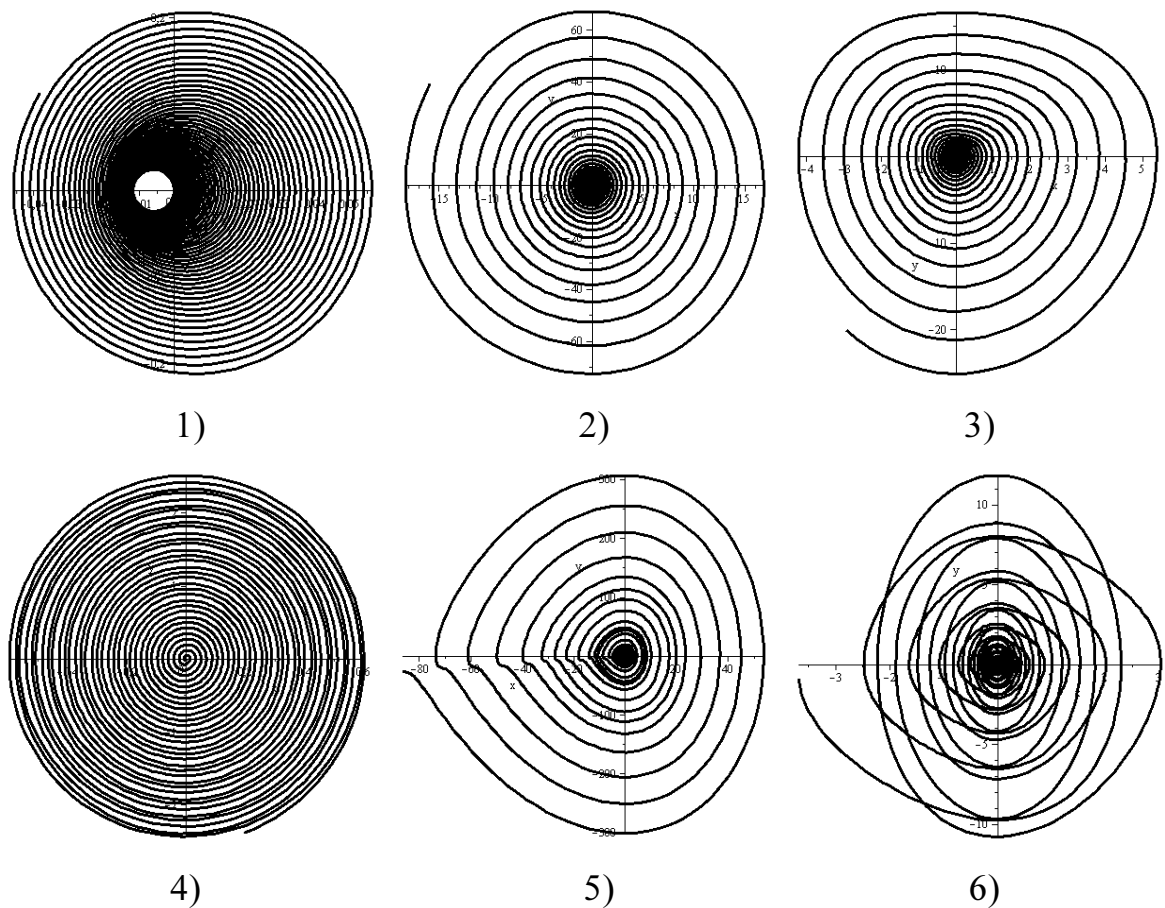


Рисунок 4.12 – Фазові портрети висоти вільної поверхні при комбінованому збудженні

На рис. 4.13 зображено зміну рівня вільної поверхні з часом при зв'язаних горизонтальних і вертикальних збудженнях для випадків 1 – 6. Випадки 1 і 2

відповідають нестабільній області діаграми Айнса-Стретта. У цих випадках ємність з рідиною вертикально збуджується на частоті, близькій до подвоєної частоти власних коливань, і це призводить до нескінченного збільшення підйому вільної поверхні.

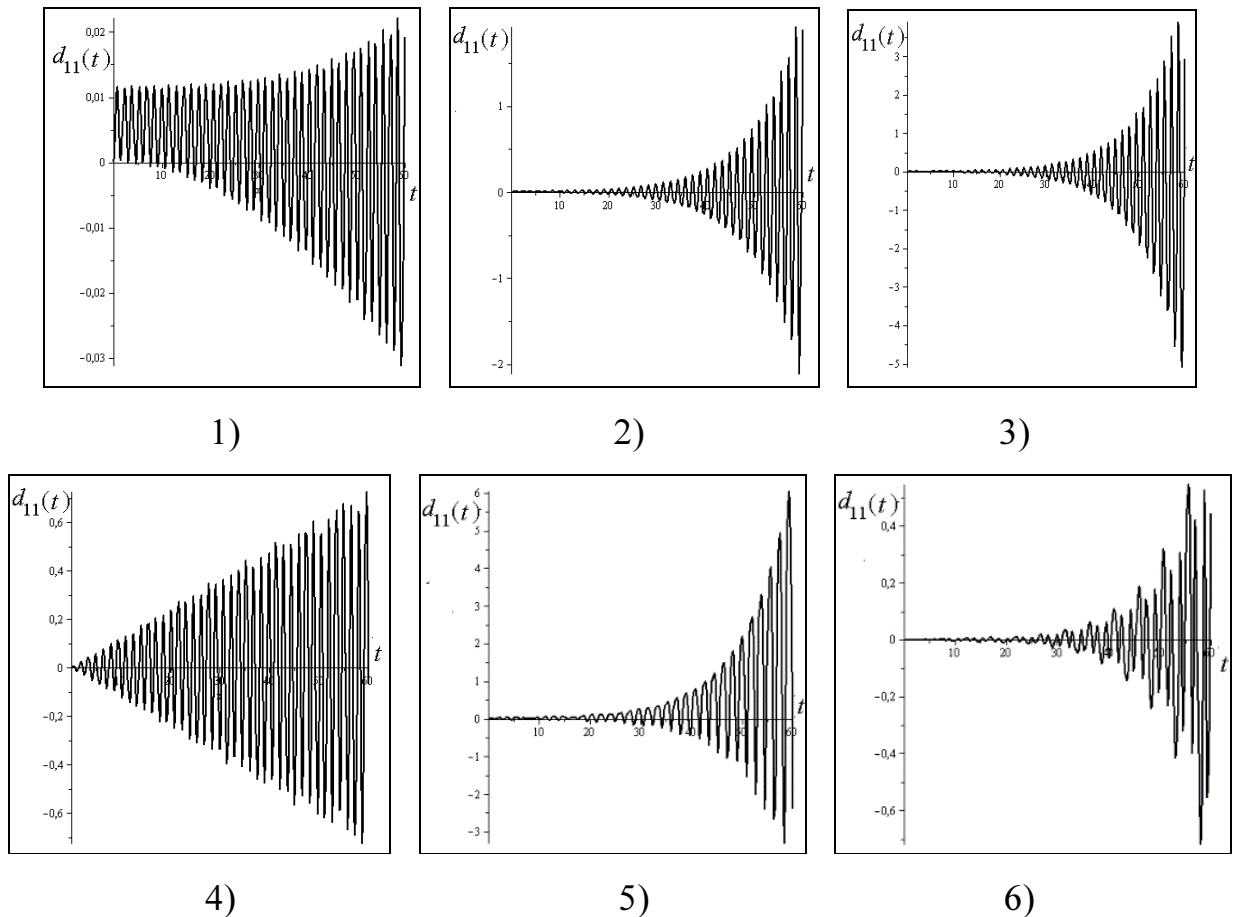


Рисунок 4.13 – Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом при одночасних горизонтально-вертикальних збудженнях

Випадок 3 відповідає вертикальному збудженню ємності на частоті, що дорівнює власній частоті коливань, і відбувся такий самий ефект. У випадку 4 частота горизонтального збудження близька до першої фундаментальної частоти. У випадках 5 і 6 сума і різниця горизонтальних і вертикальних частот ω_h , ω_v близькі до цієї основної частоти відповідно. У випадках 1 – 6 спостерігається нестабільність руху. Слід зазначити, що у випадках 4 – 6 відповідні точки знаходяться в стабільних регіонах. Діаграму стійкості подано на рис. 4.10. Числа 1 – 7 тут відповідають випадкам 1 – 7 таблиці 4.2.

У випадках 7 – 9 відповідні точки знаходяться в стабільній області, а частоти збудження не збігаються ні з власною частотою першої гармоніки, ні сумою або різницею горизонтальних і вертикальних частот ω_h , ω_v близька до основної частоти. На рис. 4.14 представлені коливання вільної поверхні за часом для випадків 7 – 9.

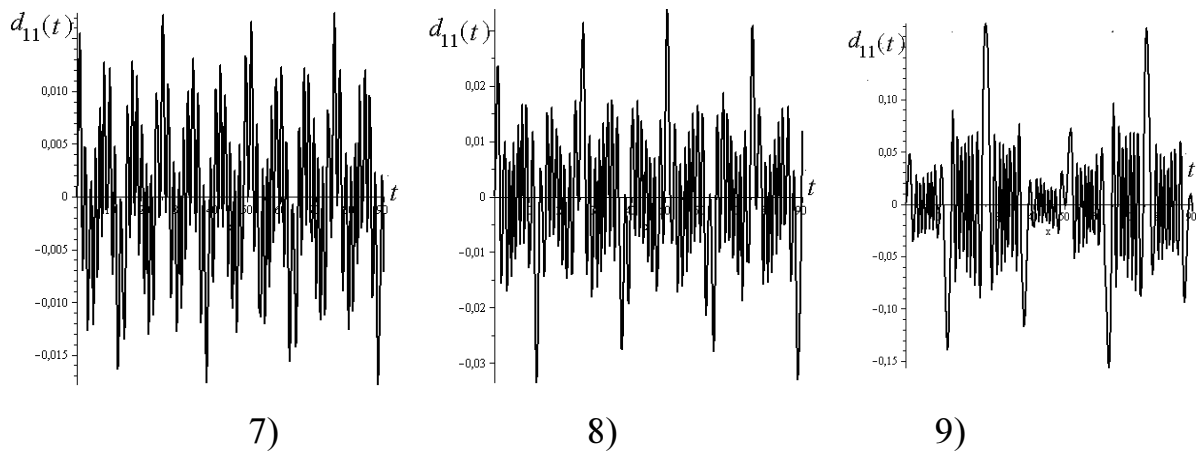


Рисунок 4.14 – Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом в точках 7, 8, 9

Результати розрахунків показують, що рух вільної поверхні є періодичним, але підйом вільної поверхні збільшується зі збільшенням значення a_v . Використання перегородок може бути корисною для зменшення коливань вільної поверхні. Але зміна частоти примусового збудження може призвести до небажаного ефекту, що полягає у співпадінні зміненої частоти збудження з деякими власними частотами резервуара з рідиною.

4.3 Дослідження впливу внутрішніх перегородок на рівень плескань вільної поверхні рідини при сейсмічних та імпульсних навантаженнях

Розглянемо жорстку циліндричну оболонку з плоским днищем, частково заповнену рідиною. Параметри резервуара є такими: радіус $R = 1$ м, товщина $h = 0.01$ м, довжина $L = 2$ м, рівень заповнення $H = 1.0$ м.

Визначаємо тиск p на стінки оболонки з лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа за формулою

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right) + p_0 + a_s(t)x, \quad (4.21)$$

де $a_s(t)$ – функція, що характеризує зовнішній вплив (горизонтальний сейсм або імпульс).

Вважаємо, що радіальне навантаження прикладається до бічної поверхні резервуара як

$$a_s(t) = Q_0 a(t),$$

де Q_0 – розподілений тиск,

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

Вважаємо, що $Q_0 = 10$ МПа, $T = 1.5$ с. Після підстановки виразів, отриманих в [47], у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}, \quad \zeta = \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4.22)$$

в рівняння (4.21), вважаючи, що $x = r \cos \theta$, приходимо до співвідношення

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t) \varphi_{2k} + g \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} + a_s(t)r = 0. \quad (4.23)$$

Після знаходження скалярного добутку рівняння (4.23) на ортогональні (згідно з [129]) функції φ_{2l} ($l = \overline{1, M}$) отримаємо:

$$\ddot{d}_k + \chi_k^2 d_k + a_s(t) F_k = 0, \quad F_k = \frac{(r, \varphi_{2k})}{(\varphi_{2k}, \varphi_{2k})}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.24)$$

Припустимо, що до подання горизонтального імпульсу бак знаходився у стані спокою. Тоді маємо розв'язати (4.24) за нульових початкових умов. Засто-

совано операційний метод для розв'язання системи (4.24). Отримані такі значення коефіцієнтів:

$$\frac{d_k(t)}{Q_0} = \begin{cases} \frac{1}{\chi_k^2} - \frac{1}{\chi_k^2} \cos(\chi_k t), & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{1}{\chi_k^2} - \frac{1}{\chi_k^2} \cos(\chi_k t) - \frac{1}{\chi_k^2} + \frac{1}{\chi_k^2} \cos \chi_k (t - T), & t > T. \end{cases}$$

Підставивши ці коефіцієнти у співвідношення (4.23), знаходимо залежність рівня вільної поверхні від часу.

Зазначимо, що динаміка резервуарів як з перегородками, так і без них, при імпульсних або сейсмічних навантаженнях моделюється рівняннями (4.23). Модельне сейсмічне навантаження подано формулою:

$$a(t) = \begin{cases} 0.02 \sin \frac{\pi t}{5} \cos 2\pi t, & t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

далі отримаємо для зображень Лапласа:

$$p^2 D_m + \omega_{1m}^2 D_m = -F_1 \frac{11\pi}{5} \left(p^2 + \left(\frac{11\pi}{5} \right)^2 \right)^{-1} (1 - e^{-pT}) + F_2 \frac{9\pi}{5} \left(p^2 + \left(\frac{9\pi}{5} \right)^2 \right)^{-1} (1 - e^{-pT}).$$

Визначене D_m підставимо в оригінали при $t < T$:

$$d_m = -\frac{F_1}{\Omega_1^2 - \omega_{1m}^2} \left[\frac{\Omega_1 \sin(\omega_{1m} t)}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_1 t) \right] + \frac{F_2}{\Omega_2^2 - \omega_{1m}^2} \left[\frac{\Omega_2 \sin(\omega_{1m} t)}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_2 t) \right],$$

і при $t > T$:

$$d_m = -\frac{F_1}{\Omega_1^2 - \omega_{1m}^2} \left[\frac{\Omega_1 \sin(\omega_{1m} (t - T))}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_1 t) \right] +$$

$$+ \frac{F_2}{\Omega_2^2 - \omega_{1m}^2} \left[\frac{\Omega_2 \sin(\omega_{1m}(t-T))}{\omega_{1m}} - \sin(\Omega_2 t) \right].$$

На рис. 4.15 а), б) зображено висоту підйому вільної поверхні при $r = 1.0$ м залежно від часу для імпульсного та сейсмічного навантажень.

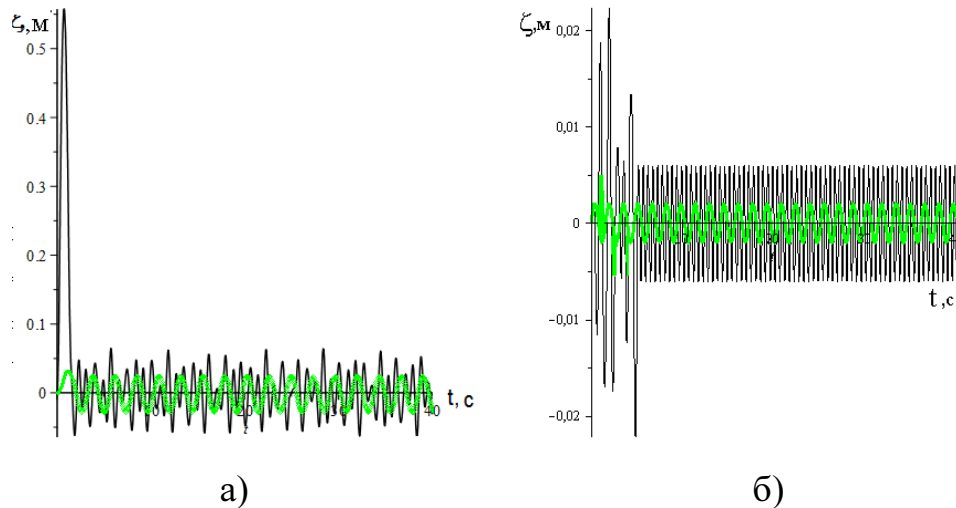


Рисунок 4.15 – Висота підйому вільної поверхні при імпульсному (а) та сейсмічному (б) навантаженні в залежності від часу

На рис. 4.15 чорні лінії позначають висоту підйому вільної поверхні рідини в резервуарі без перегородки, а зелені лінії – в резервуарі з кільцевою перегородкою з $R_{\text{baf}} = 0.3$ м, що встановлена на висоті 0.8 м. Слід зазначити, що амплітуда висоти вільної поверхні не зменшується із часом, але має періодичну поведінку. Причина цього явища полягає в обмеженнях запропонованої моделі для аналізу коливань, яка полягає в класичній динаміці систем без демпфування. Це означає, що всі точки системи здійснюють гармонічні коливання без зменшення амплітуди з часом. Однак отримані результати свідчать про те, що встановлення перегородок призводить до зменшення як частот вібрацій рідини, так і рівня підйому вільної поверхні.

На рис. 4.16 червоними лініями показана висота підйому вільної поверхні рідини в резервуарі під дією сейсмічного навантаження. Частота сейсмічного навантаження дорівнює 2 Гц.

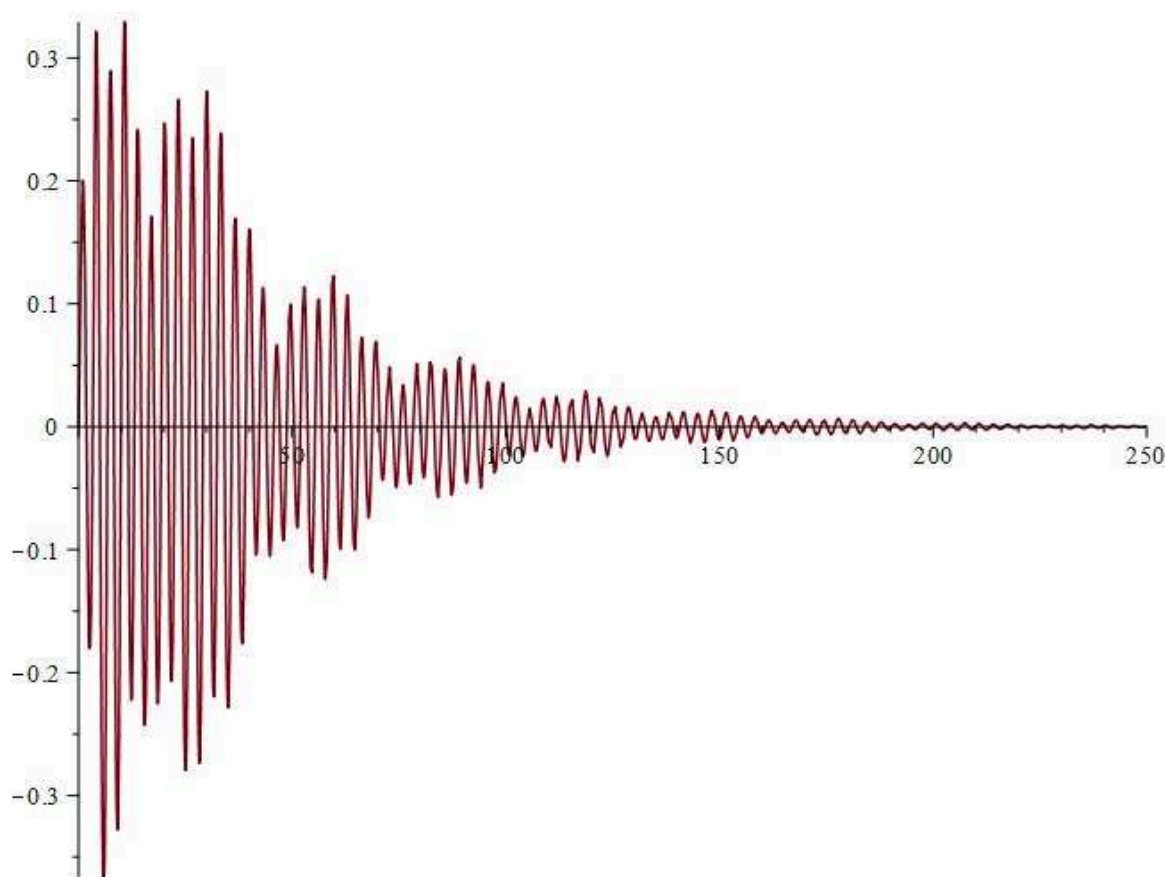


Рисунок 4.16 – Висота підйому вільної поверхні рідини в циліндричному резервуарі під дією сейсмічного навантаження

Висновки за розділом 4

1. Розроблено метод оцінки вібрації рідини в призматичних та циліндричних резервуарах під дією періодичних горизонтальних і вертикальних навантажень. Характер поведінки рідини в резервуарі встановлюється залежно від частоти сили збудження. Вплив параметричного резонансу досліджено при частоті вертикального збудження, що дорівнює подвоєній власній частоті коливань рідини. Найбільш небезпечні коливання рідини мають місце, коли частота горизонтального збудження співпадає з власною частотою коливань рідини, а частота вертикального збудження дорівнює подвійному значенню власної частоти.

