

## ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЗАДАЧЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОБЪЕКТОВ ФАЗОВЫМ МЕТОДОМ

### Актуальность задачи

Задача измерения дальностей до объектов возникает в радиолокации, навигации, радио- и лазерной дальнометрии. Как известно [1, 2], наибольшую точность измерений дальности обеспечивает фазовый метод. Хотя фазовый метод обладает неоднозначностью измерения дальности, он позволяет с высокой точностью измерять перемещения объектов.

При современном уровне развития цифровой техники дальнометры могут гибко реализовываться с применением предварительного гетеродинирования и цифровой обработки сигналов с выхода смесителей. В этом случае появляется возможность учитывать характер движения объекта.

Точность измерения перемещений объектов фазовыми методами можно существенно повысить, если воспользоваться адекватной моделью движения цели. Одна из таких моделей основывается на описании движения объекта на интервале движения полиномом, частными случаями которой является модель движения с постоянной скоростью и модель равноускоренного движения.

Данная работа посвящена обоснованию структуры цифрового измерителя перемещений объектов на основе полиномиальной модели движения и исследованию характеристик его точности.

В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Обоснован алгоритм цифровой обработки сигналов в задаче измерения перемещений объектов фазовым методом. В этом алгоритме измерение перемещений объектов производится с учетом априори известной составляющей ее движения в опорных сигналах корреляторов и оцениванием коэффициентов полиномиальной аппроксимации лишь неизвестной составляющей движения.

2. Для повышения точности измерения предложено использовать весовое окно Ханна и окна с нулевыми вторыми моментами.

3. Получены выражения для смещений и дисперсий оценок фаз в измерителе перемещений объектов.

4. На модельном примере, характерном для баллистической гравиметрии, выполнена апробация предложенного подхода к измерению перемещений объектов.

### Постановка задачи

Будем полагать, что в результате облучения движущейся точечной цели гармоническим сигналом с длиной волны  $\lambda$  на выходе смесителя приемника измерительной системы наблюдается сигнал

$$x(t) = A \cdot \cos[\Phi(t) + \phi(t)] + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где

$$\Phi(t) = \sum_{r=0}^p a_r t^r \quad (2)$$

– предполагаемый закон изменения фазы (априори известная составляющая фазы);

$$\phi(t) = \sum_{r=0}^p \alpha_r t^r \quad (3)$$

– неизвестный набег фазы, обусловленный отклонением фактического движения цели от предполагаемого;  $n(t)$  – аддитивная некоррелированная помеха с нормальным распределением и дисперсией  $\sigma^2$ .

Сигнал (1) дискретизируется с шагом  $\Delta$  и наблюдается последовательность равноотстоящих отсчетов сигнала  $x(t_k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . При этом будем полагать, что выполняются условия

$$\alpha_r \ll a_r, \quad r = \overline{1, p}. \quad (4)$$

Требуется по последовательности отсчетов  $x(t_k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  определить положение объекта в моменты времени  $t_k \in (0, T]$  относительно его положения в момент времени  $t = 0$ .

### Оценки максимального правдоподобия постоянной составляющей фазы сигнала

Задача оптимального оценивания фазы узкополосного сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивной гауссовской помехи, рассмотрена в работах [3, 4]. Приведем решение этой задачи для случая, когда решение необходимо выносить по последовательности отсчетов наблюдаемой смеси сигнала и аддитивной помехи.

Предположим вначале, что в модели (1) выполняется условие  $\phi(t) = \alpha_0 = \phi$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , т. е. фаза сигнала постоянна на интервале наблюдения, и синтезируем максимально правдоподобную оценку начальной фазы  $\phi$  сигнала (совместно с амплитудой  $A$ ). Для этого представим сигнал в (1) с использованием квадратурных составляющих

$$x(t) = A_C \cdot \cos \Phi(t) - A_S \cdot \sin \Phi(t) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где  $A_C = A \cos \phi$ ;  $A_S = A \sin \phi$ .

