

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Модель оптимального розподілу

рекламного бюджету кафедри

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи ПМм-23-1

Ханін Г.С.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Ламтюгова С.М.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Ханіну Глібу Сергійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Модель оптимального розподілу рекламного бюджету кафедри

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи модель оптимального розподілу рекламного бюджету

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Таблиця моделей розподілу бюджету _____

2. Графік лінії регресії _____

3. Таблиця початкових даних для тестової задачі _____

4. Симплекс-таблиці кроків методу _____

5. Зображення результатів роботи програми _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Ламтюгова С.М.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 62 с., 7 табл., 3 рис., 1 дод., 13 джерел.

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ, МАРКЕТИНГ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ОПТИМІЗАЦІЯ, РЕГРЕСІЙНА МОДЕЛЬ, РЕКЛАМА, РОЗПОДІЛ БЮДЖЕТУ, СИМПЛЕКС-МЕТОД.

Об'єкт дослідження – процеси планування, організації та реалізації маркетингових та рекламних заходів.

Мета роботи – розробка алгоритму та програмна реалізація моделі оптимального розподілу бюджету кафедри для прийняття найефективнішого рішення щодо вибору рекламних каналів та маркетингових заходів.

Методи дослідження – методи розв'язання задач лінійного програмування, симплекс-метод.

У кваліфікаційній роботі вирішено задачу формування рекламного бюджету кафедри на основі розробленої математичної моделі, із застосуванням методів лінійного програмування. Було проведено огляд математичних моделей у маркетингу, методів їх розв'язання та зроблено висновок про доцільність використання симплекс-методу для вирішення задач лінійного програмування. За допомогою мови програмування Python та бібліотеки SciPy створено комп'ютерну програму для реалізації розв'язання цієї задачі, а також виконано аналіз отриманих результатів. Наведено результати обчислювального експерименту для тестової задачі.

ABSTRACT

Explanatory note: 62 p., 7 tables, 3 figures, 1 appendix, 13 sources.

ADVERTISING, BUDGET ALLOCATION, LINEAR PROGRAMMING, MARKETING, MATHEMATICAL MODEL, OPTIMIZATION, REGRESSION MODEL, SIMPLEX METHOD.

The object of research is the processes of planning, organizing and implementing marketing and advertising activities.

The purpose of the work is to develop an algorithm and program implementation of a model of optimal budget distribution of the department to make the most effective decision regarding the choice of advertising channels and marketing activities.

Methods of research are methods for solving linear programming problems, simplex method.

The qualification work solves the problem of forming the advertising budget of the department on the basis of the developed mathematical model, using linear programming methods. A review of mathematical models in marketing, methods for solving them was carried out and a conclusion was made about the feasibility of using the simplex method for solving linear programming problems. Using the Python programming language and the SciPy library, a computer program was created to implement the solution to this problem, and the results obtained were analyzed. The results of the computational experiment for the test problem are presented.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Математичні моделі процесів маркетингу	9
1.1.1 Математична модель реклами	10
1.1.2 Моделі розподілу бюджету	14
1.2 Методи розподілу рекламного бюджету	17
1.2.1 Розрахунок загального бюджету на просування	17
1.2.2 Регресійні методи та моделі прогнозування	19
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	24
1.4 Постановка задач дослідження	25
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	27
2.1 Класична задача математичного програмування	27
2.2 Задача лінійного програмування та симплексний метод її розв’язання	34
2.3 Розробка рекламного бюджету	41
2.4 Оцінка економічної ефективності рекламної стратегії компанії	44
Висновки за розділом 2	46
3 Програмна реалізація	48
3.1 Мова програмування Python та її можливості для вирішення математичних задач	48
3.2 Опис програми	49
Висновки за розділом 3	51
4 Результати обчислювального експерименту	52
Висновки за розділом 4	57
Висновки	58
Перелік джерел посилання	59
Додаток А Лістинг програми	60

ВСТУП

Актуальність теми. Університет, як і кафедра знаходяться у конкурентному середовищі серед усього ринку освіти, подібному до конкуренції серед торговельних корпорацій, фірм, тощо. Виходячи з цього кафедрі необхідно оптимізувати використання своїх ресурсів для отримання найкращих результатів у вигляді підвищення кількості абітурієнтів. Тема роботи є актуальною, оскільки використання математичних методів, зокрема оптимізаційних, у плануванні рекламної діяльності є не лише сучасним підходом, а й дозволяє підвищити ефективність роботи кафедри в умовах обмежених фінансових можливостей.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка алгоритму та програмна реалізація моделі оптимального розподілу бюджету кафедри для прийняття найефективнішого рішення щодо вибору рекламних каналів та маркетингових заходів. Для досягнення поставленої мети під час проходження професійної практики необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задач «оптимізації розподілу рекламного бюджету»;
- провести огляд і аналіз існуючих методів розв’язання задач «оптимізації розподілу рекламного бюджету»;
- обрати відповідну до завдання модель оптимізації та дослідити її;
- написати алгоритм та програмну реалізацію для задачі;
- зробити оцінку якості використаної моделі і висновки щодо ефективності;
- на основі отриманих результатів зробити висновки щодо ефективності результатів проведеної рекламної кампанії.

Об’єктом дослідження є процеси планування, організації та реалізації маркетингових та рекламних заходів.

Предметом дослідження є модель оптимального розподілу рекламного бюджету кафедри.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи регресивного аналізу та симплекс-метод для розв'язання задачі лінійного програмування

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на III Міжнародній молодіжній науково-практичній конференції англійською мовою «Навчання і викладання: у світі після війни» (м. Харків, 8 листопада 2024 року) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичні моделі процесів маркетингу

Маркетинг щільно включився в діяльність усіх сучасних компаній, які за-
провадили різні відділи маркетингу, аналітики, маркетингових досліджень то-
що. Тенденція не оминула стороною і державні установи, примусивши їх до ви-
користання різноманітних інструментів просування, аналітики, збору інформа-
ції, комунікації з клієнтами.

Більшість помилково ототожнює маркетинг зі збутом і рекламою, коли це
всього лише верхівка маркетингового айсберга. Якщо діяч ринку добре попра-
цював над такими розділами маркетингу, як виявлення споживчих потреб, роз-
робка відповідних товарів і встановлення на них відповідної ціни, налагоджен-
ня системи їхнього розподілу та ефективного стимулювання, такі товари швид-
ко увійдуть у ринок та займуть лідируючі позиції.

Один із провідних теоретиків із проблем управління, Пітер Друкер, гово-
рить про це так: «Мета маркетингу – зробити зусилля зі збуту непотрібними.
Його мета – так добре пізнати і зрозуміти клієнта, що товар або послуга будуть
точно підходити останньому і продавати себе самі» [2].

Це зовсім не означає, що зусилля зі збуту та його стимулювання втрача-
ють своє значення. Ідеться радше про те, що вони стають частиною масштаб-
нішого «комплексу маркетингу», тобто набору маркетингових засобів, які не-
обхідно гармонійно пов'язати один з одним, щоб домогтися максимального
впливу на ринок.

Філіп Котлер, економіст, маркетолог, автор понад 80 книжок із класично-
го маркетингу та управління, дає таке визначення маркетингу [2]:

Маркетинг – вид людської діяльності, спрямованої на задоволення потреб
і бажань за допомогою обміну.

Процес обміну потребує роботи. Тому, хто хоче продавати, необхідно

шукати покупців, виявляти їхні потреби, проєктувати відповідні товари, просувати їх на ринок, складати, перевозити, формувати ціни тощо. Основу діяльності маркетингу складають такі заняття, як розробка товару, дослідження, налагодження комунікації, організація розподілу, встановлення цін, розгортання служби сервісу.

У зв'язку з обширністю маркетингу загалом, керівники з маркетингу почали використовувати інструменти для контролю маркетингових заходів, аналізу результатів, виявлення нових ринків тощо. Основним і найпоширенішим поняттям сучасної системи маркетингу є комплекс маркетингу [2].

Комплекс маркетингу (marketing mix, 4P) – набір змінних чинників маркетингу, що піддаються контролю, сукупність яких фірма використовує в прагненні викликати бажану відповідну реакцію з боку цільового ринку.

У комплекс маркетингу входить усе, що фірма може зробити для впливу на попит свого товару. Численні можливості можна об'єднати в чотири основні групи: товар (product), ціна (price), методи поширення (placement), просування (promotion).

Звертаючись до системи аналізу маркетингової інформації, можна так само відзначити використання багатьма фірмами наборів математичних моделей, що сприяють прийняттю оптимальніших маркетингових рішень діячами ринку. Прикладами таких моделей є [2]:

- модель системи ціноутворення;
- модель розрахунку ціни;
- модель методики вибору місця розташування;
- модель складання комплексу засобів реклами;
- модель розроблення рекламного бюджету.

1.1.1 Математична модель реклами

Під час складання математичної моделі будемо виходити з наступних

тверджень [3]:

- на кожного споживача реклами (покупця) тією чи іншою мірою впливають усі види реклами ($i = \overline{1, n}$);
- усіх споживачів можна розділити на кілька цільових груп ($j = \overline{1, m}$), доступність яких до окремих видів реклами або сприйнятливність до цих видів різна;
- з минулого досвіду відомо (проводилося опитування), під впливом якого виду реклами слухач ухвалив рішення про покупку;
- усі покупці купують однойменний товар, але низка з них (студенти, військовослужбовці, пенсіонери тощо) мають певну знижку в ціні товару;
- з минулого досвіду продажів також відомо, скільки було витрачено коштів на кожен вид реклами і скільки покупців кожної групи зробило покупки.

