УДК 006.91

И.П. Захаров, М.П. Сергиенко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРОНИ

В работе метод Прони адаптирован для идентификации переходных характеристик средств измерительной техники, описываемых апериодическими звеньями любого порядка. С целью повышения точности к нему применен метод наименьших квадратов. Исследованы погрешности данного метода и рассмотрены возможности его применения.

средство измерительной техники, динамическая характеристика переходная характеристика, идентификация, метод Прони, метод наименьших квадратов, погрешность метода

Постановка проблемы. Современное состояние метрологии, характеризующееся стремлением к одновременному повышению быстродействия и точности измерительной аппаратуры в условиях расширения областей применения точных измерений в динамических режимах изменения параметров физических объектов (в том числе и динамические измерения величин, считающихся постоянными) приводят к необходимости изучения динамических свойств средств измерительной техники (СИТ) [1]. Динамические свойства СИТ, проявляющиеся в том, что уровень переменного воздействия на СИТ в какой-либо момент времени обуславливает выходной сигнал СИТ в последующие моменты времени [2], описываются динамическими характеристиками, которые являются одними из числа нормируемых метрологических характеристик аналоговых СИТ [2 – 7]. В общем случае динамические свойства СИТ влияют на результат измерений характеристик динамических объектов, из чего следует необходимость их изучения. К полным ДХ, которые отражают динамические свойства линейных СИТ, относят дифференциальное уравнение, импульсную характеристику, переходную характеристику, передаточную функцию и совокупность амплитудно- и фазочастотной характеристик. Взаимосвязь между ДХ подробно анализируется в [7].

Основными этапами идентификации СИТ при исследовании ДХ являются [6]:

1) проведение измерительного эксперимента;
2) обработка результатов измерительного эксперимента и получение значений параметров ДХ;
3) оценивание погрешностей идентификации ДХ.

В ряде случаев для описания динамических свойств СИТ наиболее удобными являются переходная и импульсная характеристики. При этом лучше реализуемой является переходная характеристика (ПХ), то есть реакция СИТ на ступенчатое воздействие. Она легко воспроизводится для большинства электрических и неэлектрических величин.

Цель работы – разработка метода, позволяющего осуществлять идентификацию ПХ СИТ по результатам ее дискретного измерения с необходимой точностью.

Множество СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа, с необходимой точностью могут быть описаны выражением

$$h(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ 1-\sum\limits_{m=1}^{M} A_m \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_m}\right), t\geq 0,\end{cases} \qquad (1)$$

где $h(t)$ – переходная характеристика СИТ;

A_m – постоянные коэффициенты;

τ_m – постоянные времени СИТ.

При дискретном измерении ПХ

$$h(j\Delta t)=1-\sum_{m=1}^{m} A_m \exp\left(-j\frac{\Delta t}{\tau_m}\right), \qquad (2)$$

где $j=1,2,\ldots,k$ (k – количество дискретных отсчетов);

Δt – период дискретизации ПХ СИТ.

Метод Прони нашел широкое применение в теории и практике цифрового спектрального анализа сигналов [8]. В работе [9] было предложено применить используемый в нем математический аппарат для решения задачи идентификации ПХ.

Метод Прони

В рамках метода Прони [8, 10] после замен

$$1-h\left(j\frac{T}{N}\right)=C_j, \qquad (3)$$

$$\exp\left(-\frac{T}{N\tau_m}\right)=X_m, \qquad (4)$$

система (2) преобразуется к виду

$$C_j = \sum_{m=1}^{M} A_m X_m^j . \quad (5)$$

Для определения параметров A_m и X_m методом Прони необходимо:

1) измерить ПХ в $k = 2M$ точках через интервал дискретизации Δt и рассчитать параметры C_j согласно выражению (3);

2) записать $M \times M$ матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} C_M & C_{M-1} & \dots & C_1 \\ C_{M+1} & C_M & \dots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2M-1} & C_{2M-2} & \dots & C_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_{M+1} \\ C_{M+2} \\ \vdots \\ C_{2M} \end{pmatrix}, (6)$$