2. При чистому горизонтальному збудженні, коли частота зовнішнього збудження дорівнює фундаментальній частоті плескання виникає явище резонансу, причому заповнена рідиною жорстка оболонка має єдиний резонанс, але

при комбінованому вертикально-горизонтальному збудженні, система має інші резонансні частоти. Якщо горизонтальна частота збудження близька до фундаментальної частоти або коли сума чи різниця частот горизонтального і вертикального збудження близька до цієї частоти, відбувається резонанс, який характеризується лінійним зростанням амплітуди коливань вільної поверхні. Коли частота вертикального збудження дорівнює подвійному значенню фундаментальної частоти, відбувається експоненціальне зростання амплітуди коливань вільної поверхні.

Результати роботи, отримані в даному розділі, наведено в роботах автора [81, 86, 113, 125, 127, 132 – 134, 141, 151 – 157, 161].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [29 – 33].

5 ВРАХУВАННЯ ЕФЕКТІВ ПРУЖНОСТІ, СТИСЛИВОСТІ ТА НЕЛІНІЙНОСТІ РУХУ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ

5.1 Дослідження впливу пружних ефектів

Для оцінки ефектів пружності стінок оболонки розроблена математична модель, що базується на таких гіпотезах: рідина нестислива і нев'язка, рух рідини є безвихровим, враховуються лише незначні коливання пружних елементів [26]. Введемо потенціал цієї зв'язаної задачі як суму двох функцій

$$\tilde{\Phi}(t, x, y, z) = \Phi(t, x, y, z) + \Phi_e(t, x, y, z). \quad (5.1)$$

Тут $\Phi(t, x, y, z)$ визначає коливання вільної поверхні, а функція $\Phi_e(t, x, y, z)$ описує внесок пружних коливань стінки. Функція $\Phi(t, x, y, z)$ визначається граничною задачею як у [159].

Для функції $\Phi_e(t, x, y, z)$ формулюється така гранична задача [26]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_e = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_r} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_e} = \frac{\partial W}{\partial t}, \\ \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \right|_{S_0} = 0, \quad W = (\mathbf{U}, \mathbf{n}), \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тут змочена поверхня оболонки подана у вигляді $S_1 = S_r \cup S_e$, де S_r і S_e є жорсткою та пружною частинами поверхні оболонки відповідно, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z, t)$ – вектор пружного переміщення і W є його нормальним компонентом.

Нехай $\mathbf{u}_{nk}(r, z)$, $k = 1, 2, \dots$, є власними формами коливань порожньої оболонки, які відповідають хвильовому числу n . Для числового аналізу використовуємо метод редукованих скінченних елементів, описаний у [26]. Вектор-

функція $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\theta, r, z, t)$ може бути подана так:

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{k=1}^{M_1} c_{nk}(t) \mathbf{u}_{nk}(r, z). \quad (5.3)$$

Подамо функцію $\Phi_e(t, x, y, z)$ у циліндричних координатах як суму

$$\Phi_e = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{k=1}^{M_1} \dot{c}_{nk}(t) \varphi_{nk}^e(r, z), \quad (5.4)$$

де базисні функції φ_{nk}^l визначаються з граничних задач

$$\nabla^2 \varphi_{nk}^e = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{nk}^e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_r} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{nk}^e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_e} = (\mathbf{u}_{nk}, \mathbf{n}), \quad \varphi_{nk}^e \Big|_{S_0} = 0. \quad (5.5)$$

Для $\tilde{\Phi}(t, \theta, r, z)$ маємо

$$\tilde{\Phi}(t, \theta, r, z) = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M \dot{d}_{nk}(t) \varphi_{nk}(r, z) + \sum_{l=1}^{M_1} \dot{c}_{nl}(t) \varphi_{nl}^e(r, z) \right]. \quad (5.6)$$

Подібним чином для функції $\zeta(t, \theta, r)$ отримаємо

$$\zeta = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \frac{1}{g} \left[\sum_{k=1}^M \chi_{nk}^2 d_{nk}(t) \varphi_{nk}(r, 0) + \sum_{l=1}^{M_1} c_{nl}(t) \left. \frac{\partial \varphi_{nl}^e(r, z)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{z=0} \right]. \quad (5.7)$$

Отже, для функції $\tilde{\Phi}(t, x, y, z)$ згідно з (5.6), (5.7) маємо такі співвідношення:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_r} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_e} = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0.$$

Тому для розв'язання задачі коливань пружної оболонки, заповненою рі-

диною, необхідно визначити невідомі коефіцієнти, що залежать від часу

$$c_{nk}(t), d_{nl}(t), n = 0, 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots, M, l = 1, 2, \dots, M_1.$$

Для знаходження цих коефіцієнтів використовується динамічна гранична умова на вільній поверхні

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0.$$

Використовуючи рівняння (5.6), (5.7), знаходимо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M \ddot{d}_{nk}(t) \varphi_{nk}(r, 0) + \sum_{l=1}^{M_1} \ddot{c}_{nl}(t) \varphi_{nl}^e(r, 0) \right] + a_x(t)r \cos \theta + \\ & + (g + a_z(t)) \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_{nk}^2 d_{nk}(t) \varphi_{nk}(r, 0) + \sum_{l=1}^{M_1} c_{nl}(t) \frac{\partial \varphi_{nl}^e}{\partial \mathbf{n}}(r, 0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Інше співвідношення для визначення невідомих залежних від часу коефіцієнтів отримано з рівняння руху оболонки у вигляді [12]

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = p_d \mathbf{n}, \quad p_d = -\rho_l \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta \right], \quad (5.9)$$

де \mathbf{L} та \mathbf{M} – матриці жорсткості та мас відповідно.

Нехай Ω_{nk} є власними частотами порожньої пружної оболонки. Маємо

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_{nk} = \Omega_{nk}^2 \mathbf{M}\mathbf{u}_{nk}, \quad (\mathbf{M}\mathbf{u}_{nk}, \mathbf{u}_{nj}) = \delta_{kj}, \quad (\mathbf{L}\mathbf{u}_{nk}, \mathbf{u}_{nj}) = \Omega_{nk}^2 \delta_{kj}. \quad (5.10)$$

Використаємо рівняння (5.7), (5.8), (5.9), (5.10) та наступні співвідношення:

$$\mathbf{L} \left\{ \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{l=1}^{M_1} c_{nl}(t) \varphi_{nl}^e(r, z) \right] \right\} + \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{l=1}^{M_1} \ddot{c}_{nl}(t) \varphi_{nl}^e(r, z) \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho_l \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M \ddot{d}_{nk}(t) \varphi_{nk}(r, z) + \sum_{l=1}^{M_1} \ddot{c}_{nl}(t) \varphi_{nl}^e(r, z) \right] + a_x(t) r \cos \theta + \\
&+ (g + a_z(t)) \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M d_{nk}(t) \frac{\partial \varphi_{nk}(r, z)}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{l=1}^{M_1} c_{nl}(t) \frac{\partial \varphi_{nl}^e(r, z)}{\partial \mathbf{n}} \right]. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Рівняння (5.8), (5.11) описують проблему коливань порожньої оболонки в поєднанні з коливаннями вільної рідини. Враховуючи результати скалярного множення рівняння (5.10) на функції $\cos n\theta \varphi_k$ і рівняння (5.11) на функції u_k , враховуючи також рівняння (5.10) та ортогональність форм власних коливань рідини в жорстких резервуарах [7], отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку для визначення невідомих коефіцієнтів $c_{nk}(t)$, $d_{nl}(t)$.

Припустимо, що

$$c_{nk}(t) = c_{nk} \exp(i\omega t), \quad d_{nk}(t) = d_{nk} \exp(i\omega t), \quad a_x(t) = 0, \quad a_z(t) = 0. \quad (5.12)$$

Тоді для рівнянь (5.10), (5.12) отримуємо задачу на власні значення для визначення власних частот і форм з урахуванням як пружності, так і ефектів плескань вільної поверхні. Тут ω – власна частота і c_{nk} , d_{nk} – невідомі числа.

Як приклад числового моделювання розглянемо циліндричну оболонку з плоским дном, радіусом $R = 1$ м, товщиною $h = 0.01$ м, висотою $L = 2$ м, з модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$, густиною матеріалу $\rho_s = 7800$ кг/м³, густиною рідини $\rho_l = 1000$ кг/м³, рівнем наповнення $H = 1$ м. Положення перегородки приймаємо $H_1 = 0.5$ м, радіус перегородки R_b є змінним, значення $R_b = 0$ відповідає резервуару без перегородки. Вважається, що оболонка жорстко закріплена по її контуру, тобто маємо такі граничні умови: $u_r = u_z = u_\theta = 0$ при $z = -H$ і $r = R$. Власні форми коливань порожньої оболонки отримано за допомогою методу скінченних елементів, як це було описано в [26]. Форми наповненої рідиною пружної оболонки без урахування сили тяжіння φ_{nk} знайдені методом, розробленим в [21, 25]. Коли всі системи базис-

них функцій визначені, підставляємо їх у рівняння (5.10), (5.11) та з використанням (5.12) приходимо до розв'язання задачі на власні значення, при цьому враховуємо коливання пружної оболонки в поєднанні з плесканнями рідини.

У табл. 5.1 наведені числові значення власних частот коливань для порожніх та заповнених рідиною циліндричних пружних резервуарів без перегородок. Тут коефіцієнти n_s , n_l вказують на кількість форм оболонки та рідини, що враховуються в зв'язаних вібраціях, K – номер зв'язаної форми коливань. Для числового моделювання використано чотири форми коливань оболонки та п'ять форм плескань. Подальше збільшення кількості форм призводило до суттєвих змін результатів.

Таблиця 5.1 – Частоти порожніх та наповнених рідиною пружних резервуарів без перегородок, $n = 0, 1$ Гц.

| $n = 0$ | | | | | $n = 1$ | | | |
|---------|-------|-------|---------------------|--------------------|---------|-------|---------------------|--------------------|
| K | n_s | n_l | Оболонка без рідини | Оболонка з рідиною | n_s | n_l | Оболонка без рідини | Оболонка з рідиною |
| 1 | | 1 | | 0.9739 | | 1 | | 0.6418 |
| 2 | | 2 | | 1.3208 | | 2 | | 1.1509 |
| 3 | | 3 | | 1.5909 | | 3 | | 1.4564 |
| 4 | | 4 | | 1.8209 | | 4 | | 1.7054 |
| 5 | | 5 | | 2.0249 | | 5 | | 1.9212 |
| 6 | 1 | 10,2 | 23.233 | 7.6591 | 10,2 | | 48.520 | 21.902 |
| 7 | 20,1 | | 91.101 | 43.308 | 20,1 | | 139.70 | 79.712 |
| 8 | 30,2 | | 205.25 | 117.03 | 32,1 | | 232.44 | 178.42 |
| 9 | 43,2 | | 365.79 | 230.31 | 40,3 | | 277.30 | 210.00 |

Наведені тут результати показують різницю між частотами заповнених рідиною та порожніх оболонок. Але зі збільшенням номера частоти ця різниця поступово зменшується. Частоти резервуарів з пружними стінками істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями.

Результати впливу перегородки наведені в табл. 5.2. Перегородка з $R_b = 0.5$ м встановлюється на висоті $H_1 = 0.5$ м в циліндричну оболонку, параметри якої описані вище.

Таблиця 5.2 – Частоти порожніх та наповнених рідиною пружних резервуарів із перегородками при $\alpha = 0$, Гц

| K | n_s | n_l | Оболонка без рідини | Оболонка з рідиною |
|-----|-------|-------|------------------------|-----------------------|
| 1 | | 1 | | 0.9475 |
| 2 | | 2 | | 1.3028 |
| 3 | | 3 | | 1.5900 |
| 4 | | 4 | | 1.8209 |
| 5 | | 5 | | 2.0249 |
| 6 | 1 | 1 | 23.2338 | 5.5213 |
| 7 | 2 | 1 | 40.4818 | 15.172 |
| 8 | 3 | 2 | 91.1015 | 43.769 |
| 9 | 4 | 2 | 205.253 | 119.145 |
| 10 | 5 | 2 | 213.551 | 168.052 |
| 11 | 6 | 1 | 365.794 | 196.125 |
| 12 | 7 | 2 | 553.183 | 370.881 |
| 13 | 8 | 3 | 572.280 | 401.324 |

У порівнянні з даними табл. 5.1 бачимо вплив через наявність перегородки. Форми вісесиметричних коливань циліндричної оболонки з кільцевою перегородкою зображені на рис. 5.1.

Порівнюючи частоти для кругових циліндричних резервуарів із перегородками і без перегородок, можна побачити, що найнижчі частоти вісесиметричних коливань для обох резервуарів практично однакові. Нижча частота ω_{06} для обох порожніх пружних резервуарів $\omega_{06} = 23,233$ Гц і її форма відповідає першій формі вісесиметричних коливань днища. Частота ω_{07} для порожнього

резервуара та частота ω_{08} для резервуара з перегородкою становлять 91.1015 Гц і відповідають другій формі вісесиметричних коливань днища.

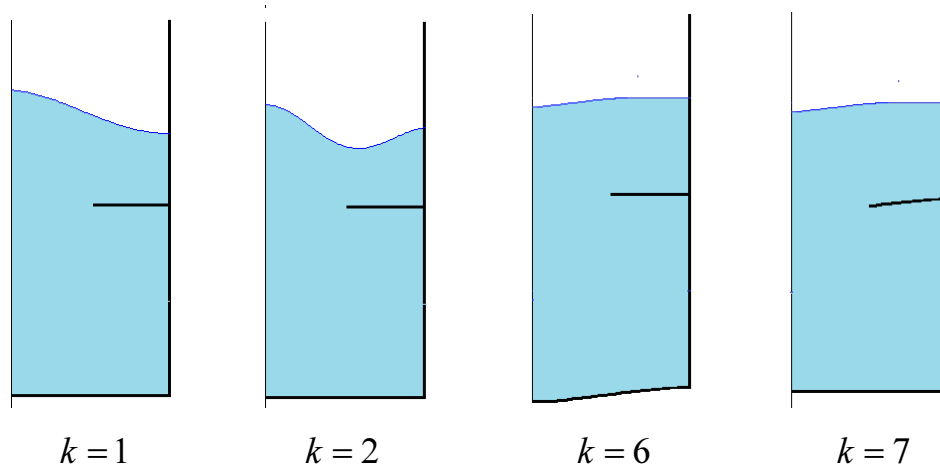


Рисунок 5.1 – Форми вісесиметричних коливань оболонки з кільцевою перегородкою

Слід зазначити, що встановлення перегородки призводить до більш істотних змін частоти коливань днища. Частота ω_{07} відповідає першій вісесиметричній формі перегородки. Подібно до резервуара без перегородок, частоти резервуарів з пружними стінками, істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями. Зазначимо також, що зменшення товщини оболонки призводить до зменшення частот пружної оболонки. Частоти порожніх та заповнених рідиною резервуарів з кільцевою перегородкою для різної товщини наведені в табл. 5.3.

Відповідно до рис. 5.1, у табл. 5.3 номер $k = 6$ відповідає першій вісесиметричній формі коливань пружного днища, а $k = 7$ відповідає першій вісесиметричній формі коливань пружної перегородки. Частоти, наведені в табл. 5.3 для товщини $h = 0.01$ м, $h = 0.05$ м, $h = 0.03$ м, вище ніж частоти плескань. Результати табл. 5.3 свідчать про те, що найнижчі частоти пружних оболонок зменшуються зі зменшенням товщини оболонки. Отже, для дуже тонких пружних стінок резервуара перша частота коливань пружних стінок може бути набагато меншою, ніж частота коливань рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним. Але використання таких тонких оболонок як елементів відповідних конструкцій, що пра-

цюють при інтенсивних зовнішніх навантаженнях, вимагає ретельного аналізу напружено-деформованого стану, щоб уникнути втрати стійкості.

Таблиця 5.3 – Залежність частот від товщини оболонки

| Порожня оболонка, Гц | | | | Оболонка з рідиною, Гц | | | |
|----------------------|--------|--------|--------|------------------------|--------|--------|--------|
| <i>h</i> м | | | | | | | |
| 0.01 | 0.005 | 0.003 | 0.0015 | 0.01 | 0.005 | 0.003 | 0.0015 |
| 23.233 | 11.838 | 7.1805 | 3.6308 | 5.5213 | 2.8187 | 1.7096 | 0.8644 |
| 40.482 | 20.612 | 12.495 | 6.3132 | 15.172 | 7.9277 | 4.8058 | 1.5780 |
| 91.101 | 46.271 | 28.023 | 14.153 | 43.769 | 22.249 | 13.479 | 7.0064 |
| 205.25 | 100.01 | 62.922 | 31.747 | 119.14 | 58.148 | 36.587 | 15.716 |
| 213.55 | 109.10 | 66.127 | 31.778 | 168.05 | 85.909 | 52.069 | 18.692 |

У роботі [136] були отримані умови, коли вплив плескань стає незначним при вивченні коливань пружної оболонки. Таким чином, для оцінки найнижчих частот коливань оболонки, заповненої рідиною, доцільно обмежити дослідження жорсткими оболонками, принаймні, якщо відношення товщини до характерного розміру оболонки більше, ніж 0.003.

5.2 Дослідження взаємної дії горизонтальних та вертикальних навантажень на пружний резервуар частково заповнений рідиною

Розглядається задача про коливання рідини в пружній оболонці. Вважається, що рідина ідеальна нестислива, а її рух, що почався зі стану спокою, є безвихровим. Позначимо змочену поверхню оболонки через S_1 , а вільну поверхню через S_0 . Систему рівнянь руху оболонкової конструкції з відсіками, частково заповненою рідиною, візьмемо у вигляді

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \quad (5.13)$$

де \mathbf{L} , \mathbf{M} – оператори пружних та масових сил;

\mathbf{P} – тиск рідини на змочені поверхні конструкції;

\mathbf{U} – вектор-функція переміщень.