Певна кількість покупців у кожній цільовій групі зроблять покупку (придбають послугу) не під впливом будь-якого виду реклами, а за інформацією від знайомих, друзів, колег по роботі тощо, тобто «з вуст у уста». Вважатимемо, що ця кількість покупців у такій самій пропорції спожила всі види реклами, як уся цільова група, що справедливо, тому що той, хто їм передав інформацію, отримав її не на порожньому інформаційному полі.

Приймемо, що коефіцієнти a_{ij} розмірністю грн./люд. є питомими витратами на одного покупця j -ї групи i -го виду реклами; b_i , грн. – загальні витрати кожного виду реклами в якійсь окремій рекламній кампанії, а c , грн. – вартість купівлі товару (послуги).

Приймемо також, що x_j – кількість людей у кожній цільовій групі, які зробили покупки; k_j – пільговий ціновий коефіцієнт на купівлю для j -ї цільової групи споживачів.

З урахуванням зроблених припущень математичну модель рекламної кампанії можна представити в наступному вигляді.

Цільова функція:

$$c \sum_{j=1}^m k_j x_j \Rightarrow \max. \quad (1.1)$$

Обмеження описуються сукупністю n нерівностей, у кожній з яких i фіксовано, а j – варіюється:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j \leq b_1; \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i; \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} x_j \leq b_n, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.3)$$

Система рівнянь (1.1) – (1.3) являє собою традиційну математичну модель лінійного програмування. Використовуючи її, за відомого розподілу коштів між видами рекламних заходів b_i , можна визначити кількість покупців (користувачів послуг) у кожній цільовій групі x_j [3].

Якщо ж стоїть складніша задача – визначити оптимальний розподіл загальної суми коштів V , виділеної на рекламну кампанію, з урахуванням забезпечення максимальної кількості покупців, то вищепредставлену систему треба доповнити таким обмеженням [3]:

$$\sum_{i=1}^n b_i \leq V.$$

Тепер задачу можна вирішити, наприклад, методом комп'ютерного моделювання за допомогою MS Excel.

Найскладнішим і найвідповідальнішим етапом у формуванні математичної моделі є визначення числових значень матриці коефіцієнтів a_{ij} системи рівнянь (1.2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Якщо проаналізувати одне i -те рівняння із системи (1.4)

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_j,$$

то можна бачити, що воно являє собою розподіл коштів (b_i) будь-якого виду реклами між групами покупців (x_j) через коефіцієнти a_{ij} .

Коефіцієнт a_{ij} має залежати від ступеня доступності реклами даного виду (i), ступеня сприйнятливості її j -ю групою покупців і визначатися числом l_j покупців у групі j і загальними витратами на рекламу i -го виду (b_i) [3]:

$$a_{ij} = Q_{ij} \frac{b_i}{l_j},$$

де Q_{ij} – частка коштів від витрат на i -й вид реклами (b_i), що припадає на j -ту групу покупців, яка якраз і визначає ступінь впливу цього виду реклами на j -ту цільову групу.

Оцінка Q_{ij} за відсутності минулого досвіду проводиться експертним шляхом, на основі ретельного аналізу цільової групи, каналів поширення рек-

ламної інформації на цю групу.

Визначення a_{ij} значно спрощується в разі, якщо покупці кожної з цільових груп вказують, під дією якого виду реклами вони зробили покупку.

Коефіцієнти a_{ij} справедливі лише для рекламної кампанії попереднього періоду (року) і можуть із певним ступенем достовірності дати змогу прогнозувати результати наступної рекламної кампанії, за результатами якої необхідно знову коригувати значення коефіцієнтів за запропонованою методикою.

Коливання коефіцієнтів a_{ij} зумовлюються зміною вподобань слухачів, зміною інтенсивності рекламних заходів, їх доступності, ступенем охоплення потенційних слухачів, зміною освітніх програм, купівельною спроможністю населення, дією конкурентів, якістю освітніх послуг та їх вартістю [3].

1.1.2 Моделі розподілу бюджету

Сенс цих моделей полягає в оптимальному розподілі заданої суми (бюджету), виділеної на маркетингові зусилля (табл. 1.1). Нижче наведено кілька найпоширеніших варіантів завдань, які лежать в основі моделей розподілу:

- виділена сума витрат на рекламу розподіляється між n рекламними засобами;
- заданий бюджет необхідно розподілити між m сегментами ринку (наприклад, між m країнами);
- увесь розглянутий період часу розбивається на інтервали $1, 2, \dots, T$, та бюджет розподіляється за інтервалами, наприклад витрати на рекламу розподіляються за тижнями протягом року.

Узагальнена модель виглядає наступним чином:

$$O = f(I_{111}, \dots, I_{ijt}, \dots, I_{nmT}) \rightarrow \text{opt},$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T$$

за умови

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T k_{ijt} I_{ijt} \leq A, \alpha \leq I_{ijt} \leq \beta,$$

де O – цільова функція;

I_{ijt} – маркетингові змінні, які необхідно розподілити;

A – сумарний виділений бюджет;

k_{ijt} – вартість одиниці I_{ijt} ;

α, β – константи.

Таблиця 1.1 – Приклади моделей розподілу бюджету

№ п/п	Змінна	Приклад
1	I_i	Розподіл бюджету на рекламу між i рекламними засобами. Розподіл бюджету на рекламу між різноманітними товарами.
2	I_j	Розподіл бюджету на рекламу між сегментами ринку.
3	I_t	Частота відвідування магазину фактичними потенційними покупцями.
4	I_{it}	Число глядачів i -ї телепрограми протягом T періодів часу. Розподіл рекламного бюджету між рекламними засобами i протягом T періодів часу.
5	I_{jt}	Розподіл суми, виділеної на будівництво нових торгових точок у різноманітних сегментах ринку, протягом часу T .

У якості прикладу розглянемо модель 5 з табл.1.1 [4]:

$$\max OT = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{t=1}^T \left(N_{jt} \sum_{k=1}^T \frac{1}{(1+r)^k} R_{jt} \bar{S}_{jk} \right) + p_{j0} \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+r)^t} R_{jt} \bar{S}_{jt} \right],$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^m c_{jt} N_{jt} \leq \bar{c}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$N_{jt} \leq L_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$S_{jt} = \frac{\hat{K}_2 T_{jt}}{O_{jt} + (1 + \hat{K}_2 - \hat{K}_1) P_{jt}},$$

де OT – сумарний дохід;

N_{jt} – кількість торгових точок, побудованих у регіоні j за t -й рік;

r – дохід з капіталу;

R_{jt} – дохід від продажу одиниці товару в регіоні j за t -й рік;

\bar{S}_{jt} – середній обсяг збуту в одній торговій точці в регіоні j за t -й рік;

P_{jt} – кількість торгових точок компанії в регіоні j у t -му році;

c_{jt} – вартість будівництва однієї торгової точки в регіоні j у t -му році;

\bar{c}_t – капітал, який необхідно розподілити за t -й рік;

L_{jt} – верхня межа кількості торговельних точок, які можуть бути побудовані в регіоні j за період t ;

T_{jt} – сумарна кількість торгових точок у регіоні j за рік t ;

O_{jt} – кількість конкуруючих торгових точок;

\hat{K}_1, \hat{K}_2 – оцінка значень параметрів K_1 та K_2 .

Тут

$$p_{jt} = p_{j0} + \sum_{k=1}^j N_{jk}.$$

Оптимізація здійснюється нелінійними методами. Задача розподілу рек-

ламного бюджету формулюється як задача оптимального управління.

1.2 Методи розподілу рекламного бюджету

1.2.1 Розрахунок загального бюджету на просування

Однією з найважчих маркетингових проблем, що стоять перед фірмою, є ухвалення рішення про розмір асигнувань на просування. Король універмагів Джон Ванамейкер говорив: «Я знаю, що половина моєї реклами йде даремно, от тільки не знаю, яка половина. Я витрачаю на рекламу 2 млн дол., але не можу сказати, чи є це половина того, що потрібно, чи вдвічі більше, ніж потрібно» [2].

Тому немає нічого дивного в тому, що різні галузі промисловості й різні фірми витрачають на просування суми, які значною мірою відрізняються одна від одної своїми розмірами. Витрати на цілі просування можуть становити від 30 до 50% у виробництві косметики і всього 10-20% – у важкому машинобудуванні. У рамках будь-якої конкретної галузі можна знайти і тих, хто витрачає багато, і тих, хто витрачає мало.

Розглянемо чотири найпоширеніші методи, якими користуються під час розроблення генеральних кошторисів витрат на будь-який вид діяльності зі складу комплексу просування, скажімо, на рекламу [2].

Метод обчислення «від готівкових коштів». Багато фірм виділяють у бюджет на стимулювання певну суму, яку вони, на власну думку, можуть собі дозволити витратити.

Подібний метод визначення розмірів бюджету цілком і повністю ігнорує вплив просування на обсяг збуту. У результаті величина бюджету з року в рік залишається невизначеною, що ускладнює перспективне планування ринкової діяльності.

Метод обчислення «у відсотках до суми продажів». Багато фірм обчис-

люють свої бюджети просування в певному відсотковому відношенні або до суми продажів (поточних чи очікуваних), або до продажної ціни товару.