Из выражения (5) несложно получить оценку максимального правдоподобия параметров  $A_C$  и  $A_S$ , которая для случая дискретной последовательности наблюдений должна находиться как решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} B_{CC} A_C + B_{CS} A_S = X_C, \\ B_{CS} A_C + B_{SS} A_S = X_S, \end{cases} \quad (6)$$

где статистики  $X_C = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) \cdot \cos \Phi(t_k)$ ,  $X_S = -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) \cdot \sin \Phi(t_k)$ , а коэффициенты  $B_{CC}$ ,  $B_{SS}$  и  $B_{CS}$  определяются соответственно выражениями

$$B_{CC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos[2\Phi(t_k)], \quad B_{SS} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos[2\Phi(t_k)], \quad B_{CS} = -\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin 2\Phi(t_k).$$

Из системы уравнений (6) получим оценки максимального правдоподобия квадратурных составляющих сигнала

$$\hat{A}_C = \frac{1}{B_{SS} B_{CC} - B_{CS}^2} [B_{SS} X_C - B_{CS} X_S]; \quad \hat{A}_S = \frac{1}{B_{SS} B_{CC} - B_{CS}^2} [B_{CC} X_S - B_{CS} X_C]. \quad (7)$$

Если выполняется условие  $B_{SS} B_{CC} \gg B_{CS}^2$ , то оценки (7) принимают вид

$$\hat{A}_C = \frac{X_C}{B_{CC}}; \quad \hat{A}_S = \frac{X_S}{B_{SS}}. \quad (8)$$

Оценку фазы и амплитуды определим соответственно как

$$\hat{\phi} = \arctg\left\{\frac{\hat{A}_S}{\hat{A}_C}\right\}, \quad \hat{A} = \sqrt{\hat{A}_S^2 + \hat{A}_C^2}. \quad (9)$$

Из анализа выражений (9) следует, что найденные оценки фаз асимптотически несмещенные. Можно также показать, что при большом соотношении сигнал/шум  $q = \frac{A^2 N}{2\sigma^2}$

$$D[\hat{\phi}] \approx \frac{2\sigma^2}{A^2 N} = \frac{1}{q}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что дисперсия оценки фазы убывает обратно пропорционально числу отсчетов  $N$  некоррелированной аддитивной помехи. Поэтому весь интервал наблюдения может быть разбит на элементарные интервалы (на которых соотношение сигнал/помеха сохраняется достаточно большим), по каждому такому элементарному интервалу оценена фаза сигнала и результат усреднен. При такой методике обработке в условиях большого соотношения сигнал/помеха сохраняется та же точность оценивания фазы, что и по всему интервалу наблюдения.

### Оценивание медленно изменяющейся фазы сигнала

С учетом независимости отсчетов аддитивной помехи выражение для логарифма функции правдоподобия вектора наблюдений  $\vec{x} = (x(t_0), \dots, x(t_{N-1}))$  представимо в виде суммы

$$L(\vec{x} | A, \alpha_0, \dots, \alpha_p) = \sum_{q=0}^{Q-1} L(\vec{x}_q | A, \alpha_0, \dots, \alpha_p), \quad (11)$$

где векторы  $\vec{x}_q = (x(t_{qL}), \dots, x(t_{qL+L-1}))$  составлены из  $L$  расположенных рядом отсчетов сигнала и в совокупности образуют вектор наблюдений  $\vec{x}$ ;  $L(\vec{x}_q | A, \alpha_0, \dots, \alpha_p)$  – функция правдоподобия вектора наблюдений  $\vec{x}_q$ ; натуральные числа  $L$ ,  $Q$  и  $N$  связаны соотношением  $L \cdot Q = N$ .

В дальнейшем будем полагать, что на элементарном интервале наблюдения  $T_q = [t_{qL}, t_{qL+L-1}]$  изменением составляющей фазы  $\phi(t)$  в (1) можно пренебречь.

С учетом принятой модели изменения фазы сигнала (3) воспользуемся приближением

$$L(\vec{x} | A, \alpha_0, \dots, \alpha_p) \approx \sum_{q=0}^{Q-1} L(\vec{x}_q | A, \phi_q),$$

где  $\phi_q$  – значение фазы в момент времени  $s_q$ , являющийся центральной точкой  $q$ -го интервала наблюдения.

Можно показать, что в условиях высокой точности оценивания [4]

$$L(\vec{x}_q | A, \phi_q) \approx L(\vec{x}_q | \hat{A}_q, \hat{\phi}_q) + C_A (\hat{A}_q - A)^2 + C_\phi (\hat{\phi}_q - \phi_q)^2,$$

где  $\hat{A}_q, \hat{\phi}_q$  – оценки максимального правдоподобия параметров  $A_q, \phi_q$ , найденные по отсчетам  $q$ -го интервала, содержащего отсчеты  $\{t_{qL}, \dots, t_{qL+L-1}\}$ ;  $C_A$  и  $C_\phi$  – некоторые коэффициенты.