Тут і далі позначаємо нормальну компоненту переміщень оболонки як w . Вектор \mathbf{P} спрямований по нормалі до даної поверхні, оскільки ідеальна рідина створює тільки нормальний тиск на змочені поверхні оболонки. Позначимо $\mathbf{P} = p \cdot \mathbf{n}$, де \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до поверхні S_1

З урахуванням інтеграла Коші-Лагранжа маємо

$$p - p_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta \right].$$

Умову непротікання на змочених поверхнях S_1 подамо у наступній формі

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

На вільній поверхні рідини задаються наступні кінематична та динамічна умови. Для потенціалу швидкостей Φ маємо таку крайову задачу:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad p - p_0|_{S_0} = 0. \quad (5.14)$$

Будемо шукати власні форми коливань резервуару з рідиною у вигляді

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k. \quad (5.15)$$

Тут функції $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k(x, y, z)$ – власні форми коливань порожнього резервуару, $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать тільки від часу t . Зауважимо, що співвідношення (2.20) мають місце.

Далі шукаємо потенціал Φ у вигляді двох потенціалів $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, як

описано у розділі 2, пункті 2.4, і приходимо до системи диференціальних рівнянь (2.28), (2.29).

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}\left(\sum_{k=1}^N c_k(t)\mathbf{u}_k\right) + \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\mathbf{u}_k\right) = \\ & = -\rho_l \left[\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t)\varphi_{2k} \right) + a_x(t)x + a_z(t)z \right] + \mathbf{Q}, \\ & \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k\varphi_{2k} + (g + a_z(t)) \left(\sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} \right) + a_x(t)x = 0. \end{aligned}$$

Із співвідношень (2.28), (2.29) знаходимо невідомі функції часу $c_k(t)$ та $d_k(t)$. Для їх однозначного визначення використовуємо початкові умови

$$c_k(0) = c_{k0}, \quad \dot{c}_k(0) = c_{k1}, \quad d_k(0) = d_{k0}, \quad \dot{d}_k(0) = d_{k1}.$$

Внаслідок співвідношень (2.20) отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N c_k(t)\Omega_k^2 u_k + \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)u_k = \\ & = -\rho_l \left[\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k\varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k\varphi_{2k} \right) + a_x(t)x + a_z(t)z \right] + Q. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Крім того, внаслідок останнього з рівнянь (2.22) маємо

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k\varphi_{2k} + (g + a_z(t)) \left(\sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} \right) + a_x(t)x = 0.$$

Оскільки $\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g}\varphi_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots, M$), маємо

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k\varphi_{2k} + (g + a_z(t)) \left(\sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\chi_k^2}{g}\varphi_{2k} \right) + a_x(t)x = 0. \quad (5.17)$$

Помножимо скалярно рівняння (5.16) на \mathbf{u}_l ($l=1, 2, \dots, N$), а рівняння (5.17) на функції φ_{2k} ($k=1, 2, \dots, M$). Отримаємо при $Q=0$:

$$\begin{aligned} c_l(t) + \Omega_l^2 c_l(t) = & -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)(\varphi_{1k}, \mathbf{u}_l) + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t)(\varphi_{2k}, \mathbf{u}_l) + \\ & + a_x(t)(x, \mathbf{u}_l) + a_z(t)(z, \mathbf{u}_l) = 0, \\ \ddot{d}_l(t)(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + \chi_k^2 d_l(t)(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + (a_z(t) + g)\chi_k^2(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + \\ & + \sum_{k=1}^N c_k(t) \left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}, \varphi_{2l} \right) + a_x(t)(x, \varphi_{2l}) = 0. \end{aligned}$$

Розглянуто циліндричну оболонку з плоским дном, радіусом $R=1$ м, товщиною $h=0.01$ м, довжиною $L=2$ м, модулем Юнга $E=2 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu=0.3$, густиною матеріалу $\rho_s=7800$ кг/м³, густиною рідини $\rho_l=1000$ кг/м³, рівнем заповнення $H=1.0$ м. Вважається, що оболонка закріплена по контуру, граничні умови $u_r = u_z = u_\theta = 0$ прийняті при $z=H$ і $r=R$. В таблиці 5.2 наведені дані щодо плескання рідини у резервуарі з найнижчою частотою 0.97 Гц. В таблиці 5.1 наведені дані, які показують коливання стінок циліндричного резервуара з частотою 0.94 Гц. Частота вісесиметричних коливань резервуару з рідиною 0.64 Гц. Візьмемо середнє значення, яке дорівнює $\omega=0.95$ Гц. Надалі будемо розглядати вимушені коливання пружних циліндричних оболонок при горизонтальних та вертикальних збудженнях у вигляді $a_x(t) = a_0 \cos \omega t$, $a_z(t) = a_v \cos \omega_v t$ та досліджувати їх взаємний вплив.

5.3 Числові результати з визначення динамічних характеристик пружних циліндричних резервуарів при вертикальних та горизонтальних коливаннях рідини в циліндричному резервуарі

При числовому моделюванні розглянуто циліндричну оболонку з плоским дном з параметрами, описаними в підрозділі 5.1. З наведених в таблиці

5.2 даних щодо плескань рідини у резервуарі бачимо, що найнижчі частоти є $\omega_{11} = 0.64$ Гц та $\omega_{01} = 0.97$ Гц. Дані таблиці 5.1 свідчать про те, що найнижча частота коливань стінок пружного циліндричного резервуару є $\Omega_1 = 0.94$ Гц.

Будемо розглядати одночасну дію вертикальних та горизонтальних навантажень з прискореннями

$$a_x(t) = a_h \cos \omega_h t, \quad a_z(t) = a_v \cos \omega_v t.$$

Зауважимо, що нижча частота плескань відповідає першій гармоніці, а нижча частота коливань пружних стінок відповідає вісесиметричним коливанням днища. З цього випливає, що $(x, u_1) = 0$, оскільки $x = r \cos \theta$. Тому в рівняннях (5.14) буде наявною лише дія вертикального збудження. Але в рівняннях (5.15) будуть ненульовими всі доданки, що відповідають за вплив зовнішнього навантаження.

Припустимо, що $\omega_h = \omega_n = 0.945$ Гц. Обчислимо функції $d_l, c_l, l = 0, 1$, та побудуємо графік зміни рівня вільної поверхні резервуару в точці з координатами $z = H, R = 1, \theta = 0$, що зображений на рис. 5.2

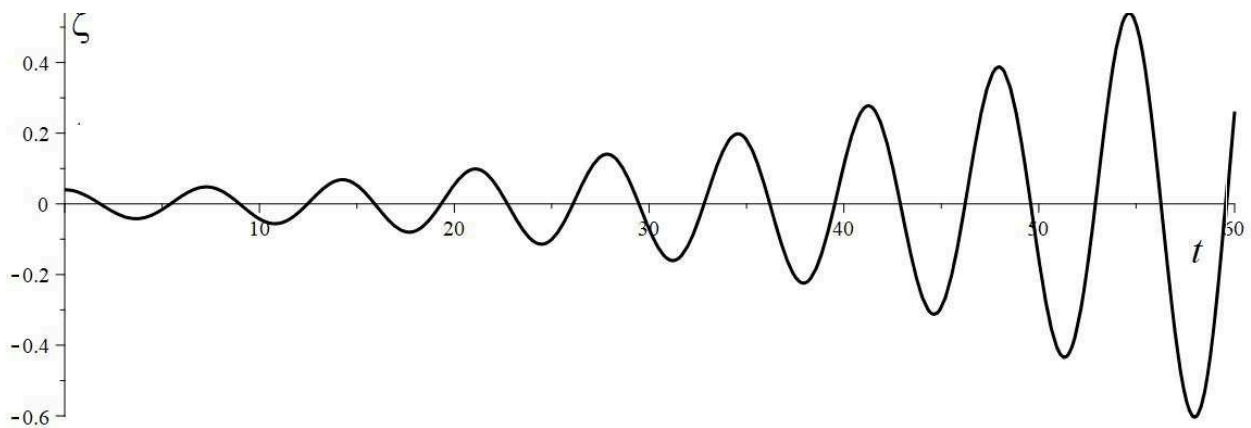


Рисунок 5.2 – Рівень підйому вільної поверхні

за умови, що $\omega_h = \omega_n = 0.945$ Гц

Далі розглянемо випадок, коли $\omega_h = \omega_n = 0.969$ Гц. Зміна рівня вільної поверхні з часом подана на рис. 5.3.

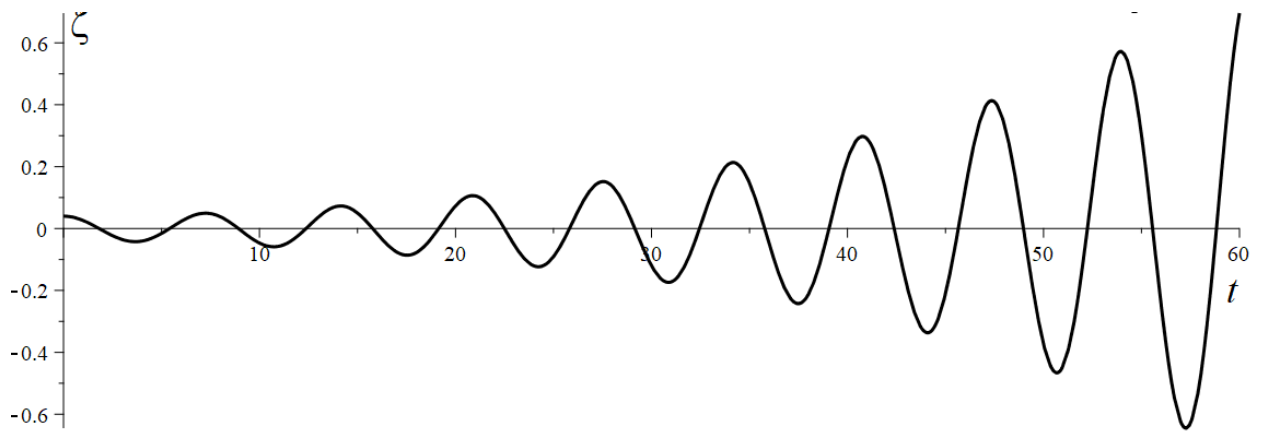


Рисунок 5.3 – Рівень підйому вільної поверхні
за умови, що $\omega_h = \omega_n = 0.969$ Гц

З даних, наведених на рис. 5.2 та 5.3, бачимо що наближення частоти змушувальних сил до нижчої частоти коливань пружних стінок призводить до втрати стійкості руху.

На рис. 5.4 наведено графік зміни рівня вільної поверхні рідини за умови наближення частоти змушувальних сил до першої фундаментальної частоти плескань.

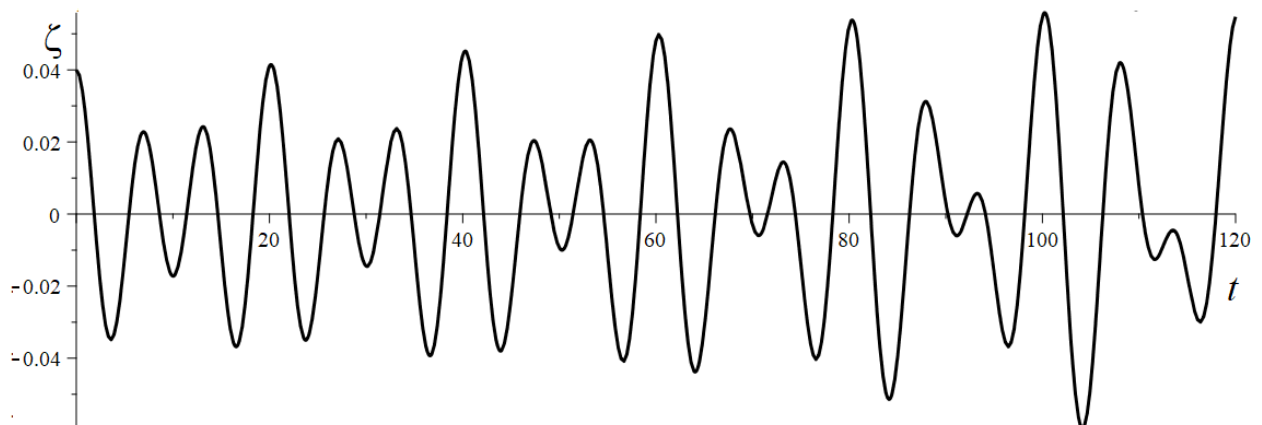


Рисунок 5.4 – Рівень підйому вільної поверхні
за умови, що $\omega_h = \omega_n = 0.639$ Гц

Рис. 5.5 відповідає частоті навантажень, яка дорівнює подвоєній фундаментальній.

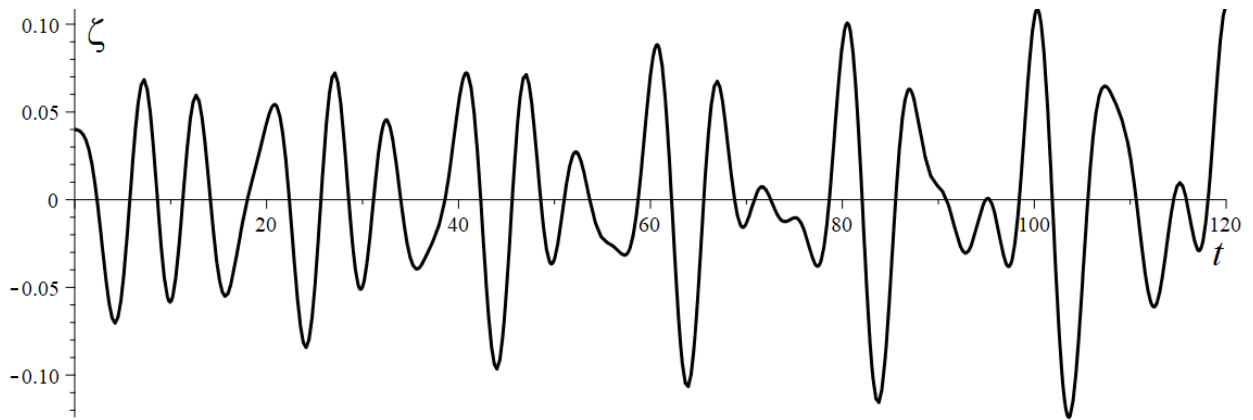


Рисунок 5.5 – Рівень підйому вільної поверхні
за умови, що $\omega_h = \omega_n = 1.28$ Гц

Рис. 5.6 демонструє зміну рівня вільної поверхні при частоті, яка дорівнює 0.3 Гц, та не є близькою ані до нижчих частот плескань, ані до нижчої частоти коливань пружних стінок.

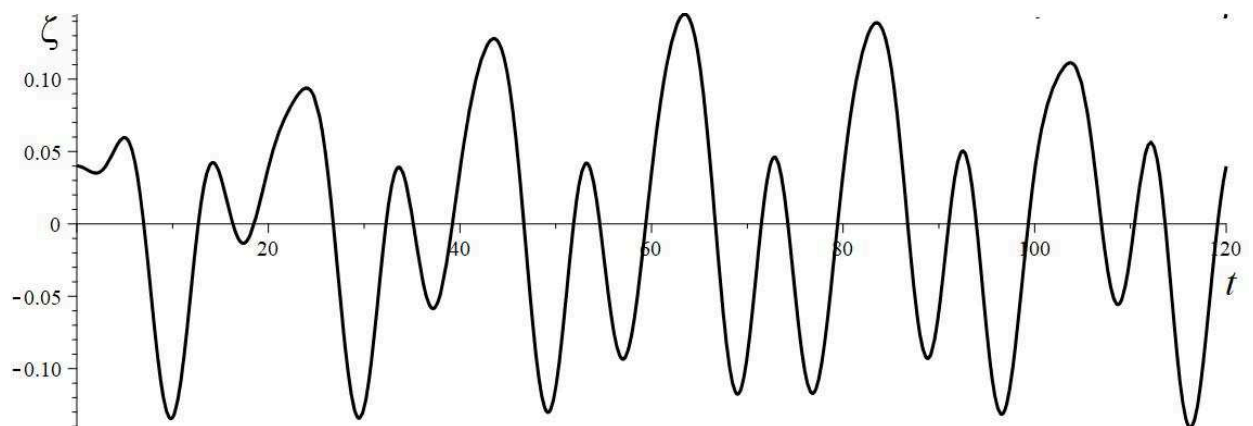


Рисунок 5.6 – Рівень підйому вільної поверхні
за умови, що $\omega_h = \omega_n = 0.3$ Гц

З наведених результатів можна зробити висновок про те, що в випадку досить тонких оболонок, коли нижча частота коливань пружних стінок стає приблизно рівною нижчим частотам плескань, відбувається втрата стійкості. При цьому можна стверджувати, що найбільш небезпечними частотами зовнішнього впливу є такі, що наближуються до частот коливань пружних стінок, які в свою чергу близькі до частот коливань вільної поверхні. Тобто, в цьому

випадку спектри частот коливань пружних стінок та коливань вільної поверхні рідини не є відокремленими і впливом пружності стінок неможливо нехтувати.

Встановлено, що для досить тонких пружних стінок резервуара фундаментальна частота при зв'язаних коливаннях може бути набагато меншою, ніж частота рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним, а нижча частота коливань оболонки з рідиною наближається до частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі.

5.4 Врахування ефекту стисливості рідини

Коли відбувається рух рідини в резервуарах, можна спостерігати безліч форм коливань. Зазвичай різні форми можуть бути визначені за кількістю хвиль m (кількість хвиль в окружному напрямку) та за номером форми n . Огляд досліджень за темою [137 – 140] демонструє, що на динамічну реакцію резервуарів для збереження рідини можуть суттєво впливати вібрації їх пружних стінок у взаємодії з плесканнями рідини, включаючи ефекти стисливості та в'язкості.

Розглянемо зв'язану задачу для оболонок обертання при взаємодії з рідиною (рис. 5.6). Припустимо, що геометричні параметри оболонки визначені щодо глобальної декартової системи координат $Oxyz$. Рідина, що міститься в резервуарі, вважається стисловою. Рівняння руху двох об'єктів (оболонки, S_1 та рідини всередині, можна записати у такій формі

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}. \quad (5.18)$$

Тут \mathbf{U} – функція переміщень оболонки, \mathbf{P} – тиск рідини на змочену поверхню оболонки, \mathbf{L} і \mathbf{M} – оператори пружних і масових сил відповідно.

Розглянемо праву частину рівняння (5.18). Вектор \mathbf{P} спрямований за нормаллю \mathbf{n} до стінки оболонки, оскільки ідеальна рідина створює лише нормальний тиск на змочені стінки та днище. Позначимо $|\mathbf{P}| = p$. Для визначення невідомого тиску p використовуємо закони збереження маси та імпульсу

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_f) + Q, \quad \rho \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f, \quad (5.19)$$

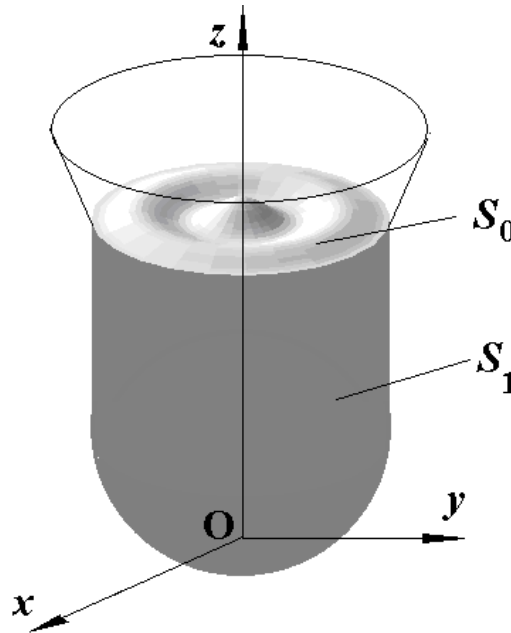


Рисунок 5.7 – Наповнена рідиною оболонка обертання

Тут \mathbf{V}_f – швидкість руху рідини, ρ – густина рідини, Q – джерела, \mathbf{b} – об’ємні сили, $\boldsymbol{\sigma}_f$ – тензор напружень,

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = 2\mu \left[\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{V}_f)\mathbf{I} \right].$$

Тут $\dot{\mathbf{S}}$ – девіатор швидкості деформації, p – тиск рідини, \mathbf{I} – одиничний тензор, μ – коефіцієнт в’язкості рідини.