Вважається, що цей метод має низку переваг. По-перше, розрахунок у відсотках до обсягу продажів означає, що сума асигнувань на просування, швидше за все, змінюватиметься залежно від того, що фірма «може собі дозволити». По-друге, цей метод змушує керівництво враховувати взаємозв'язок між витратами на просування, продажною ціною товару і сумою прибутку в розрахунку на товарну одиницю. По-третє, він сприяє підтримці конкурентної стабільності такою мірою, що фірми-конкуренти витрачають на просування приблизно один і той самий відсоток суми своїх продажів.

Однак, не рахуючи цих переваг, метод обчислення у відсотках до суми продажів майже нічим не виправдовує свого існування. Він будується на обхідних міркуваннях про те, що збут є причиною просування, а не наслідком і веде до того, що розмір бюджету визначається готівковими коштами, а не наявними можливостями. Він заважає проведенню експериментів з іншими видами просування і прийомами наступальних, агресивних витрат. Залежність бюджету просування від змін показників збуту за роками заважає перспективному плануванню. Цей метод не дає логічних підстав для вибору конкретного відсоткового показника, за винятком хіба що випадків дій на основі минулого досвіду або нинішніх дій конкурентів. І нарешті, він не заохочує формування бюджету просування з урахуванням того, на що заслуговує кожен окремий товар і кожна окрема збутова територія.

Метод конкурентного паритету. Деякі фірми встановлюють розмір свого бюджету просування на рівні відповідних витрат конкурентів.

Немає жодних підстав вважати, що у конкурентів більш здорові погляди на те, скільки саме слід витратити на цілі просування. Фірми так різко відрізняються одна від одної своїми репутаціями, ресурсами, можливостями і цілями, що розміри їхніх бюджетів просування навряд чи можна вважати надійними орієнтирами. Крім того, немає жодних доказів на користь твердження, що бюджети, сформовані за методом конкурентного паритету, перешкоджають розго-

ртянню гострої боротьби у сфері просування.

Метод обчислення «виходячи з цілей і завдань». Метод обчислення «виходячи з цілей і завдань» вимагає, щоб діячі ринку формували свої бюджети просування на основі вироблення конкретних цілей, визначення завдань, які належить вирішити для досягнення цих цілей, і оцінки витрат на вирішення цих завдань. Сума всіх цих витрат і дасть орієнтовну цифру бюджетних асигнувань на просування.

Перевага цього методу в тому, що він вимагає від керівництва чіткого викладу своїх уявлень про взаємозв'язок між сумою витрат, рівнем рекламних контактів, інтенсивністю випробування та регулярного використання товару [4].

Повна відповідь на питання про те, наскільки вагому роль слід відвести просуванню в рамках усього комплексу маркетингу (порівняно з діяльністю з удосконалення товару, зниженням цін, збільшенням кількості послуг тощо), залежить від того, на якому етапі життєвого циклу перебувають товари фірми, чи є вони стандартними товарами широкого вжитку, чи різко відрізняються від інших виробів, відчувається постійна потреба в цих товарах, чи їх доводиться продавати «під тиском», та інших міркувань. Теоретично величина генерального кошторису на просування має встановлюватися на рівні рівності між максимальним прибутком з кожної грошової одиниці, вкладеної в просування, і максимальним прибутком з кожної грошової одиниці, особливо вигідно витраченої на інші цілі. Однак використання цього принципу – справа нелегка.

1.2.2 Регресійні методи та моделі прогнозування

Регресія – статистична залежність результативного показника Y від чинників X_i , що на нього впливають, виражена у вигляді графіка або функції регресії. У маркетингу результативними показниками можуть бути обсяги продажів, виручка, прибуток, а факторами – ціни, витрати на просування, кількість місць продажів тощо.

Функція регресії – аналітичний вираз статистичного зв'язку середніх значень результативного признаку Y від середніх значень факторів X_i , що впливають на нього.

Теоретична лінія регресії – графік функції регресії, яка виражає зміну середніх величин результативного признаку Y залежно від зміни середніх величин факторного признаку X (рис. 1.1).

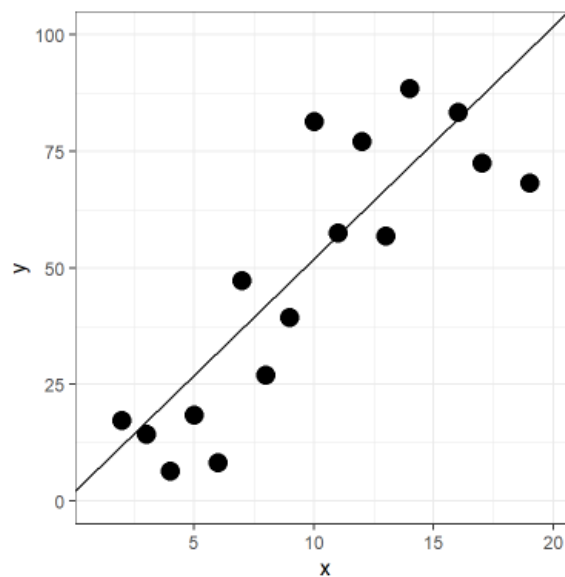


Рисунок 1.1 – Теоретична лінія регресії показника Y від фактору X

Точками на рис. 1.1 позначені фактичні значення (X, Y) фактору X та відповідного йому результативного показника Y , які називаються кореляційним полем [5].

Для побудови графіка емпіричної лінії регресії діапазон зміни фактору X ділять на рівні інтервали, в кожному з яких визначають середні арифметичні значення показників \bar{X} та \bar{Y} , після чого будується графік (\bar{X}, \bar{Y}) .

Теоретична лінія регресії будується за допомогою функції регресії.

Функція регресії обирається аналогічно трендовим моделям так, щоб сума квадратів відхилень емпіричного графіку регресії від точок теоретичної лінії регресії була мінімальною.

У загальному випадку функція регресії має вигляд [5]:

$$\bar{Y} = F(X_1, X_2, \dots, X_m) + \varepsilon,$$

де \bar{Y} – результативна ознака;

X_m – фактори;

m – кількість факторів моделі;

$F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ – функція регресії;

ε – випадкова величина.

Регресія з одним фактором називається однофакторною, з двома факторами – двофакторною, якщо факторів багато – багатофакторною. Крім цього, регресія може бути лінійною, нелінійною, мультиплікативною.

Модель багатофакторної лінійної регресії має вигляд [5]:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \dots, \quad (1.5)$$

де Y – результативна ознака;

$X_1, X_2, X_3 \dots$ – фактори;

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ – коефіцієнти регресії.

Модель багатофакторної регресії також може мати вигляд [5]:

$$Y = a_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3 + \dots, \\ Z_i = F_i(X_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

де $F_i(X_i)$ – однофакторні моделі регресії показника Y від факторів X_i .

Модель багатофакторної мультиплікативної регресії має вигляд [5]:

$$Y = a_0 \cdot \prod_{i=1}^n X_i^{a_i}. \quad (1.7)$$

Мультиплікативну регресію (1.7) зводять до лінійної регресії за допомо-

гою логарифмування та визначення коефіцієнтів лінійної регресії для логарифмів факторів показника Y . Потім зворотною заміною повертають до мультиплікативної моделі регресії [5].

Етапи побудови регресійної моделі:

- а) вибір результативного показника;
- б) вибір факторів, що впливають на результативний показник;
- в) збір статистичних даних значень показника і факторів за минулий період;
- г) оцінка коефіцієнтів парної кореляції між показником і фактором та між факторами;
- д) усунення мультиколінеарності між факторами;
- е) побудова моделі регресії;
- ж) оцінка адекватності моделі та її покращення;
- з) прогнозування значень результативного показника при зміні значень факторів.

Для багатофакторної моделі (1.5) і (1.6) коефіцієнти (a_0, a_1, a_2, \dots) визначаються із системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot \overline{X_1} + a_2 \cdot \overline{X_2} + \dots + a_n \cdot \overline{X_n} = \overline{Y}; \\ a_0 \cdot \overline{X_1} + a_1 \cdot \overline{X_1^2} + a_2 \cdot \overline{X_1 \cdot X_2} + \dots + a_n \cdot \overline{X_1 \cdot X_n} = \overline{X_1 \cdot Y}; \\ \dots \\ a_0 \cdot \overline{X_n} + a_1 \cdot \overline{X_n \cdot X_1} + a_2 \cdot \overline{X_n \cdot X_2} + \dots + a_n \cdot \overline{X_n^2} = \overline{X_n \cdot Y}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Середні значення факторів у (1.8) визначаються за даними минулого періоду.

При виборі факторів для моделі регресії виробляється оцінка їх впливу на результативний показник за допомогою коефіцієнту парної лінійної кореляції r_{xy} , який визначається за формулами [5]:

$$r_{xy} = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_y \sigma_x},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2},$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

де σ_y , σ_x – середньоквадратичні відхилення відповідного значення змінної.

За такими ж формулами визначається коефіцієнт парної кореляції між різними факторами X_i та X_j .