из которого вычислить вспомогательные параметры a_i $(i = 1, 2, \dots, M)$ по формуле

$$a_i = \frac{D_i}{D}, \quad (7)$$

где $D = \begin{vmatrix} C_M & C_{M-1} & \dots & C_1 \\ C_{M-1} & C_M & \dots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2M-1} & C_{2M-2} & \dots & C_M \end{vmatrix}$ – главный определитель системы (6);

D_i – определитель, образующийся путем замены i-го столбца главного определителя столбцом свободных членов;

3) рассчитать X_m как корни характеристического уравнения

$$\Phi(X) = \sum_{i=0}^{M} a_i X^{M-i} = 0, \quad (8)$$

в котором $a_0 = 1$;

4) рассчитать по формуле (4) постоянные времени

$$\tau_m = \frac{\Delta t}{\ln X_m}; \quad (9)$$

5) определить коэффициенты A_m путем подстановки найденных значений X_m в первые M уравнений системы (6).

Исследования [8, 9] показали, что в таком виде метод Прони имеет очень низкую точность и помехозащищенность, поэтому к нему необходимо применить метод наименьших квадратов (МНК).

МНК Прони

В этом случае необходимо увеличить количество отсчетов ПХ так, чтобы $k = K >> 2M$.

Тогда система (6) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_M & C_{M-1} & \dots & C_1 \\ C_{M+1} & C_M & \dots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2M-1} & C_{2M-2} & \dots & C_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{K-1} & C_{K-2} & \dots & C_{K-M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_{M+1} \\ C_{M+2} \\ \vdots \\ C_{2M} \\ \vdots \\ C_K \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Система (10) является несовместной, однако к ней можно применить МНК.

С учетом невязок δ_k система (4.10) имеет вид

$$a_1 C_{M+k-1} + a_2 C_{M+k-2} + \dots + a_M C_k + C_{M+k} = \delta_k,$$
$$k = 1 \dots K - M$$

В соответствии с МНК для получения оптимальных значений коэффициентов a_i необходимо минимизировать сумму квадратов невязок.

Используя обозначения Гаусса

$$[C_{M+k}] = \sum_{k=1}^{K-M} C_{M+k}; \; [C_{M+k-i}] = \sum_{k=1}^{K-M} C_{M+k-i},$$

система нормальных уравнений определится следующим образом

$$d \cdot a = y, \quad (11)$$

где

$$d = \begin{pmatrix} [C^2_{M+k-1}] & [C_{M+k-2}C_{M+k-1}] & \dots & [C_k C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k-1}C_{M+k-2}] & [C^2_{M+k-2}] & \dots & [C_k C_{M+k-2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_{M+k-1}C_k] & [C_{M+k-2}C_k] & \dots & [C_k^2] \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов нормальной системы уравнений;

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}$, $y = -\begin{pmatrix} [C_{M+k}C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k}C_{M+k-2}] \\ \vdots \\ [C_{M+k}C_k] \end{pmatrix}$ – искомые коэффициенты и столбец свободных членов нормальной системы уравнений соответственно.

Дальнейшая обработка производится по алгоритму, приведенному выше.

Так, для СИТ с ПХ

$$h(t) = 1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (12)$$

система (11) имеет вид

$$[C^2_{M+k-1}]a_1 = -[C_{M+k}C_{M+k-1}], \quad (13)$$

корень характеристического уравнения (8) равен

$$X_1 = -a_1, \quad (14)$$

постоянная времени рассчитывается по формуле (9).

Для СИТ с ПХ

$$h(t) = 1 - A_1 \exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) - A_2 \exp\left(\frac{t}{\tau_2}\right) \quad (15)$$

система (12)

$$\begin{pmatrix} [C_{M+k-1}^2] & [C_{M+k-2}C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k-2}C_{M+k-1}] & [C_{M+k-2}^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} [C_{M+k}C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k}C_{M+k-2}] \end{pmatrix}, \tag{16}$$

корни характеристического уравнения (8) определяются как

$$X_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \tag{17}$$

постоянные времени τ_1 и τ_2 рассчитываются по формулам (9).