Тогда

$$L(\vec{x} | A, \alpha_0, \dots, \alpha_p) \approx \sum_{q=0}^{Q-1} L(\vec{x}_q | \hat{A}_q, \hat{\phi}_q) + C_A \sum_{q=0}^{Q-1} (\hat{A}_q - A)^2 + C_\phi \sum_{q=0}^{Q-1} (\hat{\phi}_q - \phi_q)^2, \quad (12)$$

где

$$\phi_q = \sum_{r=0}^p \alpha_r s_q^r. \quad (13)$$

Из выражений (12), (13) следует асимптотически оптимальная оценка параметров  $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ , которая может быть получена как оценка МНК из минимума показателя

$$\sum_{q=0}^{Q-1} (\hat{\phi}_q - \sum_{r=0}^p \alpha_r s_q^r)^2. \quad (14)$$

В случае медленных изменений фазы сигнала по аналогии с полученными раньше оценками фазы (9)

$$\hat{\phi}_q = \arctg \left\{ \frac{\hat{A}_{Sq}}{\hat{A}_{Cq}} \right\}, \quad (15)$$

где оценки

$$\hat{A}_{Cq} = \frac{1}{B_{SSq} B_{CCq} - B_{CSq}^2} [B_{SSq} X_{Cq} - B_{CSq} X_{Sq}], \quad (16)$$

$$\hat{A}_{Sq} = \frac{1}{B_{SSq} B_{CCq} - B_{CSq}^2} [B_{CCq} X_{Sq} - B_{CSq} X_{Cq}]; \quad (17)$$

статистики

$$X_{Cq} = \sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) x(t_k) \cdot \cos \Phi(t_k), \quad X_{Sq} = - \sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) x(t_k) \cdot \sin \Phi(t_k); \quad (18)$$

коэффициенты

$$B_{CCq} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) \cos[2\Phi(t_k)], \quad B_{SSq} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) \cos[2\Phi(t_k)],$$

$$B_{CSq} = -\frac{1}{2} \sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) \sin 2\Phi(t_k);$$

а весовые функции  $w_q(t_k)$  удовлетворяют условию  $\sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) = 1$ .

В случае равномерных весовых функций  $w_q(t_k) = 1/L$  оценки (15) являются оценками максимального правдоподобия.

После нахождения совокупности оценок  $(\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_p)$  из условия минимума выражения (14) положение объекта в момент времени  $t$  определяется по формуле

$$\hat{d}(t) = \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{r=0}^p (a_r + \hat{\alpha}_r) \cdot t^r, \quad (19)$$

а перемещение тела относительно положения в момент времени  $t = 0$

$$\hat{c}(t) = \hat{d}(t) - \hat{d}(0) = \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{r=1}^p (a_r + \hat{\alpha}_r) \cdot t^r. \quad (20)$$

В результате достаточно громоздких преобразований можно доказать, что при большом соотношении сигнал/помеха смещение оценки фазы (15)

$$M[\hat{\phi}_q] - \phi(s_q) \approx d_q c_q \quad (21)$$

зависит от второй производной измеряемой функции и второго момента весовой функции:

$$c_q = \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} \Big|_{t=s_q}, \quad d_q = \sum_{t_k \in T_q} w_q(t_k) \cdot (t_k - s_q)^2. \quad (22)$$

### Особенности практической реализации

Одной из особенностей оценивания фазы является неоднозначность ее оценки. Как известно [5], функция  $\arctg\{\phi\}$ , входящая в алгоритм, является монотонно возрастающей на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$  и периодической с периодом  $\pi$ . Поскольку восстанавливаемая функция  $\phi(t)$  непрерывная, то эта особенность должна быть учтена в алгоритме (15).

В связи с этим оценки фаз определим как

$$\hat{\phi}_q = \arctg\left\{\frac{\hat{A}_{sq}}{\hat{A}_{cq}}\right\} + m\pi. \quad (23)$$

Здесь значение  $m$  равно числу изменений знака составляющей  $\hat{A}_{cq}$  до  $q$ -го элементарного интервала включительно.

Вторая особенность разработанного алгоритма оценивания фаз состоит в необходимости учета поведения оцениваемой фазы при выборе весовой функции сглаживания в выражении (18). Поясним эту особенность, интерпретируя процедуру формирования суммы в (18) как низкочастотную фильтрацию произведения принятого сигнала на квадратурную компоненту опорного сигнала.