Властивості коефіцієнту парної лінійної кореляції:

- а) $-1 \leq r_{xy} \leq 1$, або $|r_{xy}| \leq 1$;
- б) якщо $r_{xy} > 0$, тоді при зростанні фактору X показник Y у середньому зростає. Між фактором X і показником Y є прямий, додатний зв'язок;
- в) якщо $r_{xy} < 0$, тоді при зростанні фактору X показник Y у середньому зменшується. Між фактором X і показником Y є зворотний, від'ємний зв'язок;
- г) якщо $r_{xy} = 0$, тоді при зростанні фактору X показник Y у середньому залишається постійним. Між фактором X і показником Y немає статистичного зв'язку, але може бути функціональний;
- д) чим ближче модуль $|r_{xy}|$ до одиниці, тим сильніше лінійна залежність показника Y від фактору X ;
- е) якщо $|r_{xy}| = 1$, тоді між показником Y і фактором X є функціональна лінійна залежність: $Y = a + b \cdot X$.

Квадрат коефіцієнту кореляції r_{xy}^2 називається коефіцієнтом детермінації. Величина коефіцієнта детермінації для регресії зображує, у який мірі зміна результативного признаку Y зумовлена впливом фактору X у відсотках, після множення на 100.

При виборі факторів виходять з економічного сенсу задачі і вимоги, щоб їх коефіцієнт детермінації з цільовим показником був якомога ближче до одиниці.

При побудові моделі регресії потрібно мінімізувати мультиколінеарність факторів, аби уникнути хибних кореляцій. Найбільш розповсюджені методи: виключення однієї з двох сильно пов'язаних змінних, у якій коефіцієнт детермінації з цільовим показником менше; використання гребеневої регресії; перехід від початкових змінних до головних компонентів.

Якщо між двома факторами X_i та X_j коефіцієнт детермінації $r_{ij}^2 > 0,5$, то обирається один з них з найбільшим коефіцієнтом детермінації r_{xy}^2 з цільовим показником y [5].

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

У межах внутрішньо університетського маркетингу кафедра стикається з викликом просування своїх послуг в умовах обмеженого бюджету. Щоб ефективно вирішити цю задачу, важливо обрати таку модель, яка дозволить максимально раціонально використовувати наявні ресурси та фінанси, забезпечуючи найкращі результати. Такий підхід допоможе досягти поставлених цілей навіть за умов обмеженого бюджету.

Розглянемо задачу максимізації сумарної ефективності вкладення коштів у рекламні заходи за умов наявних обмежень на рекламний бюджет і на кошти, що можуть бути виділені на кожен рекламний захід окремо [6]:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^M \bar{\alpha}_{ij} x_{ij} \rightarrow \max_{x_{ij}},$$

де x_{ij} – витрати на j -й рекламний захід у i -му кварталі;

$\bar{\alpha}_{ij}$ – середня ефективність j -го рекламного заходу у i -му кварталі, та розраховується за формулою:

$$\bar{\alpha}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{ij}^k,$$

де α_{ij}^k – показник ефективності j -го рекламного заходу в i -му кварталі k -го року:

$$\alpha_{ij}^k = \frac{y_{ij}^k}{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^M y_{ij}^k},$$

де y_{ij}^k – кількість обраного показника після проведення j -го рекламного заходу в i -му кварталі k -го року;

M – кількість рекламних заходів.

Бюджет на проведення рекламної кампанії є обмеженим, тому

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^M x_{ij} \leq X.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Метою дослідження є розробка алгоритму та програмна реалізація моделі оптимального розподілу бюджету кафедри для прийняття найефективнішого рішення щодо вибору рекламних каналів та маркетингових заходів.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задач «оптимізації розподілу рекламного бюджету»;

- провести огляд і аналіз існуючих методів розв’язання задач «оптимізації розподілу рекламного бюджету»;

- обрати відповідну до завдання модель оптимізації та дослідити її;
- написати алгоритм та програмну реалізацію для задачі;
- зробити оцінку якості використаної моделі і висновки щодо ефективності;
- на основі отриманих результатів зробити висновки щодо ефективності результатів проведеної рекламної кампанії.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Класична задача математичного програмування

Класична задача математичного програмування полягає у виборі таких значень змінних, які відповідають системі обмежень у вигляді рівнянь, щоб досягти максимального або мінімального значення заданої функції. [7]. Класична задача на максимум полягає в тому, щоб знайти

$$\max_x F(x)$$

при умові, що

$$g(x) = b, \quad (2.1)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при умові, що

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1; \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2; \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m. \end{cases}$$

Змінні x_1, x_2, \dots, x_n – складові n -вимірному вектора-стовпця \vec{x} – являють собою засоби, інструментальні величини. Функція $F(\cdot)$ – це цільова функція, а функції обмежень $g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_m(\cdot)$ – це складові m -вимірному вектора стовп-

ця \vec{g} , вектор-стовпчик \vec{b} містить константи обмежень b_1, b_2, \dots, b_m .

Нехай число змінних n і число обмежень m є скінченними числами, $n > m$. Різниця $n - m$ називається числом ступенів свободи задачі. Припустимо також, що задано $m + 1$ безперервно диференційованих функцій $F(\cdot)$, $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$, \dots , $g_m(\cdot)$, таких, що не містять випадкових елементів. Вектор \vec{b} складається з фіксованих дійсних чисел. Вектор \vec{x} – будь-який вектор із дійсними компонентами, що задовольняє m обмеженням із (2.1).

Геометрично кожна з рівностей, що входять до системи обмежень

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

визначає множину точок у n -вимірному евклідовому просторі E^n , а перетин усіх m множин являє собою допустиму множину

$$X = \{x \in E^n \mid g(x) = b\}.$$

Геометричне тлумачення задачі полягає в тому, що в допустимій множині відшуковують точку (або множину точок), де досягається поверхня найбільшого рівня цільової функції (тобто поверхня, що є найвіддаленішою в напрямі якнайшвидшого зростання). Оскільки цільова функція – неперервна, а досяжна множина – замкнута, то розв'язок існує в тому разі, якщо допустима множина буде непорожньою й обмеженою.

Особливий клас задач становлять задачі оптимізації за відсутності обмежень ($m = 0$). У разі коли $m = 0$, а функція залежить від скалярного аргументу ($n = 1$), задача полягає у відшуканні дійсного числа x , що максимізує $F(x)$ [8]. Якщо в такій задачі внутрішній локальний максимум досягається в x^* , то це означає, що для всіх точок $x^* + \Delta x$, близьких до x^*

$$F(x^*) \geq F(x^* + \Delta x), \quad (2.2)$$

де Δx – довільне мале прирощення аргументу.

Нехай функція $F(x)$ має безперервні та скінченні похідні першого та другого порядків. Тоді функцію, що стоїть у правій частині нерівності (2.2), в околиці точки x^* можна розкласти за формулою Тейлора (із залишковим членом):

$$F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \frac{dF}{dx}(x^*)\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2F}{dx^2}(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2.$$

Підставивши цей розклад в (2.2), прийдемо до основної нерівності:

$$\frac{dF}{dx}(x^*)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dx^2}(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2 \leq 0,$$

яка має виконуватися для будь-якого довільно малого приросту Δx . Якщо Δx більше нуля, то, розділивши обидві частини основної нерівності на Δx і переходячи до межі при Δx , яка прагне до 0, отримаємо, що

$$\frac{dF}{dx}(x^*) \leq 0.$$

Аналогічне міркування за від'ємних Δx призводить до нерівності

$$\frac{dF}{dx}(x^*) \geq 0.$$

З основної нерівності отримуємо необхідну умову першого порядку – перша похідна в точці локального максимуму обертається в нуль:

$$\frac{dF}{dx}(x^*) = 0. \quad (2.3)$$

Якщо умови першого порядку виконані, то з основної нерівності випливає, що

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x^* + \theta\Delta x) \leq 0, \quad (2.4)$$

оскільки $(\Delta x)^2$ завжди більший за 0.

Оскільки (2.4) виконується для всіх Δx , а друга похідна за припущенням безперервна, приходимо до необхідної умови другого порядку:

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x^*) \leq 0. \quad (2.5)$$

Отже, умови (2.3) і (2.5) являють собою відповідно умови першого і другого порядків, необхідні для існування локального максимуму в x^* [8].

Достатні умови наявності в x^* суворого локального максимуму полягають у тому, що перша похідна в цій точці утворює нуль, а друга похідна суворо менша за нуль.

Таким чином, якщо виконано умови

$$\frac{dF}{dx}(x^*) = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x^*) < 0,$$

то x^* є точкою строгого локального максимуму:

$$F(x^*) > F(x^* + \Delta x).$$

Достатність цих умов можна довести за допомогою основної нерівності або простішим способом, використовуючи теорему про середнє значення [8]. За теоремою про середнє значення

$$F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \frac{dF}{dx}(x^* + \theta \Delta x) \Delta x, \quad (2.6)$$

де $0 < \theta < 1$.

Функція $F(x)$ безперервно диференційована, а її перша похідна дорівнює нулю і суворо спадає при x^* . Отже, якщо $\Delta x > 0$, то

$$\frac{dF}{dx}(x^* + \theta \Delta x) < 0,$$

тоді як, якщо $\Delta x < 0$, то

$$\frac{dF}{dx}(x^* + \theta \Delta x) > 0.$$

У будь-якому випадку

$$\frac{dF}{dx}(x^* + \theta \Delta x) \Delta x < 0,$$

так що з (2.6) випливає

$$F(x^*) > F(x^* + \Delta x).$$

Задачу оптимізації за відсутності обмежень для функції векторного аргументу ($m = 0$, $n > 1$) можна досліджувати способом, подібним до викладеного вище [8]. Формулювання задачі полягає в знаходженні

$$\max_x F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Припустимо, що локальний максимум існує в x^* :

$$F(x^*) \geq F(x^* + h\Delta x). \quad (2.7)$$

Це означає, що

$$F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq F(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2, \dots, x_n^* + h\Delta x_n),$$

де h – довільне мале позитивне число;

Δx_j – довільна зміна x_j ($j = 1, 2, \dots, n$);

$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)'$ визначає деякий напрямок у E^n .