Рівняння (5.19) в акустичному наближенні приймають вигляд

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{3\rho_0} \nabla \operatorname{div} \mathbf{V}_f + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{V}_f, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2.$$

Враховуючи (5.20), отримуємо

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_0}\nabla p\right) - \frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \operatorname{div}\left(\frac{4\mu}{3\rho_0}\nabla\left[\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right]\right) = 0. \quad (5.21)$$

Далі маємо

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\nabla p) + \frac{4\mu}{3\rho_0 c^2}\operatorname{div}\left[\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right]. \quad (5.22)$$

Звідси видно, що в'язкість рідини впливає значно менше, ніж стисливість, тому для ідеальної стисливої рідини тиск може бути наближено визначений так:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\nabla p) = 0.$$

Друге рівняння в (5.21) без урахування масових сил набуває вигляду

$$\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p. \quad (5.23)$$

З рівняння (5.23) можна довести існування потенціалу швидкості рідини Φ , а саме

$$\mathbf{V}_f = \nabla\Phi. \quad (5.24)$$

Таким чином, потенціал швидкості Φ стисливої рідини задовольняє таке рівняння

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 0. \quad (5.25)$$

Вивчаються коливання з малою амплітудою, тоді членами другого порядку в рівняннях коливань рідини можна нехтувати. Вважається, що умова непротікання виконується на внутрішній поверхні оболонки S_1

$$(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_f, \mathbf{n}).$$

З (5.24), (5.21) випливає, що ця умова набуває вигляду

$$(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}) = (\nabla\Phi, \mathbf{n}). \quad (5.26)$$

Визначення потенціалу Φ з рівняння (5.25) проводимо в розрахунковій області, що обмежена межею $S_1 \cup S_0$, тому також потрібно враховувати граничні умови на вільній поверхні рідини S_0

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0}.$$

Тут невідома функція $\zeta = \zeta(x, y, t)$ описує форму та положення вільної поверхні.

Таким чином, розглядувану задачу можна сформулювати як систему диференціальних рівнянь з граничними умовами щодо Φ та умовами кріплення оболонки стосовно функції \mathbf{U} для знаходження невідомих функцій \mathbf{U} , Φ та ζ

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = p^{dyn} \mathbf{n}, \quad p^{dyn} = -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (5.27)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = 0, \quad (\nabla\Phi, \mathbf{n}) = (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}) \Big|_{S_0}, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta \right|_{S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0}. \quad (5.28)$$

Крайову задачу (5.27), (5.28) необхідно доповнити початковими умовами, щоб отримати однозначний розв'язок. Припускаємо, що процес коливань починається зі стану спокою з урахуванням початкових даних щодо переміщення оболонки та її швидкості.

Розглянемо гармонічні коливання. Припустимо

$$\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z), \quad \mathbf{U}(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\mathbf{u}(x, y, z). \quad (5.29)$$

Для функції $\varphi(x, y, z)$ отримано рівняння Гельмгольца

$$\frac{\omega^2 \varphi}{c^2} + \nabla^2 \varphi = 0.$$

Розглянемо потенціал швидкості φ у вигляді $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, як це було зроблено в роботі [73]. Для цих потенціалів сформульовано такі крайові задачі. Потенціал φ_1 описує коливання стисливої рідини в жорсткій оболонці

$$\frac{\omega^2 \varphi_1}{c^2} + \nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad (\nabla \varphi_1, \mathbf{n})|_{S_1} = 0, \quad (5.30)$$

на вільній поверхні цей потенціал задовольняє граничну умову

$$\frac{\omega^2 \varphi_1}{g} = (\nabla^2 \varphi_1, \mathbf{n}). \quad (5.31)$$

Функція φ_2 описує потенціал коливань в оболонці з пружними стінками

$$\frac{\omega^2 \varphi_2}{c^2} + \nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad (\nabla \varphi_2, \mathbf{n}) = i\omega(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{S_1}, \quad \varphi_2|_{S_0} = 0. \quad (5.32)$$

Задачі (5.28) – (5.31) та (5.32) не є незалежними. З використанням (5.27), (5.29) отримуємо функцію \mathbf{u} з рівнянь

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}) = -p_0 i \omega (\varphi_1 + \varphi_2). \quad (5.33)$$

Таким чином, необхідно визначити функції φ_1 , φ_2 , \mathbf{u} і частоти ω .

Нехай Ω – область, що зайнята рідиною, яка обмежена межею $\partial\Omega = S = S_1 \cup S_0$. Припустимо, що Ω є тілом обертання, тому вводимо циліндричну систему координат (ρ, θ, z) . Як було показано в роботах [141, 142], невідомі функції подаються у вигляді рядів Фур'є, а саме:

$$\mathbf{u} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{u}_m \cos(m\theta), \quad \varphi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1^m \cos(m\theta), \quad \varphi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_2^m \cos(m\theta), \quad (5.34)$$

де m – хвильове число. Більше того, у роботах [141, 142] було доведено, що в задачі на власні значення можна надалі зменшувати розмірність сітки за допомогою використання одновимірних скінченних та граничних елементів. Отже, далі розглянемо лише твірну $\partial\Omega$ при побудові дискретних моделей.

Нехай $\{\xi_k\}_{k=1}^{N_1+N_0}$ – вузли сітки скінченних та граничних елементів, N_0 – кількість вузлів на вільній поверхні, а N_1 відповідає стінкам оболонки і нехай $N = N_1 + N_0$. Опускаючи індекс m , введемо вектори вузлових значень невідомих функцій

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{N_1} &= \{\mathbf{u}_k(\xi_k)\}_{k=1}^{N_1}, \quad \{\varphi_1^k\}_{k=1}^{N_1} = \{\varphi_1^k(\xi_k)\}_{k=1}^{N_1}, \\ \{\varphi_2^k\}_{k=1}^{N_1} &= \{\varphi_2^k(\xi_k)\}_{k=1}^{N_1}, \quad \{q_2^k\}_{k=1}^{N_0} = \left\{ \frac{\partial \varphi_2^k(\xi_k)}{\partial \mathbf{n}} \right\}_{k=1}^{N_0}. \end{aligned}$$

Маємо знайти $5N_1 + 2N_0$ невідомих функцій та невідому частоту коливань ω . Для потенціалу φ_1 маємо

$$2\pi\varphi_1(P_0) = \frac{\omega^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_1(P) G(P, P_0) dS - \iint_{\partial\Omega} \varphi_1(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(P, P_0) dS. \quad (5.35)$$

Тут

$$G(P, P_0) = \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad r = |P - P_0|, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad P = (\rho, \theta, z), \quad P_0 = (\rho_0, \theta_0, z_0).$$

При числовому розв'язку (5.35) отримаємо $N_1 + N_0$ рівнянь для знаходження невідомих $\{\varphi_1^k\}_{k=1}^{N_1}$.

Використано подібну систему для φ_2

$$2\pi\varphi_2(P_0) = \frac{\omega^2}{g} \iint_{S_0} q_2(P)G(P, P_0)dS - \iint_{S_1} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(P, P_0)dS. \quad (5.36)$$

Також маємо $N_1 + N_0$ рівнянь для знаходження $\{\varphi_2^k\}_{k=1}^{N_1}$ та $\{q_2^k\}_{k=1}^{N_0}$.

Тут маємо $3N_1$ диференціальних рівнянь в (5.33), $N_1 + N_0$ рівнянь в (5.35) та в (5.36). Для дискретизації рівняння (5.33) використано метод одновимірних скінченних елементів (МСЕ) з [70]. Складність застосування МГЕ полягає у необхідності розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь з невідомими ядрами, тобто з невідомим коефіцієнтом $k = \frac{\omega}{c}$. Тому пропонується ітераційний метод числового розв'язання рівнянь (5.33), (5.35), (5.36). За перше наближення розглянемо $k = 0$, що відповідає нестисливій рідині. Для кожного хвильового числа m знаходимо значення частот ω_n^m і відповідні форми коливань. Тоді для кожних m і n на наступній ітерації значення частот будуть визначені при $k = \frac{\omega_n^m}{c}$.

Процес триває доти, поки $|k^{(i)} + k^{(i+1)}| > \varepsilon$ на суміжних ітераціях з заданою точністю ε . Числова реалізація рівнянь (5.35), (5.36) базується на редукованому МГЕ [141]. При цьому двовимірні інтеграли зводяться до одновимірних і для їх обчислення використовується ефективний метод, розроблений в [143]. Як перевагу запропонованого методу відмітимо можливість оцінки частот порожньої оболонки ($\rho_0 = 0$ в (5.33)), частот коливань заповненої рідиною оболонки з урахуванням та без урахування ефектів коливань вільної поверхні, а також для оцінки вищезгаданих частот для як для стислової, так і нестислової рідини.

Як приклад числової реалізації розглянемо кругову циліндричну оболонку з плоским дном і такими параметрами: радіус дорівнює $R = 1$ м, товщина становить $h = 0.01$ м, висота $L = 2$ м, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина матеріалу $\rho = 7800$ кг/м³, густина рідини $\rho_0 = 1000$ кг/м³, швидкість звуку дорівнює $c = 1483$ м/с. Рівень наповнення рідини позначається як H та дорівнює $H = 0.8$ м. Вважається, що оболонка жор-

стко закріплена за контуром, тобто граничні умови є такими: $u_r = u_z = u_\theta = 0$ при $z = 0$ та $r = R$. Спочатку оцінюємо необхідну кількість граничних елементів для отримання придатної точності. У даному числовому моделюванні використано 60 граничних елементів уздовж днища, 60 елементів уздовж змочених циліндричних частин і 100 елементів уздовж радіуса вільної поверхні, тому $N_1 = 120$, $N_0 = 100$. У таблиці 5.4 нижче наведені числові значення власних частот плескання рідини для вузлових діаметрів $m = 0$ і $m = 1$. Отримані числові результати порівнюються з тими, що отримані за формулами [136]

$$\frac{\chi_{mn}^2}{g} = \frac{\mu_{mn}}{g} \tanh\left(\mu_{mn} \frac{H}{R}\right), \quad n = 1, 2, \dots; \quad \varphi_{2mn} = J_m\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \cos\left(\frac{\mu_n z}{R}\right) \cos^{-1}\left(\frac{\mu_n H}{R}\right).$$

Таблиця 5.4 – Порівняння аналітичних та числових результатів, $\frac{\chi_n^2}{g}$

| Метод | | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
|---------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $m = 0$ | ВЕМ | 3.815 | 7.019 | 10.180 | 13.333 | 16.480 |
| | [136] | 3.815 | 7.016 | 10.173 | 13.324 | 16.470 |
| $m = 1$ | ВЕМ | 1.657 | 5.332 | 8.540 | 11.711 | 14.889 |
| | [136] | 1.657 | 5.329 | 8.536 | 11.706 | 14.863 |

З результатів цієї таблиці можна побачити, що точність $\varepsilon = 0.01$ досягається при обраній кількості граничних елементів. Відзначено, що для $m = 0$, 1 різниця між частотами, розрахованими для стисливих і нестисливих рідин, досить мала. Але зі збільшенням хвильового числа різниця стає помітнішою. Наприклад, у таблиці 5.5 наведені власні частоти $\omega_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi}$ для хвильового числа $m = 6$ для стисливих і нестисливих рідин порівняно з даними роботи [20].

Можна помітити, що стисливість зменшує власні частоти для високих хвильових чисел. Процес ітерації для отримання частот коливань, включаючи вплив стисливості, збігається за 3-4 кроки.

Таблиця 5.5 – Вплив стисливості, ω_{mn} , Гц

| № | Стислива рідина | | Нестислива рідина | |
|---|--------------------|-------|--------------------|-------|
| | Частоти МГЕ-МСЕ | [144] | Частоти МГЕ-МСЕ | [136] |
| 1 | 1.363 | 1.365 | 1.363 | 1.363 |
| 2 | 1.707 | 1.707 | 1.707 | 1.707 |
| 3 | 1.947 | 1.948 | 2.152 | 2.152 |

Отже, запропоновано підхід, заснований на поєднаному використанні методів скінчених та граничних елементів, для вивчення частот та форм коливань заповнених рідиною пружних оболонок обертання. Також досліджено точність та ефективність запропонованого методу.

На рис. 5.8 зображено форми коливань пружних стінок порожньої циліндричної оболонки.

Зазначимо, що форми коливань стінок порожніх і заповнених рідиною оболонок близькі, хоча і не абсолютно однакові.

У таблиці 5.6 наведені числові значення власних частот коливань для порожніх та заповнених рідиною циліндричних ємностей.

Тут коефіцієнти n_s , n_L вказують кількість форм коливань оболонки та рідини, які враховуються у зв'язаних коливаннях, та n – номер форми коливань. Для числового моделювання тут використано 4 форми коливань оболонки та 5 форм коливань плескань. Також слід зазначити, що існує взаємодія як між коливанням рідини і стінок. Це спостерігається, наприклад, для першої форми коливань оболонки. Це не дозволяє розглядати окремо спектри коливань частот оболонки та плескань рідини.

Ефекти стисливості не є істотними для хвильових чисел $m = 0$ та $m = 1$. Але в [142] було продемонстровано, що найменші частоти пружних оболонок зменшуються зі зменшенням товщини оболонки. Таким чином, у випадку дуже тонкої пружної стінки резервуара, перша частота коливань пружної стінки буде набагато меншою, ніж основна частота рідини в резервуарі з жорсткими стінками.

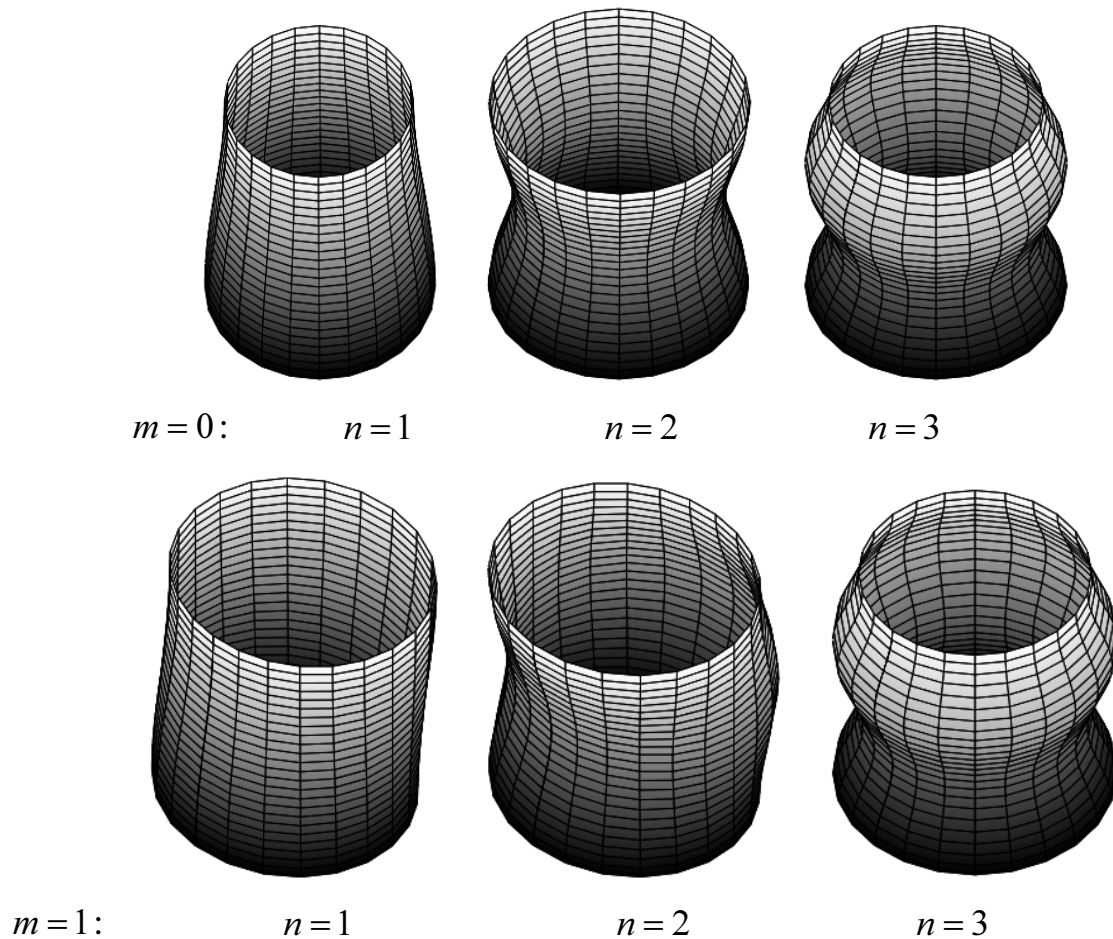


Рисунок 5.8 – Коливання пружної циліндричної оболонки

Таблиця 5.6 – Частоти порожніх і заповнених рідиною резервуарів

| $m = 0$ | | | | | $m = 1$ | | | |
|---------|---------|-------|--------------------|---------------------|---------|-------|--------------------|---------------------|
| n | n_S | n_L | Порожній резервуар | Резервуар з рідиною | n_S | n_L | Порожній резервуар | Резервуар з рідиною |
| 1 | | 1 | | 0.97441 | | 1 | | 0.6422 |
| 2 | | 2 | | 1.26507 | | 2 | | 1.1517 |
| 3 | | 3 | | 1.32151 | | 3 | | 1.4578 |
| 4 | | 4 | | 1.59170 | | 4 | | 1.7075 |
| 5 | | 5 | | 2.02609 | | 5 | | 1.9243 |
| 6 | 1 | 1, 2 | 23.233 | 7.94464 | 1, 2 | | 48.5207 | 21.9555 |
| 7 | 2, 1 | | 91.1011 | 43.8628 | 2, 1 | | 139.708 | 79.7191 |
| 8 | 3, 2 | | 205.252 | 119.627 | 3, 2, 1 | | 232.443 | 178.4222 |
| 9 | 4, 3, 2 | | 365.795 | 238.695 | 4, 3 | | 277.303 | 210.0076 |

5.5 Нелінійні коливання рідини в оболонках обертання

5.5.1 Слабке нелінійне формулювання задачі та основні співвідношення

Дослідимо коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці внаслідок дії вертикального гармонічного збудження (рис. 5.8). Тут S_0 – вільна поверхня рідини, S_1 – змочена поверхня оболонки, h – рівень заповнення оболонки рідиною.

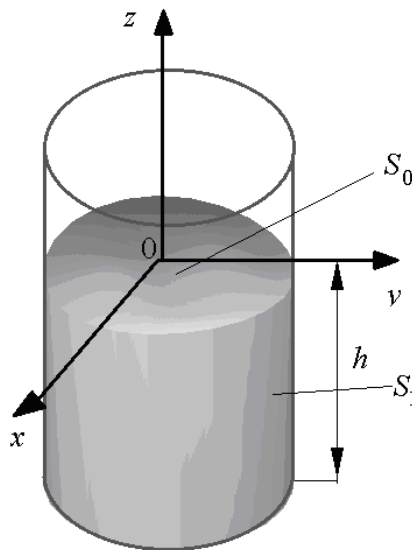


Рисунок 5.9 – Циліндрична оболонка, частково заповнена рідиною

Припустимо, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований вібраціями оболонки, є потенціальним. Тоді існує потенціал швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$ такий, що задовольняє рівнянню Лапласа.