Для нахождения коэффициентов A_1 и A_2 используется система уравнений (5).

Таким образом, метод Прони с использованием МНК позволяет осуществлять идентификацию ПХ СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа произвольного порядка, при условии постоянства коэффициентов A_m по измеренной экспериментально характеристике при использовании большого числа данных.

Недостатком метода Прони является невозможность применения для моделей измерительного канала с кратными корнями.

Исследование погрешностей МНК Прони

Рассмотрим систематическую и случайную составляющие погрешности идентификации ПХ СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа, МНК Прони.

Поскольку значения ПХ при реализации метода Прони являются отдельными параметрами, ограничение времени измерения и дискретизация ПХ не влияют на результат идентификации, то есть систематическая погрешность при использовании метода Прони отсутствует. Это является значительным преимуществом данного метода по сравнению с другими методами идентификации ПХ СИТ.

Случайная составляющая погрешности идентификации ПХ вызвана наличием аддитивных шумов во входном и выходном сигналах СИТ.

Среднее квадратическое отклонение (СКО) постоянных времени определяются следующим образом

$$\sigma_{\tau_m} = \sqrt{\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\partial \tau_m}{\partial X_m}\right)^2 \sigma_{X_m}^2}\ ; \tag{18}$$

$$\sigma_{X_m} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial X_m}{\partial a_i}\right)^2 \sigma_{a_i}^2}\ ; \tag{19}$$

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^{K}\left(\partial a_i / \partial C(j\Delta t)\right)^2 \sigma_C^2}\ , \tag{20}$$

где σ_C – СКО шума.

Рассмотрим случайную составляющую погрешности идентификации ПХ СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа первого и второго порядков, методом Прони с использованием МНК.

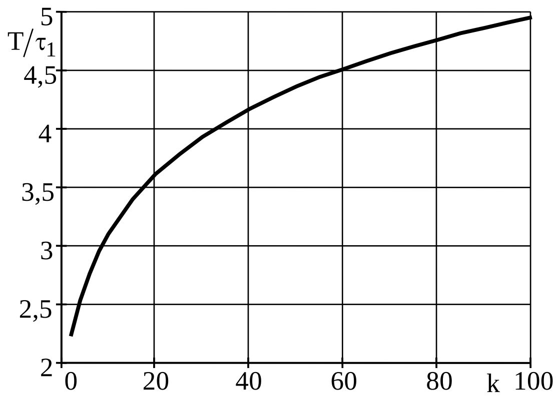
Для СИТ с ПХ (12) выражения (18) – (20) с учетом выражений (9) и (13) примут вид

$$\sigma_{\tau_1} = \frac{\Delta t}{X_1 \ln^2(X_1)}\sigma_{X_1}; \tag{21}$$

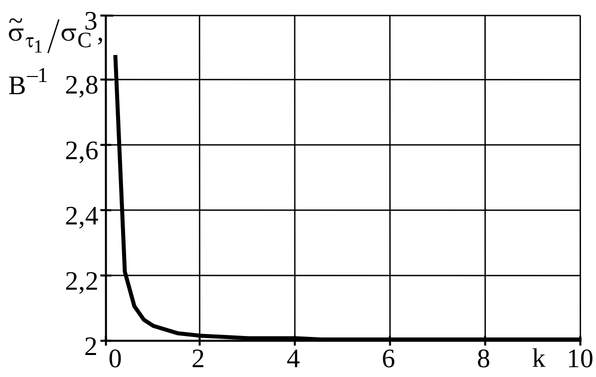
$$\sigma_{X_1} = -\sigma_{a_1}; \tag{22}$$

$$\sigma_{a_1} = -\left[\frac{(C_{j-1} + C_{j+1})[C_{M+k-1}^2]}{[C_{M+k-1}^2]^2} - \frac{2C_j[C_{M+k}C_{M+k-1}]}{[C_{M+k-1}^2]^2}\right]\sigma_C. \tag{23}$$