Функцію в правій частині (2.7) можна розглядати як функцію h . Розкладання за формулою Тейлора в околі точки $h = 0$ дає

$$F(x^* + h\Delta x) = F(x^*) + h \frac{\partial F}{\partial x}(x^*) \Delta x + \frac{1}{2!} h^2 (\Delta x)' \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^* + \theta h \Delta x) (\Delta x), \quad (2.8)$$

де $0 < \theta < 1$.

Вектор $\frac{\partial F}{\partial x}$ у (2.8) – градієнт функції, а матриця $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ – матриця Гессе:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

або у розгорнутому вигляді:

$$F(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2, \dots, x_n^* + h\Delta x_n) = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) +$$

$$+ h \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \Delta x_j + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(x_1^* +$$

$$+ \theta h \Delta x_1, x_2^* + \theta h \Delta x_2, \dots, x_n^* + \theta h \Delta x_n) \Delta x_j \Delta x_k.$$

Зіставляючи вирази (2.7) і (2.8), прийдемо до основної нерівності:

$$h \frac{\partial F}{\partial x}(x^*) \Delta x + \frac{1}{2} h^2 (\Delta x)' \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^* + \theta h \Delta x) (\Delta x) \leq 0, \quad (2.9)$$

яка має виконуватися для всіх напрямків Δx і для всіх малих додатних чисел h .

Для того, щоб вивести з основної нерівності необхідну умову першого порядку, розділимо обидві частини (2.9) на h і перейдемо до межі за h , яка прагне до 0. У результаті отримуємо, що в точці локального максимуму градієнт функції дорівнює нульовому вектору:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*) = 0.$$

Точка, в якій усі частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, називається стаціонарною. Отже, за доведеним, точка локального максимуму завжди є стаціонарною.

2.2 Задача лінійного програмування та симплексний метод її розв'язання

Розглянемо основну задачу лінійного програмування, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (i = \overline{1, m}),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Перепишемо цю задачу у векторній формі. Знайти максимум функції

$$F = CX$$

за умов

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0, \quad (2.10)$$

$$X \geq 0,$$

де $C = (c_1; c_2; \dots; c_n)$;

$$X = (x_1; x_2; \dots; x_n);$$

CX – скалярний добуток;

P_1, \dots, P_n та P_0 – m -вимірні вектори-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах системи рівнянь:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \dots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

План $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ називається опорним планом основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j , що входять до розкладання (2.10) з додатними коефіцієнтами x_j , лінійно незалежна [9].

Оскільки вектори $P_j \in m$ -вимірними, то з визначення опорного плану випливає, що число його додатних компонент не може бути більшим, ніж m .

Опорний план називається не виродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент, інакше він називається виродженим

Розв'язок будь-якої задачі лінійного програмування можна знайти за допомогою різних методів, одним із яких є симплекс-метод. Перш ніж застосувати зазначений метод, слід записати вихідну задачу у формі основної задачі лінійного програмування, якщо вона не має такої форми запису.

Симплексний метод розв'язання задачі лінійного програмування ґрунтується на переході від одного опорного плану до іншого, за якого значення цільової функції зростає (за умови, що дана задача має оптимальний план і кожен її опорний план є не виродженим). Зазначений перехід можливий, якщо відомий який-небудь вихідний опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план мо-

жна безпосередньо записати [10].

Нехай потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при умовах

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_1 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ x_1 + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Тут a_{ij} , b_i та c_j ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) – задані постійні числа ($m < n$ та $b_i > 0$).

Векторна форма цієї задачі має такий вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{2.11}$$

при умовах

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m + \dots + x_nP_n = P_0, \tag{2.12}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{2.13}$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$F_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \dots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_m P_m = P_0,$$

тоді за визначенням опорного плану $X = (b_1; b_2; \dots; b_m; 0; \dots; 0)$ є опорним планом даної задачі (останні $n - m$ компонент вектора X дорівнюють нулю). Цей план визначається системою одиничних векторів P_1, P_2, \dots, P_m , які утворюють базис m -вимірного простору. Тому кожен із векторів P_1, P_2, \dots, P_n , а також вектор P_0 можуть бути представлені у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису.

Нехай

$$P_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} P_i, \quad (j = \overline{0, n}).$$

Покладемо $z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}$ ($j = \overline{1, n}$), $\Delta_j = z_j - c_j$ ($j = \overline{1, n}$). Оскільки вектори

P_1, P_2, \dots, P_m , – одиничні, тоді $x_{ij} = a_{ij}$ та $z_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$, а $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$.

Теорема. Опорний план $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_m^*; 0; 0; \dots; 0)$ задачі (2.11) – (2.13) є

оптимальним, якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого j ($j = \overline{1, n}$).

Теорема. Якщо $\Delta_k < 0$ для деякого $j = k$ і серед чисел a_{ik} ($i = \overline{1, m}$) немає додатних, то цільова функція (2.11) задачі (2.11) – (2.13) не обмежена на множині її планів.

Теорема. Якщо опорний план X задачі (2.11) – (2.13) не вироджений і $\Delta_k < 0$, але серед чисел a_{ik} є додатні, то існує опорний план X' такий, що $F(X') > F(X)$.

Сформульовані теореми дають змогу перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним, і виявити доцільність переходу до нового опорного плану [10].

Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється виключенням з вихідного базису якого-небудь з векторів і введенням у нього нового вектора. Як вектор, що вводиться в базис, можна взяти будь-який із векторів P_i , що має індекс j , для якого $\Delta_j < 0$. Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$ і вирішено ввести в базис вектор P_k .

Для визначення вектора, що підлягає виключенню з базису, знаходять $\min(b_i / a_{ik})$ для всіх $a_{ik} > 0$. Нехай цей мінімум досягається при $i = r$. Тоді з базису виключають вектор P_r , а число a_{rk} називають роздільним елементом.

Стовпчик і рядок, на перетині яких міститься вирішальний елемент, називають напрямними.

Після виділення напрямного рядка і напрямного стовпчика знаходять новий опорний план і коефіцієнти розкладання векторів P_j через вектори нового базису, що відповідає новому опорному плану. Це легко реалізувати, якщо скористатися методом Жордана-Гауса. При цьому можна показати, що позитивні компоненти нового опорного плану обчислюються за формулами [10]:

$$b'_i = \begin{cases} b_i - \left(\frac{b_r}{a_{rk}} \right) a_{ik} & \text{при } i \neq r; \\ \frac{b_r}{a_{rk}} & \text{при } i = r, \end{cases} \quad (2.14)$$

а коефіцієнти розкладання векторів P_j через вектори нового базису, що відповідає новому опорному плану, за формулами:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}} \right) a_{ik} & \text{при } i \neq r; \\ \frac{a_{rj}}{a_{rk}} & \text{при } i = r. \end{cases} \quad (2.15)$$

Після обчислення b'_i і a'_{ij} згідно з формулами (2.14) і (2.15) їхні значення заносять у таблицю. Елементи $(m+1)$ -го рядка цієї таблиці можуть бути обчислені або за формулами:

$$F'_0 = F_0 - \left(\frac{b_r}{a_{rk}} \right) \Delta_k, \quad (2.16)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}} \right) \Delta_k, \quad (2.17)$$

або на підставі визначення.

Наявність двох способів знаходження елементів $(m+1)$ -го рядка дає змогу здійснювати контроль правильності проведених обчислень.

Отже, перехід від одного опорного плану до іншого зводиться до переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої. Елементи нової симплекс-таблиці можна обчислити як за допомогою рекурентних формул (2.14) – (2.17), так і за правилами, що безпосередньо впливають із них.

Ці правила полягають у такому [10]. У стовпчиках векторів, що входять у базис, на перетині рядків і стовпчиків однойменних векторів проставляють одиниці, а всі інші елементи цих стовпчиків вважають рівними нулю.

Елементи векторів P_0 і P_j у рядку нової симплекс-таблиці, у якому записано вектор, що вводиться в базис, отримують з елементів цього ж рядка вихідної таблиці, діленням їх на величину роздільного елемента. У стовпці C у рядку вектора, що вводиться, проставляють величину C_k , де k – індекс вектора, що вводиться.

Після заповнення нової симплекс-таблиці переглядають елементи $(m + 1)$ -го рядка. Якщо всі $z'_j - c_j \geq 0$, то новий опорний план є оптимальним. Якщо ж серед зазначених чисел є від'ємні, то, використовуючи описану вище послідовність дій, знаходять новий опорний план. Цей процес продовжують доти, доки або не отримують оптимальний план задачі, або не встановлюють її нерозв'язність.