Нехай функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ описує локацію і рух вільної поверхні. В стані спокою до початку дії сили збудження маємо

$$\zeta(0, x, y) = 0, \quad \dot{\zeta}(0, x, y) = 0. \quad (5.36)$$

Розглянемо задачу в аксіально-симетричному формулюванні. Крайова задача в слабкому нелінійному формулюванні для знаходження потенціалу Φ та функції ζ в циліндричній системі координат (ρ, θ, z) сформульована так [145]:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0, \quad (5.37)$$

де p_0 – атмосферний тиск;

\mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні.

Величину тиску p знаходимо з інтегралу Коші-Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_s(t) + g)\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right]. \quad (5.38)$$

Для виконання умов існування розв'язку крайової задачі (5.37) необхідно також задовольнити умову Неймана

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

В роботах [9, 10] доведено, що потенціал швидкостей та функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ для розв'язання нелінійної задачі можна наближати рядами за базисними функціями, що є розв'язками відповідної лінійної задачі [146, 147]. Тому зобразимо невідомі функції Φ та ζ у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=1}^M d_k(t) \varphi_k, \quad (5.39)$$

$$\zeta = \sum_{k=1}^M c_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5.40)$$

В виразах (5.39), (5.40) залежні від часу функції $c_k(t)$, $d_k(t)$ визначатимуться з крайових умов на вільній поверхні. Для знаходження функцій φ_k в [148, 149] отримано такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (5.42)$$

Візьмемо похідну в другому рівнянні (5.42) за t і підставимо отриману рівність для $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ в перше рівняння з (5.42). Далі зобразимо функцію φ_k як $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z)$. Приходимо до проблеми власних значень

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k \right|_{S_0}, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (5.43)$$

У разі, якщо конструкція, яка розглядається, є оболонкою обертання можна застосовувати такі подання:

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta, \quad (5.44)$$

де α – номер гармоніки. Оскільки в даній роботі розглядається аксіально-симетричне формулювання, то $\alpha = 0$, тобто спочатку розглядаємо задачу вільних коливань рідини в лінійному формулюванні.

Подання (5.39) та (5.40) забезпечують виконання рівняння Лапласа, а також задовольняють умові на жорстких змочених стінках резервуару. Для розв'язання задачі про вимушені коливання рідини в резервуарі в нелінійному формулюванні треба задовольнити таким умовам на вільній поверхні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_s(t) + g)\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (5.45)$$

Обчислимо градієнт потенціалу швидкостей у циліндричній системі координат

$$\text{grad}\Phi = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

В рівняння (5.45) підставимо значення $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$ і $\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2$. Обчислимо квадрат модуля градієнта. Оскільки розглядаємо аксіально-симетричні коливання, то $\alpha = 0$. Тоді Φ не залежить від θ , тобто $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$. Звідси

$$|\text{grad}\Phi|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2.$$

Для циліндричного баку без перегородок функції φ_k згідно з [145] мають вигляд

$$\varphi_k = J_0\left(\frac{\zeta_{0k}\rho}{R}\right) \cosh\left(\zeta_{0k} \frac{z+h}{R}\right) \left(\cosh\left(\zeta_{0k} \frac{h}{R}\right)\right)^{-1},$$

а на вільній поверхні

$$\varphi_k = J_0\left(\frac{\zeta_{0k}\rho}{R}\right). \quad (5.46)$$

Базисні функції в поданні для функції ζ є такими:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\zeta_{0k}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{0k}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{0k} \frac{z+h}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{0k} \frac{h}{R}\right)},$$

а на вільній поверхні

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\zeta_{0k}}{R} J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right) \tanh \left(\zeta_{0k} \frac{h}{R} \right). \quad (5.47)$$

Константи ζ_{0k} є коренями рівняння

$$\left. \frac{\partial J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0.$$

Підставивши вирази (5.46), (5.47) та відповідні похідні в співвідношення (5.45) та виконавши скалярне множення отриманих рівнянь на функції $J_0 \left(\frac{\zeta_{0m} \rho}{R} \right)$, отримаємо систему неоднорідних нелінійних диференціальних рівнянь порядку $3M$ відносно $c_k(t)$, $d_k(t)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k(\rho, z) + (g + a_s(t)) \sum_{k=1}^M c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M d_k(t) d_m(t) \left| \nabla \varphi_k(\rho, z) \right| \left| \nabla \varphi_m(\rho, z) \right| \Big|_{z=0} = 0, \\ & \sum_{k=1}^M d_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} - \sum_{k=1}^M \dot{c}_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial z} - \\ & - \frac{1}{g} \sum_{k,m=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_m(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, z)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Спростимо співвідношення (5.48), використавши зв'язок між базисними функціями на вільній поверхні. Отримаємо рівняння

$$\sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k(\rho, 0) + (g + a_s(t)) \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 c_k(t) \varphi_k(\rho, 0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^M d_k(t) d_m(t) \left| \nabla \varphi_k(\rho, z) \right| \left| \nabla \varphi_m(\rho, z) \right| \Big|_{z=0} = 0, \\
& \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 d_k(t) \varphi_k(\rho, 0) - \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_k^2 \dot{c}_k(t) \varphi_k(\rho, 0) - \\
& - \frac{1}{g} \sum_{k,m=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_m(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, 0)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_m(\rho, 0)}{\partial \rho} = 0.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $\varphi_k = J_0 \left(\frac{\zeta_{0k} \rho}{R} \right)$ та здійснимо скалярне множення отриманих рівнянь на $\varphi_m = J_0 \left(\frac{\zeta_{0m} \rho}{R} \right)$. В результаті будемо мати таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
& \dot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) \frac{1}{g} \chi_m^2 c_m(t) + \frac{1}{2(\varphi_m, \varphi_m)} \sum_{k,l=1}^M d_k(t) d_l(t) \left| \nabla \varphi_k(\rho, 0) \right|^2 \left| \nabla \varphi_l(\rho, 0) \right|^2 = 0, \\
& \chi_m^2 [d_m(t) - \dot{c}_m(t)] - \frac{1}{(\varphi_m, \varphi_m)} \sum_{k,l=1}^M \chi_k^2 c_k(t) d_l(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, 0)}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_l(\rho, 0)}{\partial \rho} = 0. \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Розв'язання системи (5.49) потребує задання $2M$ початкових умов. Ці умови отримуємо з рівнянь (5.36) та (5.45). Маємо

$$c_k(0) = 0, \quad d_k(0) = d_{0k}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (5.50)$$

Таким чином, задачу про вимушені коливання рідини в циліндричній оболонці, підданій дії вертикального збудження, зведено до розв'язання системи диференціальних рівнянь (5.49) з граничними умовами (5.50).

5.5.2 Лінійне формулювання

Нехтуючи квадратичними доданками в (5.49), маємо таку незв'язану систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) \frac{1}{g} \chi_m^2 c_m(t) = 0, \quad d_m(t) - \dot{c}_m(t) = 0 \quad (5.51)$$

з початковими умовами (5.50).

Візьмемо похідну першого з рівнянь (5.51) за t та підставимо в отриману рівність друге рівняння з (5.51). Маємо таку систему:

$$\ddot{d}_m(t) + (g + a_s(t)) \frac{1}{g} \chi_m^2 d_m(t) = 0 \quad (5.52)$$

з початковими умовами

$$d_m(0) = d_{0m}, \quad \dot{d}_m(0) = d_{1m}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Будемо розглядати коливання рідини за дії гармонічного вертикального збудження. Це збудження опишемо як $a_s(t) = -a \cos(\omega t)$. Тоді рівняння (5.52) набудуть вигляду

$$\ddot{d}_m(t) + \chi_m^2 d_m(t) - \frac{a \chi_m^2}{g} \cos(\omega t) d_m(t) = 0. \quad (5.53)$$

Зауважимо, що рівняння (5.53) – це класичні рівняння Матьє [5].

Далі побудуємо фазові портрети динамічної системи. Розглядаємо такі початкові умови:

$$d_m(0) = 0, \quad \dot{d}_m(0) = 0.05, \quad k = \overline{1, M}.$$

Припустимо, що $a = 1$. Розглянемо жорстку циліндричну оболонку з розмірами $R = 1$, $H = 1$. Маємо такі значення перших частот вільних вісесиметричних коливань [145, 146]

$$\chi_1 = 6.1224, \quad \chi_2 = 8.2962.$$

Вивчимо вплив частоти сили збурення на поведінку динамічної системи. Припускалось, що частота збурення набуває таких значень

$$\omega = 1; 6.1283; 10.5; 2 \cdot 6.1283; 8.2962, 18.36.$$

На рис. 5.10 зображені фазові портрети $d_1(t)$, $\dot{d}_1(t)$ для наведених вище частот вертикальної сили збурення.

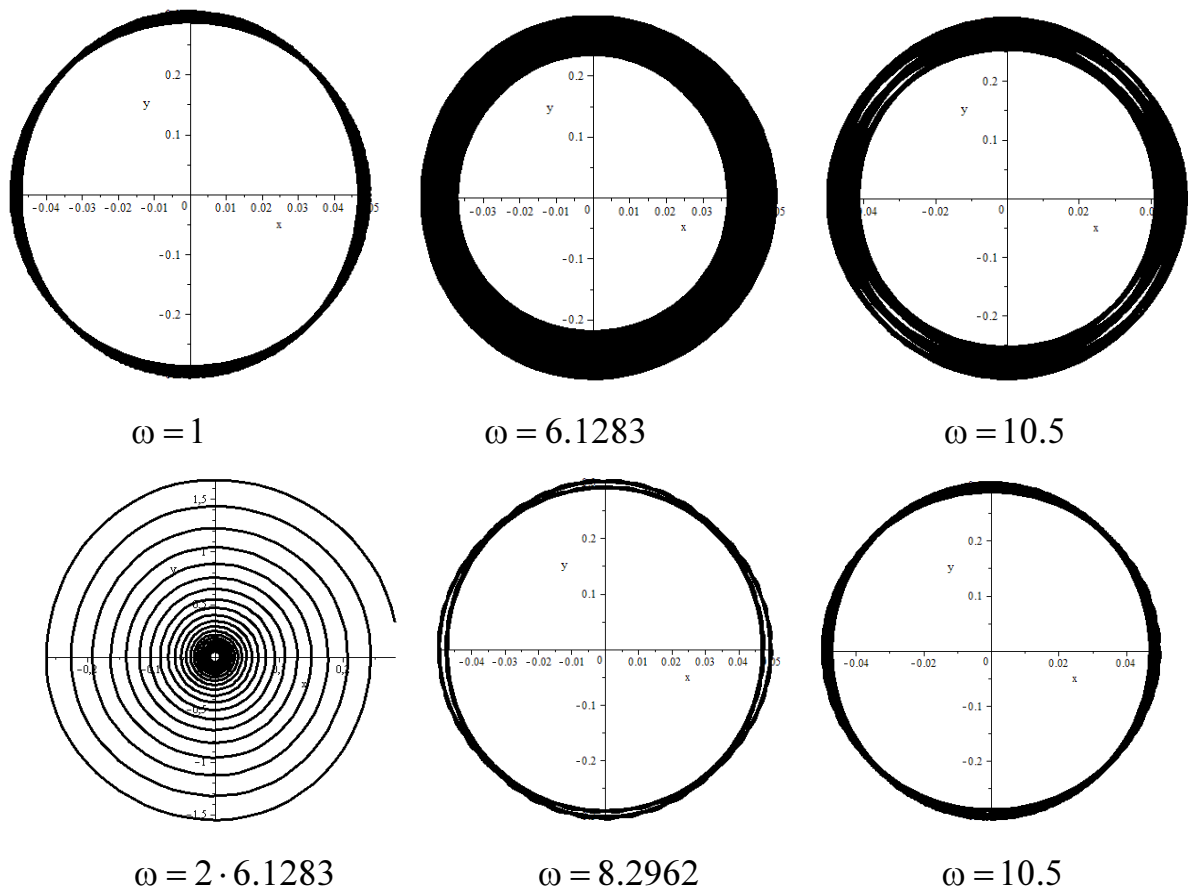


Рисунок 5.10 – Фазові портрети динамічної системи

Спостерігаємо наявність двох резонансів, що відповідають першій частоті вільних коливань рідини в циліндричному резервуарі $\omega = 6.1283$ та подвоєній першій частоті $\omega = 2 \cdot 6.1283$. Це відповідає отриманим в [147] теоретичним результатам, які свідчать про те, що параметричний резонанс має місце, коли

$$\omega = \frac{2\chi_1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При цьому головний параметричний резонанс відбувається саме при подвоєній частоті вільних коливань, коли амплітуди $d_1(t)$, $\dot{d}_1(t)$ необмежено зростають. Зауважимо що в лінійному формулюванні маємо систему незв'язаних диференціальних рівнянь, а перехід до нелінійної задачі, окрім появи квадратичних доданків, призводить до зв'язаності системи.

5.5.3 Спрощений нелінійний аналіз

Для спрощення аналізу розглянемо спочатку рівняння нелінійної задачі, коли враховується лише один член ряду в розкладах (5.39), (5.40). Обмежимося $M = 1$ у рівняннях (5.49) в припущенні відсутності сили збурення. Маємо

$$\varphi_1 = J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{z+h}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}.$$

Обчислимо квадрат градієнту цієї функції, це дає

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = -\frac{\zeta_{01}}{R} J_1\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{z+h}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{01} \frac{z+h}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 &= \left(-\frac{\zeta_{01}}{R} J_1\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{z+h}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \frac{\sinh\left(\zeta_{01} \frac{z+h}{R}\right)}{\cosh\left(\zeta_{01} \frac{h}{R}\right)}\right)^2. \end{aligned}$$

На вільній поверхні ($z = 0$) маємо

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{(\zeta_{01})^2}{R^2} \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01}\frac{h}{R}\right) \right].$$

Рівняння для визначення $d_1(t)$ на вільній поверхні набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \ddot{d}_1(t)\varphi_1(\rho, 0) + g d_1(t) \frac{\partial\varphi_1(\rho)}{\partial z} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi_1(\rho)|^2 = \\ & = \ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + g \frac{\zeta_{01}}{R} J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh\left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right) d_1(t) + \\ & + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right)^2 \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01}\frac{h}{R}\right) \right]. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= g \frac{\zeta_{01}}{R} \tanh\left(\frac{\zeta_{01}h}{R}\right), \\ \tau(\rho) &= \left(\frac{\zeta_{01}}{R}\right)^2 \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) \tanh^2\left(\zeta_{01}\frac{h}{R}\right) \right] \end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\ddot{d}_1(t)\varphi_1(\rho, 0) + g d_1(t) \frac{\partial\varphi_1(\rho)}{\partial z} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi_1(\rho)|^2 = \ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \omega_1^2 d_1(t) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \tau(\rho).$$

З кінематичної умови на вільній поверхні маємо

$$\ddot{d}_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \omega_1^2 d_1(t) J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \tau(\rho) = 0. \quad (5.54)$$

Знайдемо скалярний добуток (5.54) на $J_0\left(\frac{\zeta_{01}\rho}{R}\right)$:

$$\ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) + \frac{1}{2} (\dot{d}_1(t))^2 \frac{(\tau(\rho), J_0(\rho))}{(J_0(\rho), J_0(\rho))} = 0. \quad (5.55)$$

За нульових початкових умов рівняння (5.46) має тривіальний розв'язок. Тому розглянемо такі ненульові початкові умови

$$d_1(0) = 0, \quad \dot{d}_1(0) = 1.$$

Знайдемо аналітичний розв'язок рівняння (5.55) за умови, що $\tau(\rho) = 0$, тобто коли нелінійні ефекти не враховуються

$$d_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t). \quad (5.56)$$

На рис 5.11 зображено зміну рівня вільної поверхні у центральній точці ($r = 0, z = H$). Пунктирна лінія відповідає аналітичному розв'язку (5.56), суцільна лінія відповідає розв'язку рівняння (5.55), отриманого чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти 4-5-го порядків. Бачимо, що урахування нелінійного ефекту суттєво змінює амплітуду коливань.

Проаналізуємо вплив початкових умов на поведінку розв'язків лінійного та нелінійного рівнянь для знаходження зміни рівня вільної поверхні. При $d_1(0) = 0, \dot{d}_1(0) = 1.1$ бачимо суттєве збільшення амплітуди коливань при незначному збільшенні початкової швидкості $\dot{d}_1(0)$. Ще більш цікавий результат було отримано при $\dot{d}_1(0) = 1.17$. Бачимо ефект «падіння хвилі». Відмітимо, що при $\dot{d}_1(0) = 1.16$ падіння хвилі ще не відбувається, але амплітуди коливань при врахуванні нелінійних ефектів суттєво зросли. Це може бути пояснено невиконанням умови Пенлеве [148], яка полягає у наступному: звичайне диференціальне рівняння має властивість Пенлеве, якщо його загальний розв'язок не має рухомих критичних особливостей.

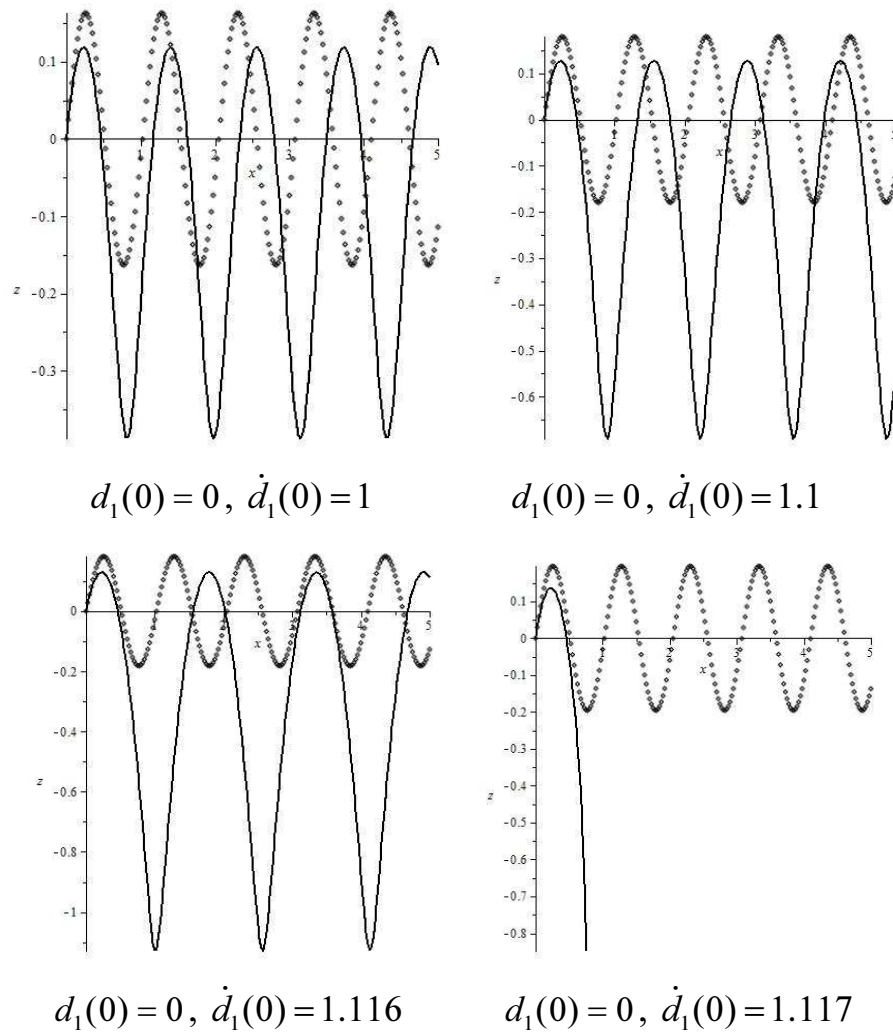


Рисунок 5.11 – Зміна амплітуди вільної поверхні ζ у центральній точці за різні початкові умови

Введемо позначення $\alpha = \frac{1}{2} \frac{(\tau(\rho), J_0(\rho))}{(J_0(\rho), J_0(\rho))}$. Шляхом заміни $w(d_1) = (\dot{d}_1(t))^2$

рівняння

$$\ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) + \alpha (\dot{d}_1(t))^2 = 0$$

зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$w' + \omega_1^2 d_1 + \alpha w = 0,$$

яке має такий аналітичний розв'язок при $d_1(0) = 0$:

$$\dot{d}_1^2(t) = \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} - \frac{d_1}{\alpha^2} + \left[(\dot{d}_1(0))^2 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} \right] \exp(-2\alpha d_1). \quad (5.57)$$

З рівняння (5.57) бачимо, що при $d_1(t) < 0$ та $(\dot{d}_1(0))^2 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} > 0$ спостерігається швидке зростання $\dot{d}_1(t)$ (рис. 5.12), що веде до «падіння хвилі». Зауважимо, що в розглянутому випадку $\omega_1^2 \approx 37.556$, $2\alpha^2 \approx 30.109$, а саме, отримуємо $\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2} \approx 1.2473$, $\sqrt{1.2473} \approx 1.168$. Саме цю границю для втрати стійкості отримано числовим методом.