Исследования показали, что отношение приведенного СКО постоянной времени к СКО шума $\tilde{\sigma}_{\tau_1}/\sigma_C$ имеет минимумы при оптимальном выборе времени измерения T ПХ и количества отсчетов. Зависимость оптимальных соотношений T/τ_1, при которых $\tilde{\sigma}_{\tau_1}/\sigma_C$ минимальны, для разного числа отсчетов k показана на рис. 1 а), зависимость минимумов $\tilde{\sigma}_{\tau_1}/\sigma_C$ от k – на рис. 1 б).



а)



б)

Рис. 1. Зависимости оптимальных соотношений T/τ_1 (а) и минимумов $\tilde{\sigma}_{\tau_1}/\sigma_C$ (б) от числа отсчетов k

Для СИТ с ПХ (15) выражение (18) примет вид (21), выражение (19) будет иметь вид

$$\sigma_{X_{1,2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial X_{1,2}}{\partial a_i}\right)^2\sigma_{a_i}^2}\ ,\qquad (24)$$

где частные производные равны

$$\frac{\partial X_1}{\partial a_1}=-\frac{1}{2}+\frac{a_1}{2\sqrt{a_1^2-4a_2}}\ ;\ \frac{\partial X_1}{\partial a_2}=-\frac{1}{\sqrt{a_1^2-4a_2}}\ ;$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial a_1}=-\frac{1}{2}-\frac{a_1}{2\sqrt{a_1^2-4a_2}}\ ;\ \frac{\partial X_2}{\partial a_2}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2-4a_2}}\ .$$

Выражение (20) примет вид

$$\sigma_{a_{1,2}}=\sigma_C\sqrt{\sum_{j=1}^{K}\left(\partial a_{1,2}/\partial C(j\Delta t)\right)^2}\ ,\qquad (25)$$

где частные производные рассчитываются аналогично выражению (23).

Зависимости оптимальных соотношений T/τ_1, при которых $\tilde{\sigma}_{\tau_{1,2}}/\sigma_C$ минимальны, для разного числа отсчетов k показаны на рис. 2 а), минимумы $\tilde{\sigma}_{\tau_1}/\sigma_C$, $\tilde{\sigma}_{\tau_2}/\sigma_C$ показаны на рис. 2 б).

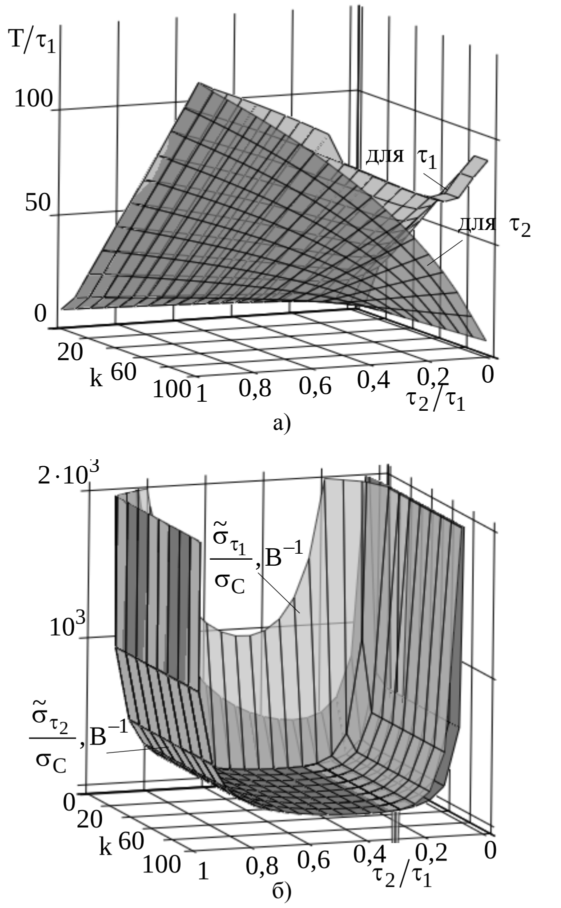


Рис. 2. Зависимости оптимальных соотношений T/τ_1 (а) и минимальных отношений $\tilde{\sigma}_{\tau_{1,2}}/\sigma_C$ (б) от соотношений τ_2/τ_1 и количества отсчетов k