Отже, знаходження оптимального плану симплексним методом містить у собі такі етапи [10]:

- знайти опорний план;
- скласти симплекс-таблицю;
- з'ясувати, чи є хоча б одне від'ємне число Δ_j . Якщо ні, то знайдений опорний план оптимальний. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового опорного плану;
- знайти напрямні стовпець і рядок. Напрямний стовпець визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом Δ_j , а напрямний рядок – мінімальним із відношень компонент стовпця вектора P_0 до позитивних компонент напрямного стовпця;
- за формулами (2.14) – (2.17) визначити додатні компоненти нового опорного плану, коефіцієнти розкладання векторів P_j за векторами нового базису і числа F'_0 , Δ'_j . Усі ці числа записати в нову симплекс-таблицю;

– перевірити знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний і необхідно перейти до нового опорного плану, то повертаються до етапу 4, а в разі одержання оптимального плану або встановлення нерозв'язності процес розв'язання задачі закінчують.

Перевагами симплекс-методу при розв'язанні задачі лінійного програмування є його ефективність та швидкість при значній кількості змінних, гнучкість, завдяки якій метод підходить для вирішення як стандартних задач, так і проблем з обмеженням. Точність методу дозволяє знайти конкретні значення оптимального рішення, а не просто наближені результати, як це може бути при використанні інших методів.

2.3 Розробка рекламного бюджету

Управління рекламою полягає здебільшого в постановці цілей та плануванні заходів, спрямованих на досягнення цих цілей, у втіленні планів у життя і контролі за їх здійсненням. Головним знаряддям, що забезпечує виконання всіх цих функцій, є рекламний бюджет. У певному сенсі вся адміністративна діяльність – огляд, контроль проведених і планування майбутніх заходів – зосереджена навколо бюджету. Розробка бюджету сприяє більш точному плануванню. Вона сприяє і найвигіднішому розподілу ресурсів, і вона ж допомагає тримати витрати в заздалегідь визначених рамках.

Рекламний бюджет передбачає прийняття рішень у двох сферах [11]:

– загальна кількість коштів, що виділяються на рекламу і часто іменуються асигнуваннями;

– яким чином кошти будуть використовуватися.

Як і під час ухвалення більшості інших рішень, у рекламі визначення суми витрат – здебільшого питання здорового судження. Коли відсутня методика точного визначення внеску реклами в підвищення збуту і прибутку, розпорядники не можуть покладатися на якісь прості формули під час розроблення бю-

джету. Навпаки, вони повинні враховувати безліч чинників і виходити на цифру, яка, на їхню думку, найповніше відповідає вимогам конкретного поєднання обставин.

Один з підходів до оцінки взаємозв'язку між рекламою і збутом продукції полягає у вивченні історичних даних про характер взаємовідносин між обсягами продажів і рівнями витрат на рекламу: як змінювався в минулому обсяг продажів при зміні витрат на рекламу? Запитання можуть бути сформульовані і більш конкретно: що відбувалося зі збутом продукції при зміні рекламних бюджетів у тих чи інших географічних регіонах або при перерозподілі витрат на рекламу серед різних засобів масової інформації? Такий підхід не потребує надто великих фінансових витрат, оскільки в даному випадку використовуються вже наявні дані [11].

Систематичний спосіб аналізу таких залежностей полягає у використанні методу статистичних досліджень, який називається багатокроковим регресійним аналізом. На підставі стандартної регресійної моделі можна спробувати передбачити обсяг збуту на деякий період часу за допомогою таких різновидів незалежних змінних.

Найчастіше користуються показником процентного відношення витрат на рекламу до загальної вартості продажів [11]:

$$\frac{\text{Асигнування на рекламу}}{\text{Загальна вартість продажів}} \cdot 100\%.$$

Сам по собі показник реклама/збут ще не є визначальним фактором. Він являє собою чисельний вираз співвідношення двох змінних величин.

Показник реклама/збут можна вивести на основі минулого досвіду. Збереження незмінним одного й того самого показника передбачає, що знайдено оптимальне співвідношення між сумою витрат на рекламу і загальною вартістю продажів. Збільшення або зменшення цього співвідношення передбачає необхідність витратити на рекламу більше або менше заради досягнення запланова-

ного рівня збуту. Розпорядник, який вдається до цього підходу, напевно, поцікавиться і співвідношенням реклама/збут у конкурентів, а заодно і середнім показником у рамках товарної категорії. І тільки після цього буде ухвалено рішення збільшити витрати, зменшити їх або залишити на колишньому рівні.

Після затвердження показника реклама/збут найголовніше – дати прогноз збуту товару на майбутній рік. Для цього знадобиться і прогноз продажів у галузі загалом. Обидва ці прогнози можна зробити досить довільно, продовживши на майбутнє наявну тенденцію розвитку, а можна і з більшою точністю, якщо вивчити всі внутрішні змінні, підконтрольні фірмі, та всі зовнішні змінні, які перебувають поза її контролем. Серед підконтрольних внутрішніх змінних – виробничі потужності, вдосконалення товару, ціноутворення і діяльність зі стимулювання збуту. Серед зовнішніх змінних – стан економіки, ставлення споживачів, дії конкурентів і вартість засобів реклами. Через зростання вартості засобів реклами останніми роками рекламодавцям довелося різко збільшувати свої рекламні бюджети тільки заради того, щоб зберегти на колишньому рівні кількість закупленого місця і часу.

Ще один спосіб визначити показник реклама/збут – встановити суму витрат на рекламу товарної одиниці. При розрахунках на основі кількості вироблених товарних одиниць, рекламний бюджет можна оперативного скоригувати залежно від коливань збуту і виробництва.

Для ув'язки в єдиному показнику витрат конкурентів, витрат на рекламу і загальної вартості продажів користуються величиною рекламних витрат на одиницю частки ринку. У розмірі витрат на одиницю частки ринку враховуються і дії конкурентів, бо частка ринку кожної окремої фірми залежить від частки ринку, яку займають інші. Цей показник корисний при порівнянні ефективності реклами окремих фірм. Вважається, що фірма, яка витрачає на рекламу в розрахунку на одиницю частки ринку меншу суму, домагається більшої ефективності.

2.4 Оцінка економічної ефективності рекламної стратегії компанії

Проведення ефективних рекламних заходів є потужним засобом збільшення кількості потенційних студентів для університету або кафедри.

Основним матеріалом для аналізу економічної ефективності результатів рекламної діяльності кафедри слугують статистичні та бухгалтерські дані про зростання абітурієнтів та зацікавлених студентів. На основі цих даних можна досліджувати економічну ефективність одного рекламного засобу, окремої рекламної кампанії та всієї рекламної діяльності кафедри загалом.

Одним із найважливіших чинників, який необхідно враховувати під час розгляду цієї проблеми, є відставання відгуку ринку на здійснений рекламний вплив, у чому й полягає інерційність реклами. Врахування цієї закономірності, як правило, не проводиться в існуючих розробках оцінки ефективності реклами. Динамічна модель, яку будують за допомогою сучасних пакетів прогнозування й опрацювання інформації, дає змогу врахувати цей важливий чинник.

Функціонування моделі виражається в низці етапів:

- визначення видів реклами, які будуть використані;
- складання календарного плану рекламної кампанії;
- розрахунок потоків витрат на рекламу та коригування плану кампанії;
- визначення загальної економічної ефективності рекламної кампанії.

Розглянемо рекламну кампанію, що складається з N кроків, на яких здійснюється планування рекламної кампанії та оцінка її ефективності [12]. Як показники, що характеризують стан системи, розглядатимемо витрати на рекламу та обсяг продажів.

Нехай Y_k – обсяг продажів на кроці k рекламної кампанії, а C_k – витрати на рекламу на кроці k рекламної кампанії. Нульовий крок вводиться для позначення базового рівня, відносно якого визначається динаміка уваги потенційних абітурієнтів. Ефект від реклами визначається наступним чином:

$$\Delta Y_k = Y_k - Y_0,$$

де ΔY_k – ефект кроку k .

Показник загального економічного ефекту розраховується, як накопичена величина ефекту кроків рекламної кампанії:

$$E = \sum_{k=1}^N \Delta Y_k, \quad (2.18)$$

де E – загальний економічний ефект.

Будемо припускати, що значення загального економічного ефекту в розглянутій моделі в основному пов'язане з впливом реклами, на яку кафедра витратила кошти. Бюджет рекламної кампанії виражається таким чином:

$$C = \sum_{k=1}^N C_k, \quad (2.19)$$

де C – сумарні витрати на рекламу (бюджет рекламної кампанії).

Відношення величин (2.18) і (2.19) визначить показник загальної економічної ефективності рекламних заходів

$$F = \frac{E}{C}.$$

Додатково може бути обчислений порівняльний показник ефективності, що визначає розмір зміни виручки під впливом реклами:

$$F_1 = \frac{E_1}{C},$$

де $E_1 = Y^f - Y_0^f$ – порівняльний показник економічного ефекту рекламної

кампанії;

Y_0^f – обсяг продажів за період, що передує рекламній кампанії;

Y^f – обсяг продажів за такий самий за тривалістю період після проведення рекламної кампанії.

Цей показник визначає, яку величину залучених абітурієнтів кафедри забезпечила одиниця вкладених у рекламу коштів.

У сучасних умовах рекламний бюджет, як правило, обмежений на всьому проміжку планування:

$$C \leq C_{\max},$$

де C_{\max} – встановлена сума бюджету рекламної кампанії.

Для прогнозу зміни обсягу залучених студентів внаслідок проведення рекламних заходів можна використовувати динамічну модель Койка, яка враховує той факт, що вплив реклами характеризується певною затримкою і перенесенням на інший період:

$$Y_t = a + bU_t + cY_{t-1},$$

де Y_t – обсяг залучених абітурієнтів в t -му періоді;

U_t – витрати на рекламу в t -му періоді;

c – середньозважені витрати на рекламу в минулих періодах;

Y_{t-1} – приріст обсягу залучених абітурієнтів в $(t - 1)$ -му періоді.