Зауважимо, що коли початкові дані такі, що $d_1(0) < 0$, $\dot{d}_1(0) = 0$, втрати стійкості не спостерігались, навіть для досить великих від'ємних значень $d_1(0)$. Ці результати проілюстровано на рис. 5.12

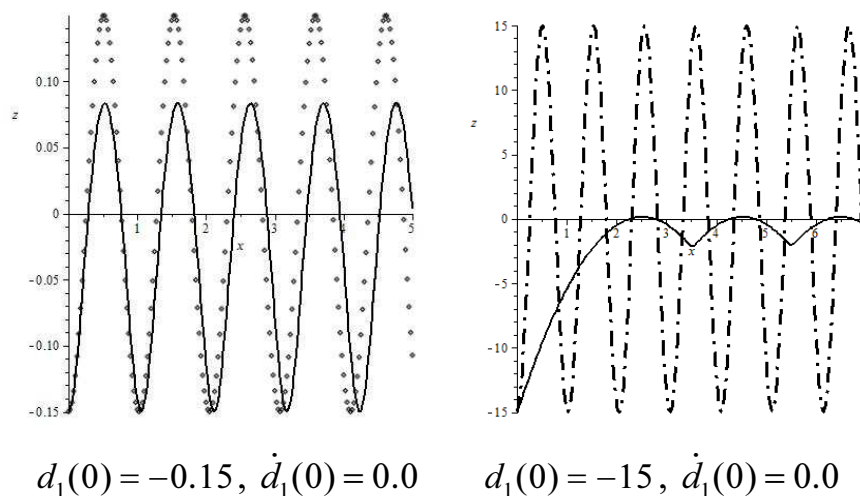


Рисунок 5.12 – Поведінка розв'язку нелінійного рівняння за різні початкові умови

Тобто врахування нелінійності призводить до необхідності дослідження рівнянь, розв'язки яких суттєво залежать від початкових умов. За деяких початкових умов спостерігається втрата стійкості.

Таким чином, отримані диференціальні рівняння, що описують вимушені коливання рідини в циліндричному резервуарі під дією вертикального гармоні-

чного збудження в аксіально-симетричному формулюванні. Проведено числовий аналіз задачі в лінійному формулюванні. На відміну від горизонтальних збуджень спостерігається поява подвійної резонансної частоти. Для аналізу нелінійних коливань проведено попереднє дослідження одного характерного диференціального рівняння за відсутності збуджувальної сили. Цей аналіз дозволив виявити суттєвий вплив початкових умов на поведінку динамічної системи. Далі можливо проводити дослідження нелінійних коливань рідини в резервуарах, що є оболонками обертання, за дії як вертикальних, так і горизонтальних сил збудження.

5.5.4 Уточнене формулювання нелінійної задачі

Розглянемо коливання рідини в жорстких оболонках обертання, частково заповнених рідиною і підданих дії поздовжнього збудження. Такі оболонки можуть бути використані як моделі для числового моделювання процесу плескань в паливних баках, резервуарах для зберігання нафти, ємностях для зберігання води тощо.

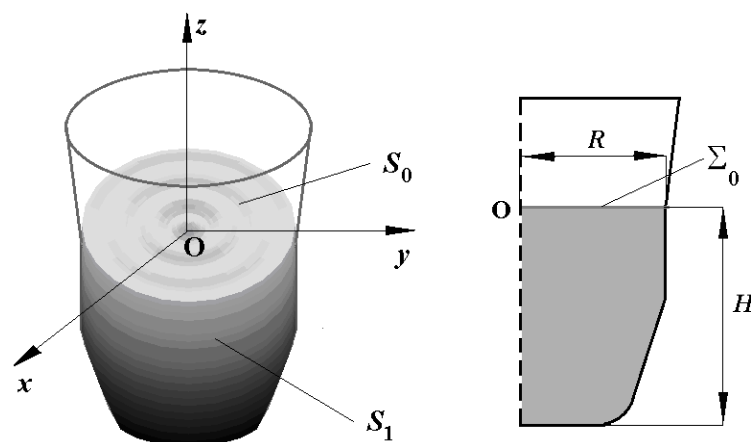


Рисунок 5.13 – Оболонка, заповнена рідиною

Зазначимо, що $S_1 = S_1(t)$ – це змочена поверхня оболонки та $S_0 = S_0(t)$ – вільна поверхня рідини, форма якої залежать від часу. Коли $t = 0$ маємо $S_0(0) = \Sigma_0$ і $S_1(0) = \Sigma_1$. Резервуар зв'язаний з декартовою системою координат

Охуз, вільна поверхня рідини Σ_0 знаходиться у площині $z=0$ у стані спокою. Поверхня $z=-H$ є дном оболонки. Коли зовнішнє збудження діє на оболонку, то поверхні Σ_0 та Σ_1 змінюють свою форму з часом. Якщо розглядати оболонку обертання, то поверхня Σ_0 є колом з радіусом R .

Розглянемо область $Q(t)$, зайняту рідиною в оболонці обертання, що в циліндричній системі координат подається як

$$Q(t) = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq r(z), -H \leq z \leq \zeta(r, \theta, t)\},$$

де радіус $r=r(z)$ описує меридіан оболонки, функція $\zeta = \zeta(\theta, r, t)$ описує висоту підйому вільної поверхні, що залежить від часу. Припустимо, що рідина в оболонці є ідеальною та нестисливою, а поверхневим натягом нехтуємо. Внаслідок закону збереження маси отримуємо таке рівняння неперервності

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (5.58)$$

де \mathbf{V} – швидкість рідини.

Нехай ρ – густина рідини, $Q(t)$ – область, яку займає рідина. Якщо рідина знаходиться під дією зовнішньої сили тіла \mathbf{F}_Q з прискоренням \mathbf{a} , а саме

$$\mathbf{F}_Q = \iiint_{Q(t)} \rho \mathbf{a} dQ(t), \quad (5.59)$$

то згідно із законом збереження імпульсу рух рідини описується як

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{a}, \quad (5.60)$$

де p – тиск рідини, а t – час. Якщо потік рідини вважати безвихровим ($\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$), то існує скалярний потенціал швидкості $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$. Вважається, що $\mathbf{V} = \nabla \Phi$. Рівняння (5.58) зводиться до рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (5.61)$$

Припустимо, що оболонка, заповнена рідиною, знаходиться під дією вертикальних сил і сил тяжіння з прискореннями \mathbf{a}_z і \mathbf{g}

$$\mathbf{a}_z = -a_z(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{g} = -g\mathbf{k},$$

де g – прискорення сили тяжіння. Враховуючи це, маємо

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_z + \mathbf{g}, \quad \mathbf{a}_z = -\nabla(z a_z(t)), \quad \mathbf{g} = -\nabla(zg), \quad \mathbf{a} = -\nabla(z a_z(t) + gz).$$

За припущення існування потенціалу швидкості рідини з рівняння (5.60) отримаємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi, \nabla \Phi) + \frac{1}{\rho} p + z(g + a_z(t)) = C(t). \quad (5.62)$$

Величиною в правій частині рівняння (5.62) можна знехтувати через введення її у потенціал Φ . Отже, рівняння Бернуллі отримані у такій формі:

$$p - p_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (g + a_z(t))z + \frac{1}{2}(\nabla \Phi, \nabla \Phi) \right], \quad (5.63)$$

де p_0 – атмосферний тиск. З рівняння (5.63) можна зробити висновок, що для оцінки тиску рідини необхідно обчислити потенціал рідини Φ .

Коли розв'язок рівняння (5.61) отримано, то швидкість рідини \mathbf{V} можна знайти як градієнт потенціалу швидкості Φ , тиск p отримуємо з рівняння Бернуллі (5.63). Тому необхідно сформулювати граничні умови для рівняння (5.61). На поверхні оболонки S_1 застосовується умова непротікання

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad (5.64)$$

де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до змоченої поверхні S_1 .

Розглянемо кінематичну та динамічну граничні умови на вільній поверхні S_0 . Припустимо, що вільна поверхня має неявний вираз у формі $G(x, y, z, t) = 0$. Тоді похідна G має дорівнювати нулю в будь-який момент часу

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla G) = \frac{\partial G}{\partial t} + (\nabla \Phi \cdot \nabla G) = 0.$$

Ця формула означає, що частинка рідини завжди залишатиметься на вільній поверхні, якщо вона спочатку знаходиться на ній. Також, враховуючи що $G(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$ отримуємо кінематичну умову на вільній поверхні у вигляді

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (5.65)$$

Одиничний зовнішній нормальний вектор до поверхні $z = \zeta(x, y, t)$ має вигляд

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1 \right).$$

Тоді кінематичну умову (5.64) можна записати у такій формі

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (5.66)$$

Функція $\zeta(x, y, t)$ заздалегідь невідома, тому для визначення розв'язку крайової задачі вводиться додаткова динамічна умова на вільній поверхні. Ця гранична умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні атмосферному тиску p_0 . З рівняння (5.64) маємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (g + a_z(t))z + \frac{1}{2}(\nabla \Phi, \nabla \Phi) = 0. \quad (5.67)$$

Отже, безвихровий рух ідеальної рідини у жорстких резервуарах приводить до нелінійної задачі з двома невідомими функціями, а саме формою вільної поверхні ζ і потенціалом рідини Φ .

Для рівняння Лапласа з граничними умовами (5.64) – (5.66) сформульовано таку крайову задачу в залежному від часу середовищі рідини $Q(t)$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{S_0}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (g + a_z(t))z + \frac{1}{2}(\nabla \Phi, \nabla \Phi) \Big|_{S_0} = 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Умова розв'язності для задачі Неймана (5.68) отримана у [17]

$$\iiint_{Q(t)} dQ(t) = 0. \quad (5.69)$$

Зауважимо, що рівняння (5.68), (5.69) описують проблему плескання рідини в нелінійному формулюванні. Крайова задача (5.68), (5.69) має бути доповнена початковими умовами, щоб отримати єдиний розв'язок. Тому зазвичай вважається, що початкове положення вільної поверхні $S_0(0)$ та потенціал рідини Φ задаються у вигляді

$$\zeta(x, y, 0) = \zeta_0(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \varphi(x, y, 0) \quad (5.70)$$

у припущенні, що процес коливання починається зі стану спокою.

Отже, проблема полягає у визначенні невідомих функцій Φ і ζ з рівнянь (5.68), (5.69) з початковими умовами (5.70) [126].

В [126] доведено, що невідомі функції можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\Phi(r, z, \theta, t) &= R_1(t)\Phi_{11}(r, z)\cos\theta + R_2(t)\Phi_{11}(r, z)\sin\theta + R_3(t)\Phi_{01}(r, z) + \\ &+ R_4(t)\Phi_{21}(r, z)\cos 2\theta + R_5(t)\Phi_{21}(r, z)\sin 2\theta, \\ \zeta(r, \theta, t) &= \beta_1(t)\zeta_{11}(r, z)\cos\theta + \beta_2(t)\zeta_{11}(r, z)\sin\theta + \beta_3(t)\zeta_{01}(r, z) + \\ &+ \beta_4(t)\zeta_{21}(r, z)\cos 2\theta + \beta_5(t)\zeta_{21}(r, z)\sin 2\theta.\end{aligned}$$

де функції $\beta_i(t)$, $R_i(t)$ є узагальненими координатами.

В [126] отримано зв'язок між $\beta_i(t)$ і $R_i(t)$ та наступну систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $\beta_i(t)$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_k + \omega_{11}^2(g + \ddot{Z}_0)\beta_k + \\ + f_k(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3, \dot{\beta}_4, \dot{\beta}_5, \ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2, \ddot{\beta}_3, \ddot{\beta}_4, \ddot{\beta}_5) = 0, \quad k = 1, 2, \\ \ddot{\beta}_3 + \omega_{01}^2(g + \ddot{Z}_0)\beta_3 + f_3(\beta_1, \beta_2, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2) = 0, \quad (5.71) \\ \ddot{\beta}_k + \omega_{21}^2(g + \ddot{Z}_0)\beta_k + f_k(\beta_1, \beta_2, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2) = 0, \quad k = 3, 4.\end{aligned}$$

Систему (5.71) розв'язуємо при таких початкових умовах

$$\beta_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, 5}; \quad \dot{\beta}_1(0) = \beta_{10}, \quad \dot{\beta}_k(0) = 0, \quad k = \overline{2, 5}. \quad (5.72)$$

5.5.5 Точність та валідація

Для розв'язання нелінійної задачі необхідно знайти базисні функції, які є розв'язками лінійної задачі [126]. Спочатку визначаємо необхідну кількість граничних елементів для розрахунків власних форм і частот коливань з придатною точністю. Проведені тестові розрахунки для частково заповненої рідиною жорсткої циліндричної оболонки з $R = 1$ м, $H = 1$ м. У таблиці 5.7 нижче наведені числові та аналітичні значення частотного параметра $\frac{\omega^2}{g}$ для різних хви-

льових чисел. Як було доведено в [126], нам потрібно розглянути лише перші моди для трьох хвильових чисел (0, 1, 2).

Таблиця 5.7 – Порівняння аналітичних та числових результатів

| Кількість граничних елементів, N_R | Хвильове число, l | | |
|--------------------------------------|---------------------|--------|--------|
| | 0 | 1 | 2 |
| | χ_{l1} | | |
| 25 | 3.8310 | 1.7516 | 3.0431 |
| 75 | 3.8289 | 1.7512 | 3.0424 |
| 150 | 3.8283 | 1.7509 | 3.0409 |
| Аналітичний метод | 3.8281 | 1.7508 | 3.0407 |
| Частота, ω_{l1} | 6.1257 | 4.1413 | 5.4582 |

Збіжність досягається, коли кількість граничних елементів уздовж стінки та днища оболонки дорівнювала 150 і вздовж радіусу вільної поверхні також 150. Отже, загальна кількість елементів дорівнює 450. Для порівняння тут використовується аналітичний розв'язок Ібрагіма [7]:

$$\frac{\omega_{l1}^2}{g} = \frac{\mu_{l1}}{R} \tanh\left(\mu_{l1} \frac{H}{R}\right), \quad l = 0, 1, 2$$

де значення μ_{l1} є ненульовими коренями рівнянь $\frac{dJ_l(x)}{dx} = 0$, $J_l(x)$ – функція Бесселя першого роду.

Нормовані форми Φ_{l1} , $l = 0, 1, 2$, показані на рис. 5.14 а). Рисунок 5.14 б) показує розподіл $\left. \frac{\partial \Phi_{01}}{\partial r} \right|_{z=0}$ уздовж радіуса вільної поверхні, а на рис. 5.13 в) показані розподіли похідних $\left. \frac{\partial^2 \Phi_{01}}{\partial r^2} \right|_{z=0}$ (цифра 1) та $\left. \frac{\partial^2 \Phi_{01}}{\partial z^2} \right|_{z=0}$ (цифра 2) вздовж радіусу вільної поверхні. Суцільні лінії відповідають аналітичному розв'язку [7],

а пунктирні – числовим розв’язкам, отриманим при $N = 150$. Похибки в розрахунках Φ_{1l} , $l = 0, 1, 2$, не перевищують $\varepsilon = 0.0025$, а похибки в розрахунках усіх похідних не перевищуються $\varepsilon = 0.01$.

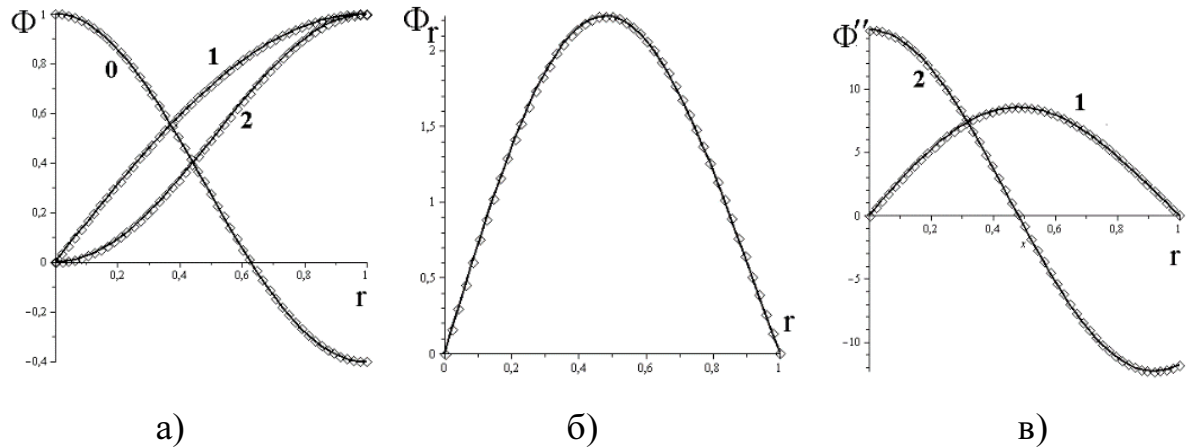


Рисунок 5.14 – Числові та аналітичні форми та похідні

В роботі [126] використано варіаційний принцип Лагранжа, поданий у формулюванні Луковського [108] та Faltinsen [107].

5.5.6 Нелінійні коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при вертикальних збудженнях

Припустимо, що циліндричний контейнер піддається вертикальному гармонічному збудженню $Z_0(t) = \zeta_0 \cos \omega t$ з амплітудою ζ_0 і частотою ω . Розглянуті лише три форми власних коливань: Φ_{01} , Φ_{11} , Φ_{21} . Ці форми та відповідні частоти отримуються числовим методом, за допомогою МГЕ при $N_R = 150$ та $N_\Gamma = 300$. Значення частот подано в таблиці 5.7. Систему нелінійних диференціальних рівнянь (5.70) з вхідними даними (5.71) розв’язано числовим методом для різних значень ζ_0 та ω з використанням методу Рунге-Кутти 7-го та 8-го порядків. Рисунок 5.15 показує зміну з часом підйому вільної поверхні протягом 50 секунд для $\zeta_0 = 0.01$ м і $\omega = 4.14$ Гц. Початкові дані в (5.72) прийнято у вигляді $\beta_{10} = 0.05$. Суцільна чорна лінія відповідає лінійному розв’язку, отри-

маному з рівнянь (5.53), а крапкова червона лінія відображує нелінійний розв'язок.