Выводы

Таким образом, был разработан метод, основными достоинствами которого являются отсутствие систематической составляющей погрешности идентификации ПХ и возможность идентификации ПХ без обязательного достижения установившегося режима (при условии, что известен статический коэффициент преобразования СИТ). Основными недостатками МНК Прони является невозможность его применения для ПХ с передаточной функцией, имеющей кратные корни, а также низкая помехозащищенность при использовании его для идентификации ПХ СИТ с передаточной функцией выше первого порядка. Однако этот метод может найти применение при исследовании экспоненциальных зависимостей для решения многих экспериментальных и теоретических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаков И.А. Использование метода динамических измерений физических величин для построения быстродействующих средств измерений// Измерительная техника. – 2001. - № 10. – С.6 – 9.

2. ГОСТ 8.009-84 ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1988. – 38 с.

3. ГОСТ 8.256-77 ГСИ. Нормирование и определение динамических характеристик аналоговых средств измерений. Основные положения. – М.: Изд-во стандартов, 1980. – 8 с.

4. МИ 02-001-96 ГСИ. Методика оценивания погрешностей измерения динамических характеристик линейных средств измерений. – Львов: ГНИИ «Система», 1996. – 77 с.

5. МИ 1951-88 ГСИ. Динамические измерения. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 17 с.

6. РТМ 25.191-75 Средства измерения и автоматизации ГСП. Определение динамических характеристик. – М.: Изд-во стандартов, 1977. – 44 с.

7. МИ 2090-90 Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 64 с.

8. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

9. Захаров И.П., Сергиенко М.П. Исследование погрешностей идентификации переходных характеристик апериодических измерительных преобразователей методом Прони// Радиоэлектроника и информатика. – 2004. - № 1(26). – С.44 – 47.

10. Илюхин А.Г., Коваленко В.П. Численные методы обработки информации при исследовании динамических систем.–К.: Наукова думка, 1971.–175 с.

УДК 006.91

Идентификация переходных характеристик средств измерительной техники методом наименьших квадратов Прони/ И.П. Захаров, М.П. Сергиенко //Системы обработки информации. – Харьков. – 2007. – Вып. ( ). – С. 00 — 00.

Предложено использование метода Прони для идентификации переходных характеристик средств измерительной техники. Метод улучшен за счет применения метода наименьших квадратов. Исследованы составляющие погрешности метода. Преимуществом метода является отсутствие систематической составляющей погрешности.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 006.91

Ідентифікація перехідних характеристик засобів вимірювальної техніки за допомогою методу найменших квадратів Проні/ І.П. Захаров, М.П. Сергієнко //Системи обробки інформації . – Харків. – 2007. – Вип. ( ). – С. 00 — 00.

Запропоновано використання методу Проні для ідентифікації перехідних характеристик засобів вимірювальної техніки. Метод покращено за рахунок залучення методу найменших квадратів. Досліджені складові похибки методу. Перевагою методу є відсутність систематичної складової похибки.

Іл. 2. Бібліогр.: 10 назв.

UDC 006.91

Identification measuring tool's transfer characteristics by Prony's least-squares method / I.P. Zakharov, M.P. Sergienko //Systemi obrobki informacii. – Kharkov. – 2007. – №. ( ). – P. 00 — 00.

The Prony's method for identification measuring tool's transfer characteristics is offer. The method was improved thanks to least-squares method adaptation. Method's errors are research. Method's advantage is consist in the absence of systematical error.

2 fig. Ref.: 10 items.