Висновки за розділом 2

У розділі було проведено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі математичного моделювання оптимізації розподілу рекламного бюджету.

1. Розглянуто загальне поняття задачі класичного лінійного програмування та його корисність при використуванні разом з математичними моделями оптимізації.

2. Описано симплекс-метод, який використовується для задачі знаходження максимуму заданих функцій. Описано його алгоритм, основні поняття та переваги серед інших методів.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Мова програмування Python та її можливості для вирішення математичних задач

Python – це високорівнева мова програмування загального призначення, що була створена Гвідо ван Россумом у 1991 році. Її популярність значною мірою обумовлена простотою синтаксису, багатofункціональністю та широким спектром застосувань. Python активно використовується у наукових дослідженнях, прикладній математиці, розробці математичних моделей, вирішенні задач лінійного програмування та оптимізації [13].

Завдяки бібліотекам, таким як Pandas для роботи з даними та Matplotlib або Seaborn для візуалізації, Python дозволяє легко створювати, аналізувати та тестувати математичні моделі. Наприклад, у фінансовому аналізі Python використовують для моделювання ринків, а в машинному навчанні – для побудови алгоритмів прогнозування.

Python став стандартом для наукових обчислень завдяки своїм потужним бібліотекам, таким як NumPy, SciPy та SymPy. Вони забезпечують можливість виконання операцій з багатовимірними масивами, числових інтеграцій, вирішення диференціальних рівнянь, а також аналітичного обчислення виразів. NumPy забезпечує швидкі та потужні операції з багатовимірними масивами даних, що є базовою потребою в математичному моделюванні та числових розрахунках. SciPy розширює цей функціонал, додаючи модулі для оптимізації, інтегрування, розв'язання диференціальних рівнянь та інших наукових обчислень. Зокрема, модуль SciPy.optimize широко використовується для розв'язання нелінійних задач оптимізації. Завдяки цим бібліотекам Python стає універсальним інструментом для роботи в таких галузях, як логістика, економіка, машинне навчання та наукові дослідження [13].

Ці інструменти дозволяють ефективно формулювати математичні моделі, налаштовувати параметри задачі і знаходити оптимальні розв'язки в різних

прикладних галузях, таких як логістика, енергетика, економіка та виробниче планування.

Python вирізняється серед інших мов програмування своєю простотою, багатофункціональністю та широкою екосистемою. Його простий синтаксис забезпечує легкість вивчення та швидкий початок роботи, що робить мову привабливою для новачків.

Крім того, Python працює на всіх популярних операційних системах, а його активна спільнота сприяє розвитку мови та доступності великої кількості ресурсів. Завдяки інтеграції з іншими мовами програмування, такими як C++, Java чи Fortran, Python дозволяє використовувати його можливості у поєднанні з високопродуктивними рішеннями для складних задач.

У підсумку, Python – це потужний інструмент, який надає дослідникам і розробникам необхідний функціонал для вирішення складних математичних задач і побудови ефективних моделей у різних прикладних галузях, що цілком стане в нагоді при використанні у побудові математичної моделі оптимізації розподілу рекламного бюджету.

3.2 Опис програми

Програмна реалізація полягає в розв'язанні задачі лінійного програмування шляхом використання симплекс-методу. Для цього використовується мова програмування Python і бібліотека SciPy.

Після імпортування потрібних бібліотек, задається математична модель. Початкові дані, такі як кількість каналів реклами, показник кількості кліків та витрати на кожен канал вводяться вручну користувачем. Після цього програма підраховує показник CPC (Cost-per-Click або ціна за клік), та перетворює коефіцієнти цільової функції.

Змінні визначаються як кількість кліків за рекламним оголошенням, що призводить до безпосереднього ознайомлення абітурієнта з інформацією про

кафедру. У заданій функції використовуються дані з рекламної кампанії, проведеної для залучення абітурієнтів у 2024-му році на кафедрі прикладної математики у Харківському національному університеті радіоелектроніки. Тут x_1 – кількість кліків за рекламою в соціальних мережах Meta (Facebook та Instagram), x_2 – кількість кліків за рекламою в додатку Telegram, x_3 – кількість кліків за пошуковою рекламою в Google.

Далі задаються обмеження в рамках існуючої задачі. Спочатку задається їх кількість, після чого вже формується самі обмеження, які задаються наступним чином – в залежності від того, чи приймає участь змінна у нерівності їй дається ідентифікатор 1 (змінна бере участь) або 0 (змінна не бере участь). Тобто користувач зазначає змінні, які будуть обмежені, після чого задаються праві частини нерівностей, які змістовно мають сенс як обмеження бюджету (загального та на окремі канали). Також програма встановлює межі змінних, визначаючи невід’ємність цих показників. Введення початкових даних показано на рис. 3.1.

```

Введіть кількість каналів реклами:
Кількість: 3
Введіть кількість кліків за кожним каналом:
Кліки у каналі 1: 2715
Кліки у каналі 2: 400
Кліки у каналі 3: 1002
Введіть витрати на кожен канал реклами:
Витрати для каналу 1: 4247
Витрати для каналу 2: 1400
Витрати для каналу 3: 2500
Введіть обмеження:
Кількість рядків: 3
Введіть індикатори змінних для кожного обмеження (1 - бере участь, 0 - ні) (через пробіл):
Обмеження 1: 1 1 1
Обмеження 2: 1 0 1
Обмеження 3: 1 0 0
Введіть праві частини обмежень (через пробіл):
Обмеження: 9000 4000 2000

```

Таблиця початкових даних:

Канал	Кліки	Витрати	CPC
1	2715	4247	1.56427
2	400	1400	3.5
3	1002	2500	2.49501

Рисунок 3.1 – Введення початкових даних

Коли задані всі початкові дані, програма формулює математичну модель на основі введених показників, та вирішує її завдяки функції `Linprog`, використовуючи симплекс-метод. Перед початком обчислень вмикається таймер та вмикається після отримання результатів. Завдяки цьому можна оцінити швидкість роботи симплекс-методу та функції `Linprog`.

У завершенні роботи, програма виводить початкові дані у вигляді таблиці, перетворені коефіцієнти цільової функції, кінцеві результати у вигляді таблиці та максимум цільової функції, який відображає очікувану кількість кліків. Також програма показує кількість виконаних ітерацій симплекс-методом.

Висновки за розділом 3

У розділі було надано відомості щодо мови програмування Python, її переваг над іншими мовами програмування, можливостями та використання бібліотеки `SciPy`, яка допомагає вирішувати складні математичні задачі оптимізації. Також було описано принцип роботи програми, яка в своїй основі має математичну модель оптимізації, завдяки якій можливо обчислювати різні важливі маркетингові показники та отримувати плани максимізації результатів.

1. Python – це потужна та універсальна мова програмування, яка вирізняється простим синтаксисом, багатофункціональністю та широким спектром застосувань. Завдяки багатій екосистемі бібліотек, таких як `NumPy`, `SciPy`, `Pandas`, `Matplotlib` та інші, Python забезпечує ефективне вирішення складних математичних задач, моделювання, аналіз даних і візуалізацію.

2. Програма для розв'язання задачі лінійного програмування з використанням Python та `SciPy` є зручним інструментом для оптимізації рекламного бюджету, забезпечуючи швидкий аналіз даних і максимізацію кількості кліків. Її інтерактивність, автоматизація та зрозуміле виведення результатів роблять її корисною для прийняття обґрунтованих рішень у маркетингових заходах.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Розглянемо задачу оптимізації розподілу рекламного бюджету [6], засновану на проведеній рекламній кампанії. Представлена модель є задачею лінійного програмування, сенс якої у знаходженні максимуму функції. В табл. 4.1 наведено статистичні дані з проведеної рекламної кампанії, які використовуватимуться при вирішенні задачі.

Таблиця 4.1 – Початкові дані

	Охоплення	Кліки	Витрати, гр. од.	CPC, гр. од.
Meta	52047	2715	4247	1,56
Telegram	5000	400	1400	3,5
Google	6843	1002	2500	2,5

Загальна математична модель має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^M a_i x_i \rightarrow \max ,$$

де a_i – показник ефективності i -го рекламного каналу;

x_i – кількість кліків з i -го рекламного каналу;

M – загальна кількість рекламних каналів.

Показник ефективності визначаємо як

$$a_i = \frac{a_i^*}{\min_{1 \leq i \leq M} (a_i^*)} ,$$

де a_i^* – кількість кліків з i -го рекламного каналу.

Спочатку розрахуємо показники ефективності:

$$a_1 = \frac{2715}{400} = 6,79, \quad a_2 = \frac{400}{400} = 1, \quad a_3 = \frac{1002}{400} = 2,51.$$

Враховуючи всі умови, наведені вище, отримаємо наступну математичну модель:

$$Z = 6,79x_1 + x_2 + 2,51x_3 \rightarrow \max,$$

де x_1 – кількість кліків на площадках Meta згідно з оптимальним планом;

x_2 – кількість кліків у месенджері Telegram згідно з оптимальним планом;

x_3 – кількість кліків у пошуковику Google згідно з оптимальним планом.