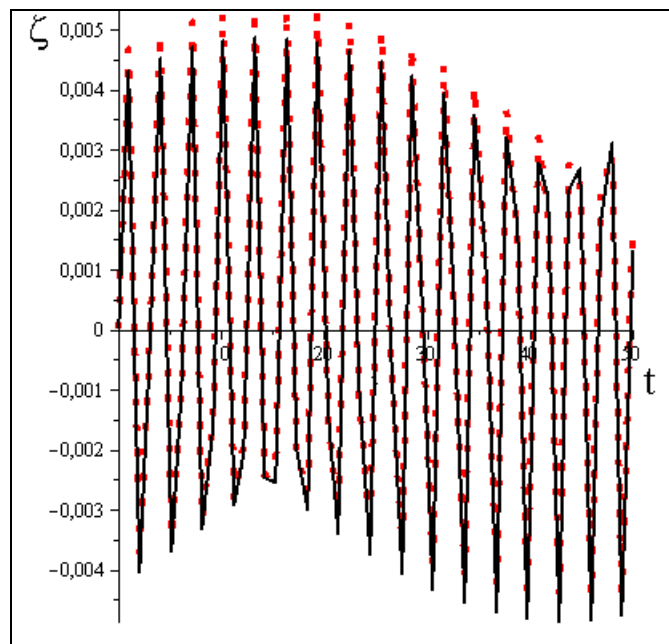


Рисунок 5.15 – Коливання вільної поверхні в залежності від часу, $\omega = 4.14$ Гц

У цьому випадку можна побачити, що лінійні та нелінійні розв'язки істотно не відрізняються. Рисунок 5.16 показує зміну з часом підйому вільної поверхні протягом 50 с при $\zeta_0 = 0.01$ м і $\omega = 8.28$ Гц.

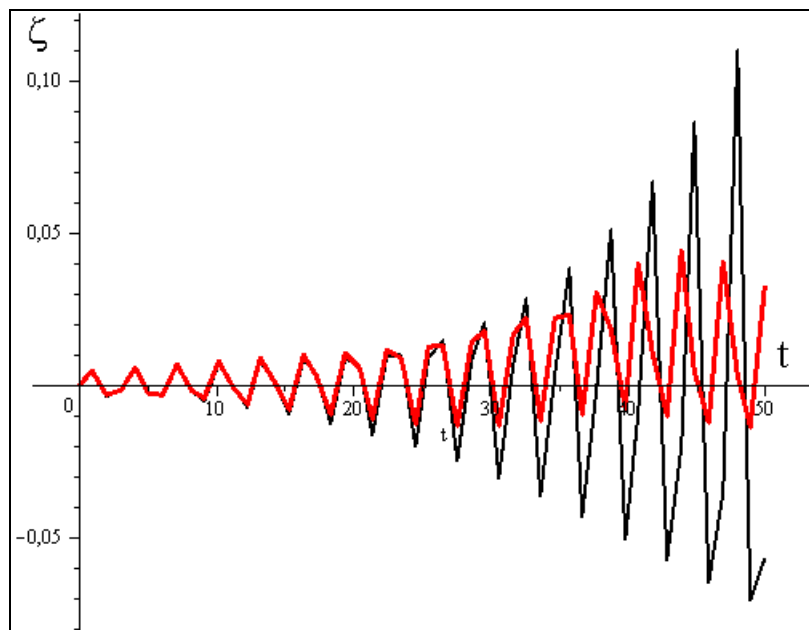


Рисунок 5.16 – Коливання вільної поверхні в залежності від часу, $\omega = 8.28$ Гц

Тут чорна лінія відповідає лінійному розв'язку (5.53), а червона – нелінійному. На початковому етапі і лінійні, і нелінійні розв'язки поводяться подібно, але з часом лінійний розв'язок має тенденцію до розбіжності. Це основна відмінна риса поздовжнього збудження. Коливання вільної поверхні при вертикальному гармонічному збудженні є параметричними. Принциповий параметричний резонанс виникає, коли ємність для рідини вертикально збуджується на частоті, близькій до подвоєної фундаментальної частоти плескань. Зазначимо, що в нелінійному формулюванні спостерігається деяке затухання. На рисунку 5.17 зображено фазові портрети вільних поверхонь поверхні для лінійних (чорна лінія) та нелінійних (червоні точки) процесів.

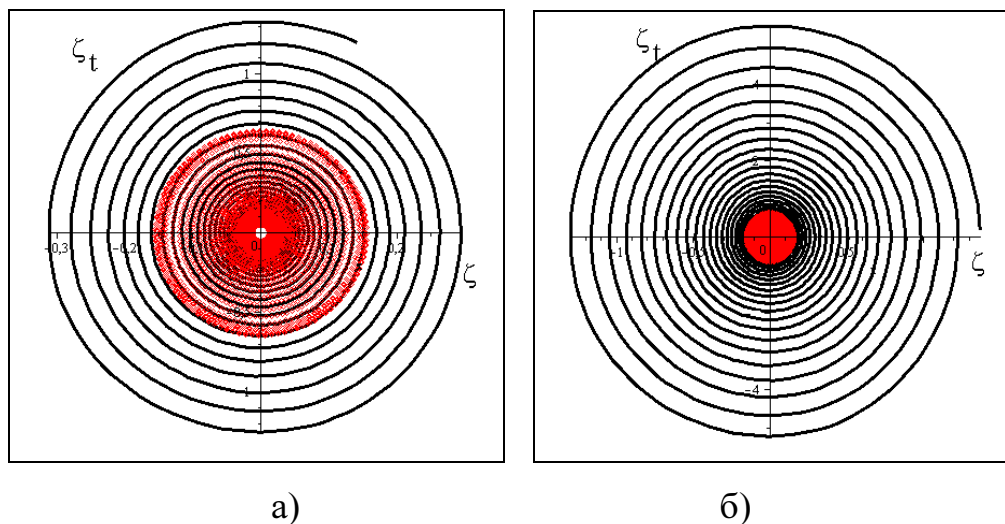


Рисунок 5.17 – Фазові портрети для висоти підйому вільної поверхні

На рис. 5.17 а) зображено фазові портрети висоти вільної поверхні протягом 50 с, а результати на рис. 5.17 б) – коливання протягом 140 с. Отже, можна зробити висновок, що функція ζ залишається обмеженою, при врахуванні нелінійних ефектів.

Висновки за розділом 5

1. Встановлено, що для досить тонких пружних стінок резервуара фундаментальна частота при зв'язаних коливаннях може бути набагато меншою, ніж

частота рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним, а нижча частота коливань оболонки з рідиною наближається до частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі.

2. З отриманих результатів можна зробити висновок про те, що у випадку досить тонких оболонок, коли нижча частота коливань пружних стінок стає приблизно рівною нижчим частотам плескань, відбувається втрата стійкості. При цьому можна стверджувати, що найбільш небезпечними частотами зовнішнього впливу є такі, що наближуються до частот коливань пружних стінок, які в свою чергу близькі до частот коливань вільної поверхні. Тобто, в цьому випадку спектри частот коливань пружних стінок та коливань вільної поверхні рідини не є відокремленими, і впливом пружності стінок неможливо нехтувати.

3. Розроблено числову процедуру на основі методу граничних елементів та мультимодального підходу для числового аналізу ефектів нелінійного плескання в жорстких оболонках обертання при поздовжніх збудженнях. Слабке нелінійне формулювання застосовується в припущенні, що висота вільної поверхні мала порівняно з радіусом оболонки. Для підтвердження отриманих результатів надаються контрольні тести. Ефекти параметричних резонансів досліджуються як у лінійному, так і в нелінійному формулюваннях. Виявлено істотну відмінність з огляду на нелінійне плескання, коли частота збудження близька до подвоєної першої власної частоти. Збільшення амплітуд збудження може призвести до появи хаотичних коливань вільної поверхні. Як обмеження запропонованого підходу слід зазначити, що розглядається лише ідеальна нестислива рідина, а коливання вільної поверхні є відносно малими, без хвиль перекидання та розриву та без розбризкування.

4. Програма для розрахунку нелінійних коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при вертикальних збудженнях наведено у додатку В.

Результати роботи, отримані в даному розділі, опубліковані у роботах автора [21, 134, 154, 159].

Список джерел, які використано у даному розділі, наведено у повному списку використаних джерел [5, 7, 9, 10, 12, 20, 21, 25, 26, 73, 107, 108, 126, 136, 137 – 143, 146 – 149].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню науково-практичної проблеми, що полягає в розробленні сучасного ефективного обчислювального методу для аналізу власних і вимушених коливань складених оболонкових конструкцій з перегородками за різних умов експлуатації. Найбільш важливі наукові і практичні результати роботи полягають у наступному.

1. Розроблено нові математичні моделі для аналізу міцнісних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною та мають перегородки різних типів для демпфування плескань. Обґрунтовано доцільність зведення задач гідропружної взаємодії до граничних інтегральних рівнянь та здійснено зведення систем двовимірних інтегральних рівнянь до одновимірних для вісесиметричних задач.

2. Запропоновано новий метод, заснований на єдиному підході до дослідження динаміки незаповнених оболонок; визначенню частот і форм коливань вільної поверхні рідини в жорстких оболонках; визначенню частот і форм коливань оболонки з рідиною з урахуванням і без урахування сил тяжіння; визначенню динамічних характеристик оболонок з рідиною, підданих дії різних змушувальних сил.

3. Побудовано математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах. Для визначення частот та форм коливань рідини застосовані методи відокремлення змінних, методи граничних елементів та суперелементів. За допомогою метода відокремлення змінних вивчені плескання рідини в призматичному резервуарі без перегородок та з вертикальними хрестовими перегородками, отримані частоти та форми коливань для горизонтального циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною. Методи граничних інтегральних рівнянь та граничних елементів використано при обчисленні динамічних характеристик рідини в жорстких циліндричних резервуарах як без перегородок, так і за наявності горизонтальних або вертикальних перегородок.

Метод граничних суперелементів використано при дослідженні коливань рідини в циліндрико-конічних та циліндрико-сферичних оболонках. Встановлено, що наявність горизонтальних перегородок приводить до зменшення частот коливань вільної поверхні рідини, в той час, як наявність вертикальних перегородок веде до збільшення частот.

Дана оцінка частот і форм вільних коливань рідини в жорстких циліндричних і циліндрико-конічних оболонках з урахуванням дії сили тяжіння. Різниця між частотами плескань для циліндричної і циліндрико-конічної оболонками є істотною лише при наявності невеликої циліндричної частини в складеній оболонці. Ця різниця стає суттєвою, коли враховуються ефекти пружності. Нижча частота відповідає невісесиметричній моді при $m = 1$ для обох оболонок. Припущення про можливість заміни складеної циліндрико-конічної оболонки циліндричною оболонкою рівної висоти прийнятне для аналізу частот плескань, якщо циліндрична частина складеної оболонки досить протяжна.

4. Розроблено метод оцінки вібрації рідини в призматичних та циліндричних резервуарах під дією періодичних горизонтальних і вертикальних навантажень. Найбільш небезпечні коливання рідини мають місце, коли частота горизонтального збудження збігається з власною частотою коливань рідини, а частота вертикального збудження дорівнює подвійному значенню власної частоти. Встановлено, що для досить тонких оболонок (з відносною товщиною менше ніж 0.0015) пружних стінок резервуара фундаментальна частота при зв'язаних коливаннях може бути набагато меншою, ніж частота рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним, а нижча частота коливань оболонки з рідиною наближається до частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі. У випадку досить тонких оболонок, коли нижча частота коливань пружних стінок стає приблизно рівною нижчим частотам плескань, відбувається втрата стійкості. Найбільш небезпечними частотами зовнішнього впливу є такі, що наближуються до частот коливань пружних стінок, які в свою чергу близькі до частот коливань вільної поверхні. В цьому випадку спектри частот коливань пружних стінок та коли-

вань вільної поверхні рідини не є відокремленими і впливом пружності стінок неможливо нехтувати.

5. Розроблено числову процедуру на основі методу граничних елементів та мультимодального підходу для числового аналізу ефектів нелінійного плескання в жорстких оболонках обертання при поздовжніх збудженнях. Ефекти параметричних резонансів досліджуються як у лінійному, так і в нелінійному формулюваннях. Виявлено істотну відмінність з огляду на нелінійне плескання, коли частота збудження близька до подвоєної першої власної частоти. Збільшення амплітуд збудження може призвести до появи хаотичних коливань вільної поверхні. Як обмеження запропонованого підходу слід зазначити, що розглядається лише ідеальна нестислива рідина, а коливання вільної поверхні є відносно малими, без хвиль перекидання та розриву.

6. Коректність чисельних результатів підтверджується порівнянням з точними розв'язками та з чисельними розв'язками, отриманими різними методами.

7. Результати досліджень дисертаційної роботи впроваджені в держбюджетні теми та міжнародний проєкт.

8. Напрями подальших досліджень за темою дисертаційної роботи можуть бути пов'язані з розв'язанням задач про нелінійні коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при вертикальних та горизонтальних збудженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Jiao J., Ren H., Sun S., Adenya C.A. Experimental Investigation of Wave-Induced Ship Hydroelastic Vibrations by Large-Scale Model Measurement in Coastal Waves. *Shock Vib.* 2016. Pp. 1–14.
2. Wu Y., Maeda H., Kinoshita T. The second order hydrodynamic actions on a flexible body. *Seisan-kenkyu Inst. Ind. Sci. Univ.* 1997. 49. Pp. 8–19.
3. Kim J., O’Sullivan J., Read A. Ringing Analysis of A Vertical Cylinder by Euler Overlay Method. *Proceedings of the ASME 2012 31st International Conference on Ocean* (Rio de Janeiro, Brazil, 1–6 July 2012). Rio de Janeiro, Brazil : Offshore and Arctic Engineering, 2012. Pp. 102–104.
4. Lakshmyanarayananana P.A., Temarel P. Application of a two-way partitioned method for predicting the wave-induced loads of a flexible containership. *Appl. Ocean Res.* 2020. No. 96. Pp. 10–15.
5. Datta R., Soares C. Analysis of the hydroelastic effect on a container vessel using coupled BEM–FEM method in the time domain. *Ships Offshore Struct.* 2019, Vol. 15. Pp. 393–402.
6. Wu M., Moan T. Efficient calculation of wave-induced ship responses considering structural dynamic effects. *Appl. Ocean Res.* 2005. No. 27. Pp. 81–96.
7. Буйвол В. М. Коливання та стійкість деформованих систем у рідині. Київ : Наук. думка, 1975. 190 с.
8. Bishop R., Price W. Hydroelasticity of Ships. Cambridge : Cambridge University, 1979. 431 p.
9. Галієв Ш. У. Динаміка гідропружнопластичних систем. Київ : Наук. думка. 1981. 276 с.
10. Wu M., Lehn E., Moan T. Design of segmented model for ship seakeeping tests with hydroelastic effects. *Proceedings of the 6th International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology.* Tokyo, Japan, 19–21 September 2012. Pp. 135–144.
11. Jiao J., Ren H., Sun S., Adenya C. A. Investigation of a ship’s hydroelastic-

ity and seakeeping performance by means of large-scale segmented self-propelling model sea trials. *J. Zhejiang Univ.-SCIENCE*. 2016. Vol. 17. Pp. 468–484.

12. Kim Y., Kim J.-H. Benchmark study on motions and loads of a 6750-TEU containership. *Ocean Eng.* 2016. Vol. 119. Pp. 262–273.

13. Гузь О. М., Кубенко В. Д. Теорія нестационарної аерогідропружності оболонок. Київ : Наук. думка. 1982. 400 с.

14. Tian C., Wu Y. Review of Research on the Hydroelasticity of Ship (in Chinese). *Ship Sci. Technol.* 2008. Vol. 49. Pp. 37–43.

15. Betts C., Bishop R., Price W. The symmetric generalised fluid forces applied to a ship in a seaway. *Int. Shipbuild. Prog.* 1977. No. 199. Pp. 265–278.

16. Yamamoto Y., Sugai K., Inoue H. Wave loads and response of ships and offshore structures from the viewpoint of hydroelasticity. *Proceedings of the International Conferences on Advances in Marine Structure*, Dunfermline, UK, 20–23 May 1986. 15 p.

17. Луковський І. О., Троценко В. О., Усюкин В. І. Взаємодія тонкостінних пружних елементів з рідиною в рухомих порожнинах. Київ : Наук. думка. 1989. 240 с.

18. Kim K., Bang J., Kim J., Kim Y., Kim S., Kim, Y. Fully coupled BEM-FEM analysis for ship hydroelasticity in waves. *Mar. Struct.* 2013. Vol. 33. Pp. 71–99.

19. Datta R., Soares C. Analysis of the hydroelastic effect on a container vessel using coupled BEM–FEM method in the time domain. *Ships Offshore Struct.* 2019. Vol. 15. Pp. 393–402.

20. Senjanović I., Vladimir N., Cho D.S. Application of 1D FEM & 3D BEM. *Hydroelastic Model for Stress Concentration Assessment in Large Container Ships*. 2012. Vol. 63. Pp. 307–317.

21. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University-Science*. 2021. Vol. 33, № 8. Pp. 101589.

22. Paik K, Carrica P., Lee D., Maki K. Strongly coupled fluid-structure interaction method for structural loads on surface ships. *Ocean Eng.* 2009. Vol. 36. Pp. 134–137.

23. Fonseca N., Soares C. Experimental Investigation of the Nonlinear Effects on the Vertical Motions and Loads of a Containership in Regular Waves. *J. Ship Res.* 2004. Vol. 48. Pp. 118–147.
24. Patankar S., Spalding D. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transf.* 1972. Vol. 15. Pp. 787–806.
25. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 1981. Vol. 39. Pp. 201–225.
26. Romano A., Lara J., Barajas G., Paolo B., Bellotti G., Risio M., Losada I., Girolamo P. Tsunamis generated by submerged. *Journal of King Saud University-Science.* 1983. Vol. 21, No. 4. Pp. 21–37.
27. Landslides O. Numerical analysis of the near-field wave characteristics. *J. Geophys. Res. Oceans.* 2020. Vol. 125. Pp. 13–17.
28. Abramson H. N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers. *Applied Mechanics Reviews.* 1963. No. 16. Pp. 501–506.
29. Abramson H. N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. *NASA SP-106.* 1966. Pp. 36–47.
30. Popov G., Sankar S., Sankar T. S., Vatitas G. H. Liquid Sloshing In Rectangular Road Containers. *Computers Fluids.* 1992. Vol. 21, No. 4. Pp. 551-569.
31. Popov G., Sankar S., Sankar T. S., Vatitas G. H. Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1993. Vol. 207. Pp. 137–149.
32. Wang J., Wang Ch., Liu J. Sloshing reduction in a pitching circular cylindrical container by multiple rigid annular baffles. *Ocean Engineering.* 2019. Vol. 171. Pp. 241–249.
33. Celebi M. S., Akyildiz H. Nonlinear Modeling of Liquid Sloshing in a Moving Rectangular Tank. *Ocean Engineering.* 2001. Vol. 29. Pp. 1527–1553.
34. Housner G. W. Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers. *Bulletin of the Seismological Society of America.* 1957. Vol. 47. Pp. 15–35.
35. Housner G. W. Dynamic behavior of water tanks. *Bulletin of Seismological*

Society of America. 1963. Vol. 53. Pp. 381–387.

36. Abramson H. N. The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers. NASA SP-106, Washington : NASA SP-106, 1966. 184 p.

37. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambridge : University Press, 2005. 972 p.

38. Jung M. J., Jo J. C, Jeong S. J. Impact analysis of a water storage tank. *Nuclear Engineering and Technology*. 2006. Vol. 38, No. 7. Pp. 88–102.

39. Ru-De F. Finite element analysis of lateral sloshing response in axisymmetric tanks with triangular elements. *Computational Mechanics*. 1993. Vol. 12. Pp. 51–58.

40. Arafa M. Finite element analysis of sloshing in liquid-filled containers. *Production engineering & design for development*. 2006. Vol. 7. Pp. 793–804.

41. Kutlu A. Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid. *Ocean Engineering*. 2012. Vol. 42. Pp. 112–125.

42. Faltinsen O. M. Analytically approximate natural sloshing modes for spherical tank shape. *J. Fluid Mech*. 2012. Vol. 703. Pp. 391–401.

43. McIver P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech*. 1989. Vol. 201. Pp. 243–257.

44. Ergin A. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2003. Vol. 17. Pp. 927-939.

45. Ergin A. Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary Integral equation method. *Journal of Sound and Vibration*. 2004. Vol. 275. Pp. 489–513.

46. Kim M. S. A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. Part I: New free surface-tracking algorithm and its verification. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2003. Vol. 42. Pp. 765–790.

47. Kim M. S. A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. Part II: application to the cavity filling and sloshing problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2003. Vol. 42. Pp. 791–812.

48. Bauer H. F. Viscous oscillations in a circular cylindrical tank with elastic

surface cover. *Journal of Sound and Vibration*. 2007. Vol. 304. Pp. 1–17.

49. Miles J. W. Ring Damping of Free Surface Oscillations on a Circular Tank. *J Appl. Mech*. 1958. Vol. 25, No. 2. Pp. 274–276.

50. Watson E. B. Resonant frequencies of a fluid in containers with internal bodies. *Journal of Engineering Mathematics*. 1991. Vol. 25. Pp. 115–135.

51. Cho J. R. Numerical study on liquid sloshing in baffled tank by nonlinear finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. Vol. 193. Pp. 281–298.

52. Cho J. R. Finite element analysis of resonant sloshing response in 2-D baffled tank. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 288. Pp. 829–845.

53. Askari E. Coupled vibrations of a partially fluid-filled cylindrical container with an internal body including the effect of free surface. *Journal of Fluids and Structures*. 2011. Vol. 27, No. 7. Pp. 1049–1067.

54. Askari E., Daneshmand F. Coupled vibration of a partially fluid-filled cylindrical container with a cylindrical internal body. *Journal of Fluids and Structures*. 2009. N 25. Pp. 389–405.

55. Gedikli A. Seismic analysis of a liquid storage tank with a baffle. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 223, No. 1. Pp. 141–155.

56. Gedikli A. Evaluation of sloshing problem by variational boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2003. Vol. 27. Pp. 935–943.

57. Gavriluk I. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. 2008. Vol. 25, No. 6. Pp. 518–540.

58. Brebbia C. A., Telle J. C. F., Wrobel L. C. Boundary Element Techniques. Berlin and New York : Springer-Verlag, 1984. 424p.

59. Crotty J. A block equation solver for large un-symmetric matrices arising in the boundary integral equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1982. Vol. 18. Pp. 997-1017.

60. Rigby R. M. OUT-OF-CORE solver for large, multizone boundary element matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1995. Vol. 38. Pp. 157–163.

61. Guorong Y. Straight-line braking dynamic analysis of a partly-filled baffled and unbaffled tank truck. *J. Mech. E.* 2009. Vol. 223. Pp. 11–26.
62. Popov G. Dynamics of liquid sloshing in baffled and compartmented road containers. *J. Fluids Struct.* 1993. No. 7. Pp. 803–821.
63. Lloyd N. The effect of baffle design on longitudinal liquid movement in road tankers: an experimental investigation. *Trans Inst. Chem. Engrs.* 2002. Vol. 80, No. 4. Pp. 181–185.
64. Bermudez A. Finite element analysis of sloshing and hydroelastic vibrations under gravity. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 1999. Vol. 33, No. 2. Pp. 305–327.
65. Jung M. J. Impact analysis of a water storage. *Nuclear Engineering and Technology.* 2006. Vol. 38, No. 7. Pp. 88–102.
66. Hung R. J. Response of gravity level fluctuations on the Gravity Probe-B spacecraft propellant system. *Journal of Propulsion and Power.* 1991. Vol. 7. Pp. 556–564.
67. Degtyarev K. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. *Int. Journal of Modern Physics and Applications.* 2015. Vol. 1, No. 4. Pp. 159–168.
68. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *International Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences.* 2016. Vol. 1, No. 1. Pp. 14–27.
69. Gnitko V. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International.* 2016. Vol. 17, No. 1. Pp. 75–87.
70. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* 2017. Vol. 5, No. 3. Pp. 317–328.
71. Ventsel E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. *Engineering analysis with boundary elements.* 2010. Vol. 34. Pp. 856–862.

72. Lamb H. Hydrodynamics. 6th ed. Cambridge : University Press. 1993. 884 p.
73. Gnitko V. Forced vibrations of tanks partially filled with liquid under seismic load. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2011. Vol. 52. Pp. 285–296.
74. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. Vol. 5, No. 3. Pp. 317–328.
75. Strelnikova E. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with. *J. Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol. 3, No. 1. Pp. 15–52.
76. Cox D. A. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss. *L'Enseignement Mathématique*. 1984. Vol. 30. Pp. 275–330.
77. Naumenko V. V. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*. 2002. No. 26. Pp. 95–98.
78. Faraday M. On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. Londo*. 1831. Vol. 52. Pp. 319-340.
79. Vreeburg J. P. B. Spacecraft Maneuvers and Slosh Control. *IEEE Control Systems Magazine*. 2006. Pp. 206–234.
80. Robinson H. G., Hume C. R. Europa I: Flight Trial of F1 – 5th June. *Engineering analysis with boundary elements*. 1964. Pp. 253–255.
81. Дегтярьов К. Г., Крютченко Д. В., Москаленко Р. П., Пальчіков Р. Г. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних впливів. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 43. С. 20–29.
82. Abramson H. N. The Dynamic Behaviour of Liquids in Moving Containers. NASA SP-106, Washington, D.C. 1966; updated by Dodge F.T. Southwest Research Institute. 2000. Pp. 23-37,
83. Gnitko V. Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *WIT Transaction on Mod-*

elling and Simulation. 2011. Vol. 52. Pp. 285–296.

84. Mohammad A., Saeed R., Sabbagh Y. Investigation of nonlinear sloshing effects in seismically excited tanks. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012. Vol. 43. Pp. 355-365.

85. Faltinsen O. M., Timokha A. N. *Sloshing*. Cambridge : University Press, New York, 2009. 483 p.

86. Kylynyk V., Kriutchenko D., Naumenko Y. Liquid oscillation in a cylindrical-conical shell under the action of vertical and horizontal excitation. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 43. С. 38–45.

87. Hasheminejad S. M., Aghabeigi M. Liquid sloshing in half-full horizontal elliptical tanks. *J. Sound Vib.* 2009. No. 324. Pp. 332–349.

88. Ibrahim R. A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge : University Press, 2005. 957 p.

89. Ebrahimian M., Noorian M. A., Haddadpour H. Equivalent mechanical model of liquid sloshing in multi-baffled containers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2014. No. 47. Pp. 82–95.

90. Ansari M. R., Firouz-Abadi R. D., Ghasemi M. Two phase modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular container. *Ocean Engineering*. 2011. Vol. 36. Pp. 1277–1282.

91. Moiseev N. On the theory of nonlinear vibrations of a liquid of finite volume. *J. Appl. Math. and Mech.* 1958. Vol. 22. Pp. 860–872.

92. Wu C.-H., Faltinsen O. M., Chen B.-F. Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time-independent finite difference and fictitious cell method. *Computers & Fluids*. 2012. No. 63. Pp. 9–26.

93. Zhou D., Wang J. D., Liu W. Q. Nonlinear sloshing of liquid in rigid cylindrical container with a rigid annular baffle: free vibration. *Nonlinear Dynamics*. 2014. No. 78. Pp. 257–276.

94. Raynovskyy I., Timokha A. Steady-state resonant sloshing in an upright

cylindrical container performing a circular orbital motion. *Mathematical Problems in Engineering*. 2018. Vol. 18. Pp. 1–8.

95. Wang J., Lo S. H., Zhou D., Dong Y. Nonlinear Sloshing of Liquid in a Rigid Cylindrical Container with a Rigid Annular Baffle under Lateral Excitation, *Shock and Vibration*. 2019. Pp. 25–37.

96. Demirel E., Aral M. M. Liquid Sloshing Damping in an Accelerated Tank Using a Novel Slot-Baffle Design. *Water*. 2018. No. 10. Pp. 1565.

97. Limarchenko O. S, Nefedov A. A., Semenovich E. A. Manifestation of Secondary Resonances during Pendulum Vibrations of a Tank with Fluid. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. Pp. 741–749.

98. Limarchenko O. S., Sliusarchuk Y. A. Analysis of reservoir's mass influence on the system free-surfaced liquid and spherical reservoir. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2019. № 1. С. 110–113.

99. Лимарченко О. С., Ружицький І. С. Побудова координатних функцій для нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі. *Вісник Київського університету, серія Фізико-математичні науки*. 2009. № 1. С. 59–62.

100. Narimanov G. S. Motion of a tank partially filled with liquid. Role of nonsmall motions of the liquid. *Prikl. Mat. Mekh.* 1957. Vol. 21. Pp. 513–524.

101. Faltinsen O. M. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. *J. Ship. Res.* 1974. No. 18. Pp. 224–241.

102. Hermann M., Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank. I: A single-dominant model. *Math. Models Meth. Appl. Sci.* 2005. No. 15. Pp. 1431–1458.

103. Wang C. Z., Khoo B. C. Finite element analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems in random excitations. *Ocean Engineering*. 2005. No. 32. Pp. 107–133.

104. Zhao D., Hu Z., Chen G., Lim S., Wan S. Nonlinear sloshing in rectangular tanks under forced excitation. *International Journal of Naval Architecture and*

Ocean Engineering. 2018. No. 10. Pp. 545–565.

105. Zhang J., Wu W., Hu J., Zhan B. Study on the liquid water sloshing in two- and three-dimensional models. *3rd International Conference on Machinery Materials and Information Technology Applications (ICMMITA 2015)*. 2015. Pp. 1348–1354.

106. Yan-Sheng Y., Xing-Rui M., Ben-Li W. Multidimensional modal analysis of liquid nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. *Appl. Math. and Mech.* 2007. No. 28. Pp. 1997–2018.

107. Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Lukovsky I. A., Timokha A. N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. *J. Fluid Mech.* 2000. No. 407. Pp. 201–234.

108. Lukovsky I. A., Timokha A. N. Multimodal method in sloshing. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. Pp. 239–253.

109. Dodge F. T., Kana D. D., Abramson H. N. Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers. *AIAA J.* 1965. Vol. 3. Pp. 685–695.

110. Miles J., Henderson D. Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1990. Vol. 22. Pp. 143–165.

111. Cao Y., Graczyk M., Pakozdi C., Lu H., Huang F., Yang C. Sloshing Load Due to Liquid Motion in a Tank (Comparison of Potential Flow, CFD, and Experiment Solutions). *Proceedings of the Twentieth International Offshore and Polar Engineering Conference* (Beijing, China, 17–19 October, 2010). Beijing, China : Polar Engineering Conference, 2010. Pp. 13.

112. Teng Xiaolei. Force Characteristics and Mechanical Topology Optimization of Hydraulic Machine Structures: Statics and Dynamics. *School of Mechanical Engineering, Yangzhou University*. Yangzhou 225127. China, 2023. Pp. 203-207.

113. Kriutchenko D. Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 42. С. 68–76.

114. Ningrum D., Nahak A., Rasidi N. Comparison Analysis of Equivalent Static Earthquake and Spectrum Response Dynamics on Steel Structure. *Asian Jour-*

nal Science and Engineering. 2022. Vol. 1, No 2. Pp. 134–138.

115. Karnovsky I. *Theory of Arched Structures: Strength, Stability, Vibration*. Springer, 2012. Pp. 212–236.

116. Луковский И. А. Введения в нелінійну динаміку жорстких оболонок із порожнинами, що заповнені рідиною. Київ : Наукова думка, 1990. 296 с.

117. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. Москва : Наука, 1972. 736 с.

118. Concus P. Capillary stability in an inverted rectangular tank. *Proc. Symp. Physical and Biological Phenomena in a Weightless State*, E. T. Bendikt and R. W. Halliburton. 1963. Vol. 14. Pp. 21–37.

119. El-Rahib M., Wagner P. Vibration of a liquid with a free surface in a spinning spherical tank. *J. Sound Vib*. 1981. Vol. 76. Pp. 83–93.

120. Fox D. W., Kuttler J. R. Sloshing frequencies. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*. 1983. Vol. 34. Pp. 668–696.

121. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2020. Vol. 11, № 1. Pp. 205–215.

122. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Стрельнікова О. О. Інтегральні рівняння в задачі про вільні та вимушені коливання рідини в жорстких резервуарах. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. № 3 (58). С. 35–47.

123. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D., Hariachevska I. The Mutual Effect Study of Horizontal and Vertical Loads on the Elastic Tank Partially Filled with Liquid. *Engineering World*. 2023. Vol. 5. Pp. 44–51.

124. Krutchenko D., Strelnikova E., Shuvalova Yu. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2017. № 35. С. 31–37.

125. Крютченко Д. В., Гнітько В. І., Шувалова Ю. С. Метод дискретних

особливостей в задачах аналізу коливань резервуарів з рідиною при горизонтальних та вертикальних навантаженнях. *Вісник Національного технічного університету ХПІ. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2019. № 8. С. 133–138.

126. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2020. № 111. Pp. 78-87.

127. Крютченко Д. В. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. *Прикладні питання математичного моделювання.* 2018. №1. С. 107–114.

128. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Київ : Наук. думка. 1989. 283 с.

129. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu., Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. *Part 1. Linear fundamental solutions. Journal of Engineering Mathematics.* 2006. Vol. 54. Pp. 71-88.

130. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 2021. Pp. e201800339.

131. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *Journal of Modern Technology & Engineering.* 2018. Vol. 3, No.1. Pp.15–52.

132. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic. *Impulse and Seismic Lateral Excitations, Journal of Mathematics and Statistical Science.* 2019. № 5. Pp. 31–41.

133. Кишинник В. Ю., Тишковець О. В., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В. Коливання рідини в циліндрично-конічній оболонці під дією вертикального збудження. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2019. № 8. С. 127–132.

134. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Гнітько В. І. Вимушені коливання рідини в циліндричному резервуарі з вертикальними перегородками. *Прикладні*

питання математичного моделювання. 2019. №3. С. 72–86.

135. Kolukula S. S. Dynamic stability of plane free surface of liquid in axisymmetric tanks. *Advances in Acoustics and Vibration*. 2013. 16 p.

136. Ibrahim R. A. Recent advances in liquid sloshing dynamics. *Appl. Mech. Rev.* 2001. Pp. 133–199.

137. Barrientos M., Gatica G., Rodriguez R., Torrejón M. Analysis of a coupled BEM/FEM eigensolver for the hydroelastic vibrations problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2004. Vol. 38. Pp. 653–672.

138. La Spina A., Förster C., Kronbichler M., Wall W. On the role of (weak) compressibility for fluid-structure interaction solvers. *Int J Numer Meth Fluids*. 2020. Pp. 129–147.

139. Ferras D., Manso P.A., Schleiss A.J., Covas D.I. One-Dimensional Fluid-Structure Interaction Models in Pressurized Fluid-Filled Pipes. *A Review. Appl. Sci.* 2018. Pp. 18–44.

140. Varchanis S., Hopkins C.C., Shen A.Q., Tsamopoulos J., Haward S. J. Asymmetric flows of complex fluids past confined cylinders. A comprehensive numerical study with experimental validation. *Phys. Fluids*. 2020. Vol. 32, No. 5. Pp. 053103.

141. Крютченко Д. В. Вимушені коливання рідини в циліндричних резервуарах під дією вертикального збудження. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2018. Вип. 40. С. 23–33.

142. Strelnikova E., Choudhary N., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 120. Pp. 13–27.

143. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech*. 2021. Vol. 101. Pp. e201800339.

144. Amabili M. Eigenvalue problem for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 231. Pp. 79–97.

145. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tank-with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, No. 1. Pp. 14–27.

146. Gnitko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. Vol. 5. Pp. 317–328.

147. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. *2nd Edition, Chapman & Hall/CRC. Boca Raton*. 2003. Pp. 234–240.

148. Clarkson P. A. Painlevé equations – nonlinear special functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2003. Vol. 152. P. 127–134.

149. Крютченко Д. В. Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 44. С. 43–50.

150. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 25, № 3. Pp. 117–132.

151. Sierikova O., Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Reducing Environmental Hazards of Prismatic Storage Tanks under Vibrations. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. Vol. 21. Pp. 249–257.

152. Choundhary N., Usatova O., Kriutchenko D., Strelnikova E. Influence of Compressibility in Fluid – Structure Interaction Problems for Fluid-Filled Reservoirs. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering : Selected Papers from the International Conference on Advanced Mechanical and Power Engineering (CAMPE 2021), October 18-21, 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham : Springer, 2023. Pp. 3–13.

153. Стрельникова Е. А., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Усатова О. А. Анализ устойчивости колебаний жидкости в жестких резервуарах при парамет-

рическом возбуждении. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 68–73.

154. Шувалова Ю. С., Крютченко Д. В., Стрельникова Е. А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. № 3 (58). С. 455–459.

155. Гнитько В. И., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В., Стрельникова Е. А. Моделирование свободных и вынужденных колебаний оболочечных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. № 3 (62), т. 2. С. 71–75.

156. Стрельникова О. О., Тонконоженко А. М., Мироненко М. Л., Крютченко Д. В. Метод граничних елементів в задачах вимушених коливань рідини в оболонках обертання при різних рівнях заповнення. *Комп'ютерна гідродинаміка* : тези сьомої міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 29–30 вересня 2020 р. Київ : ІГМ НАНУ, 2020. С. 68–69.

157. Sierikova E., Strelnikova E., Gnitko V., Kryutchenko D. Reservoirs seismic resistance. *6th International congress on innovative scientific approaches* : Proceedings book, Turkey, Samsun, December 19–20, 2021. Samsun : IKSAD Publishing House, 2021. Pp. 264–268.

158. Sierikova E., Strelnikova E., Kriutchenko D. Shell structures interacting with liquid and their applications in biomechanics. *5th International Anatolian Scientific Research Congress* : Abstract Book, Turkey, Hakkari, July 21–23, 2023. Samsun : IKSAD Publishing House, 2023. P. 280.

159. Degtyariv K., Gnitko V., Kononenko Y., Kriutchenko D., Sierikova O., Strelnikova E. Fuzzy Methods for Modelling Earthquake Induced Sloshing in Rigid Reservoirs. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPI Week)* : Conference Proceedings, Ukraine, Kharkiv, October 03–07, 2022. Kharkiv : National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, 2022. Pp. 297–302.

160. Крютченко Д. В. Вимушені коливання рідини в резервуарі під дією вертикальних та горизонтальних навантажень. *Динаміка, міцність та моделю-*

вання в машинобудуванні : тези доп. II Міжнар. наук.-техн. конфії., м. Харків, 5–8 жовтня 2020 р. Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, 2020. С. 237–238.

161. Myronenko M., Kriutchenko D. Computer simulation in problems of forced vibrations of liquid in shells of revolution at different filling levels. *Scientific community: interdisciplinary research* : Proceedings of the 3th International Scientific and Practical Conference, Germany, Hamburg, March 16–18, 2021. Hamburg, Germany : Busse Verlag GmbH, 2021. Pp. 303–307.

162. Крютченко Д. В. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях* : праці міжнар. наук.-техн. конф., м. Харків, 22–25 травня 2018 р. Харків : ХНУ ім. Каразіна, 2018. С. 148–150.