В умовах задачі маємо обмеження на загальний бюджет у 9000 грн. од. Нерівність виглядатиме наступним чином:

$$1,56x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 \leq 9000.$$

Коефіцієнти нерівності задані з початкових умов, які визначаються як CPC (Cost-per-Click або ціна за клік).

Далі задаємо невід'ємність кількості кліків:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Інші обмеження задані для демонстрації точності заданої моделі. Бюджет на рекламу через канали Meta обмежено межею у 2000 грн. од.:

$$1,56x_1 \leq 2000.$$

Також бюджет на таргетовану рекламу через Meta та Google не повинен перевищувати 4000 грн. од.:

$$1,56x_1 + 2,5x_3 \leq 4000.$$

Як результат, маємо систему нерівностей, яка задає обмеження:

$$\begin{cases} 1,56x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 \leq 9000 \\ 1,56x_1 \leq 2000 \\ 1,56x_1 + 2,5x_3 \leq 4000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Вирішуємо задану задачу симплекс-методом. Для приведення до канонічного вигляду, додаємо нові змінні x_4 , x_5 , x_6 . Отримаємо наступну симплекс-таблицю (табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Симплекс-таблиця 0-го кроку

Базис	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	9000	1,56	3,5	2,5	1	0	0
x_5	2000	1,56	0	0	0	1	0
x_6	4000	1,56	0	2,5	0	0	1
	0	-6,79	-1	-2,51	0	0	0

Крок 1. В останньому рядку табл. 4.2 маємо від'ємні значення, тому продовжуємо роботу з методом. Обираємо стовпчик за найменшою оцінкою, у цьому випадку це перший. Роздільний елемент знаходиться у другому рядку. Отримаємо наступну симплекс-таблицю (табл. 4.3).

Крок 2. В останньому рядку табл. 4.3 маємо від'ємні значення, тому продовжуємо роботу з методом. Обираємо стовпчик за найменшою оцінкою, у цьому випадку це третій. Роздільний елемент знаходиться у третьому рядку. Отримаємо наступну симплекс-таблицю (табл. 4.4).

Таблиця 4.3 – Симплекс-таблиця 1-го кроку

Базис	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	7000	0	3,5	2,5	1	-1	0
x_1	1278,55	1	0	0	0	0,64	0
x_6	2000	0	0	2,5	0	-1	1
	9040	0	-1	-2,51	0	4,52	0

Таблиця 4.4 – Симплекс-таблиця 2-го кроку

Базис	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5000	0	3,5	0	1	0	-1
x_1	1278,55	1	0	0	0	0,64	0
x_3	801,6	0	0	1	0	-0,4	0,4
	11048	0	-1	0	0	3,35	1

Крок 3. В останньому рядку табл. 4.4 маємо від'ємні значення, тому продовжуємо роботу з методом. Обираємо стовпчик за найменшою оцінкою, у цьому випадку це другий. Роздільний елемент знаходиться у першому рядку. Отримаємо наступну симплекс-таблицю (табл. 4.5).

Дані останнього рядка табл. 4.5 невід'ємні, тому отримаємо результат:

$$X^* = (1278,55; 1428,57; 801,6; 0; 0; 0),$$

$$Z = 6,79 \cdot 1278,55 + 1428,57 + 2,51 \cdot 801,6 = 12114,73.$$

У підсумку отримано оптимальний план за кількістю кліків для кожного окремого каналу реклами, за якого досягається максимальна ефективність рекламної компанії із заданими обмеженнями.

Для визначення розподілу рекламного бюджету за каналами просування необхідно помножити показники СРС на кількість кліків, отриману з оптималь-

ного плану. Як результат маємо табл. 4.6.

Таблиця 4.5 – Симплекс-таблиця 3-го кроку

Базис	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1428,57	0	1	0	0,29	0	-0,29
x_1	1278,55	1	0	0	0	0,64	0
x_3	801,6	0	0	1	0	-0,4	0,4
	12114,73	0	0	0	0,29	3,35	0,72

Таблиця 4.6 – Результати обчислювального експерименту

Канал реклами	СРС, гр. од.	Кількість кліків (згідно оптимального плану)	Виділений бюджет, гр. од.
Meta	1,56	1278,55	2000
Telegram	3,5	1428,57	5000
Google	2,5	801,6	2000

Результати, отримані завдяки програмній реалізації на Python, наведено на рис. 4.1.

Перетворені коефіцієнти цільової функції: [-6.7875, -1.0, -2.505]

Таблиця кінцевих результатів:

Канал	Очікувана кількість кліків	Необхідні витрати
1	1278.55	2000
2	1428.57	5000
3	801.6	2000

Максимум цільової функції (загальна очікувана кількість кліків): 12114.73459692556
Кількість ітерацій симплекс-методу: 3

Час виконання: 0.008551359176635742

Рисунок 4.1 – Результати розрахунків за допомогою програмної реалізації

Висновки за розділом 4

У розділі представлено обчислювальний експеримент, метою якого було знаходження оптимального плану кількості кліків та максимізації результатів при обмеженому бюджеті. Також було продемонстровано принцип роботи симплекс-методу і створено симплекс-таблиці, завдяки яким знайдено оптимальний план.

1. Виконано експеримент, у якому зображено використання симплекс-методу для задачі оптимізації. Зображено алгоритм його роботи, принцип обчислення основних показників та наведено результати обчислювання.

2. Результати подано у вигляді потенційної кількості кліків та потрібного розподілу бюджету, для досягнення заданих показників. Зазначені результати засновані на існуючій рекламній кампанії.

3. Зображено результати роботи програмної реалізації, які збігаються з представленими розрахунками. Використання симплекс-методу та математичної моделі для оптимізації розподілу бюджету кафедри університету дозволяє ефективно максимізувати кількість кліків за рекламою при заданих обмеженнях. Це забезпечує раціональне використання ресурсів і сприяє залученню більшої кількості абітурієнтів.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було розглянуто математичні моделі маркетингу для оптимізації рекламного бюджету кафедри. В результаті дослідження було обрано математичну модель оптимізації рекламного бюджету кафедри та метод її розв'язання.

Модель у своїй основі має задачу лінійного програмування, яка розв'язується симплекс-методом. Дана модель є ефективною з точки зору оптимізації завдяки своїй точності та гнучкості.

Симплекс-метод використовується для оптимізації розподілу рекламного бюджету, оскільки він дозволяє ефективно вирішувати задачі з численними лінійними обмеженнями та знаходити точний розподіл коштів між різними каналами реклами для максимізації результату. Він забезпечує гнучкість у моделюванні, враховуючи різні обмеження (наприклад, загальний бюджет або мінімальні витрати на певні канали).

На основі задачі була створена програмна реалізація задачі лінійного програмування з використанням Python і бібліотеки SciPy, яка є ефективним інструментом для оптимізації маркетингових бюджетів. Її застосування у маркетингу дозволяє максимально раціонально розподілити ресурси, забезпечуючи збільшення кількості кліків і підвищення ефективності рекламних кампаній. Зручність програми полягає в її інтерактивності, автоматизації розрахунків та наочності результатів, що полегшує аналіз і прийняття рішень. У контексті просування кафедри університету ця програма сприяє залученню більшої кількості абітурієнтів, забезпечуючи оптимальне використання бюджету та досягнення маркетингових цілей. Задача має універсальність у маркетингу, завдяки заміні різних показників та оптимізації конкретних алгоритмів реклами.

Результати дослідження можна застосовувати безпосередньо для покращення рекламної діяльності кафедри університету, самого університету, або будь якої фірми, бізнесу, тощо.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Khanin G., Lamtiuhova S. Model of optimal distribution of the department's advertising budget. *Learning & Teaching: after War and during Peace* [Electronic Edition]: Conference Proceedings of III International Scientific & Practical Conference, Kharkiv, Ukraine, 8 November, 2024. Kharkiv : KNPU, 2024. P. 218.
2. Котлер Ф. Основы маркетинга. Краткий курс. Киев : Диалектика, 2020. 490 с.
3. Семиглазов А. М., Семиглазов В. А., Иванов К. И. Математическое моделирование рекламной кампании. *Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2 (22). С. 342–349.
4. Hartung P. H. Fisher J. L. Brand switching and mathematical programming in market expansion. *Management science*. 1965. Vol. 11, № 10. С. 231–243.
5. Снитюк В. Е. Прогнозирование. Модели, методы, алгоритмы: учебное пособие. Киев : Маклаут, 2008. 364 с.
6. Luzon Y., Pinchover R., Khmelnitsky E. Dynamic budget allocation for social media advertising campaigns: optimization and learning. *European Journal of Operational Research*, 2022. Vol. 299. P. 223–234
7. Hancock H. Theory of Maxima and Minima. New York : Dover Publications, 1960. 193 p.
8. Apostol T. Mathematical analysis. Menlo Park, California : Addison-Wesley publishing company, 1974. 520 p.
9. Bellman R. E., Dreyfus S. E. Applied Dynamic Programming. London : Princeton University Press, 1962. 390 p.
10. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В. Линейное и нелинейное программирование. Киев : Вища школа, 1975. 372 с.
11. Stone M., Woodcock N., Machtynger L. Customer relationship marketing: get to know your customers and win their loyalty. London : Kogan Page, 2000. 228 p.
12. Armand D. La Publicite.: Presses universitaires de France, 1990. 128 p.
13. Lutz M. Learning Python, 5-th Edition. Sebastopol : O'Reilly Media, 2013. 1541 p.