Рассмотрим свойства произведения принимаемого сигнала  $x(t)$  на квадратурные сигналы:  $R_c(t) = x(t) \cdot \cos \Phi(t)$  и  $R_s(t) = x(t) \cdot \sin \Phi(t)$ . С учетом (1) имеем

$$R_c(t) = \frac{A}{2} \cos \phi(t) + \frac{A}{2} \cos[2\Phi(t) + \phi(t)] + n(t) \cdot \cos[\Phi(t)], \quad (24)$$

$$R_s(t) = -\frac{A}{2} \sin \phi(t) + \frac{A}{2} \sin[2\Phi(t) + \phi(t)] + n(t) \cdot \sin[\Phi(t)]. \quad (25)$$

Согласно (24), (25), в каждом из сигналов  $R_c(t)$  и  $R_s(t)$  присутствуют следующие составляющие: низкочастотная с мгновенной частотой  $\phi'(t)$ , высокочастотная с мгновенной частотой  $2\Phi'(t) + \phi'(t)$  и широкополосная составляющая  $n(t) \cdot \cos[\Phi(t)]$  или  $n(t) \cdot \sin[\Phi(t)]$ . Суть разработанного алгоритма оценивания состоит в выделении низкочастотных составляющих  $\cos \phi(t)$  и  $\sin \phi(t)$  из сигналов  $R_c(t)$  и  $R_s(t)$  с последующим определением отсчетов функции  $\phi(t)$  и аппроксимации ее полиномом.

При большом соотношении сигнал/шум основную опасность составляет высокочастотная составляющая, для подавления которой в алгоритме (18) используется взвешенное суммирование отсчетов. Весовые функция  $w_q(t_k) = W\left(\frac{t_k - s_q}{\Delta}\right)$  должны выбираться так, чтобы максимально ослабить влияние на результат суммирования высокочастотной составляющей сигнала и, по возможности, минимально исказить полезную низкочастотную составляющую. Для этой цели используем хорошо зарекомендовавшее себя в спектральном анализе временные окна, в частности окно Ханна с весовой функцией

$$W(k) = \frac{1}{2M} [1 + \cos(\pi k / M)], \quad k = \overline{-M, M}. \quad (26)$$

Кроме того, перспективным является окно с нулевым вторым моментом, реализованное на основе окна Ханна

$$W(k) = \frac{1}{2a} [1 + \cos(\pi k / M) \cdot (1 - bk^2)], \quad k = \overline{-M, M}, \quad (27)$$

где параметры  $a$  и  $b$  выбираются из условий

$$\sum_{k \in M} W(k) = 1, \quad \sum_{k \in M} W(k) \cdot k^2 = 0. \quad (28)$$

Применение такого окна позволяет практически устранить смещение оценок  $\hat{\phi}_q$  (см. выражение (21)).

### Исследование свойств разработанных оценок методом статистического моделирования

Целью статистического моделирования было исследование влияния временного окна обработки на ошибки измерения перемещений объекта разработанным алгоритмом. Моделирование проводилось в среде СКМ Mathematica 8.0.

Для исследований был выбран случай равноускоренного движения цели. Начальная скорость объекта составляла  $v = 78988,9 \lambda c^{-1}$ , ускорение движения цели  $a = 1,5451 \times 10^7 \lambda c^{-2}$ , время наблюдения цели  $T = 0,0102244 c$ , интервал дискретизации  $\Delta = 4,08977 \times 10^{-7} c$  (15 и более отсчетов на период). Изменение перемещения цели на интервале измерений показано на рис. 1, а. Рассматриваемый случай неблагоприятен тем, что в середине интервала наблюдения мгновенная скорость цели равна нулю и в результате имеются трудности для разделения низкочастотной и высокочастотной составляющих сигнала в выражениях (24), (25).

В ходе модельного эксперимента расхождение между предполагаемыми и истинными параметрами движения цели (начальной скоростью и ускорением) выбирались столь малыми, чтобы максимальный набег фазы принятого сигнала относительно опорного сигнала не превышал нескольких  $\pi$  на интервале наблюдения. Основной случай, описанный ниже, соответствовал точному совпадению истинной и предполагаемой начальной скорости движения цели и разнице между истинным и предполагаемым ускорением  $a_{ист} - a_{пред} = -7898,89 \lambda c^{-2}$ . Отметим, что при таких значениях параметров разница между предполагаемым и истинным перемещением цели за интервал наблюдения составляет  $0,412 \lambda$ . На рис. 1, б приведено изменение разности между истинным и предполагаемым перемещением цели от времени.

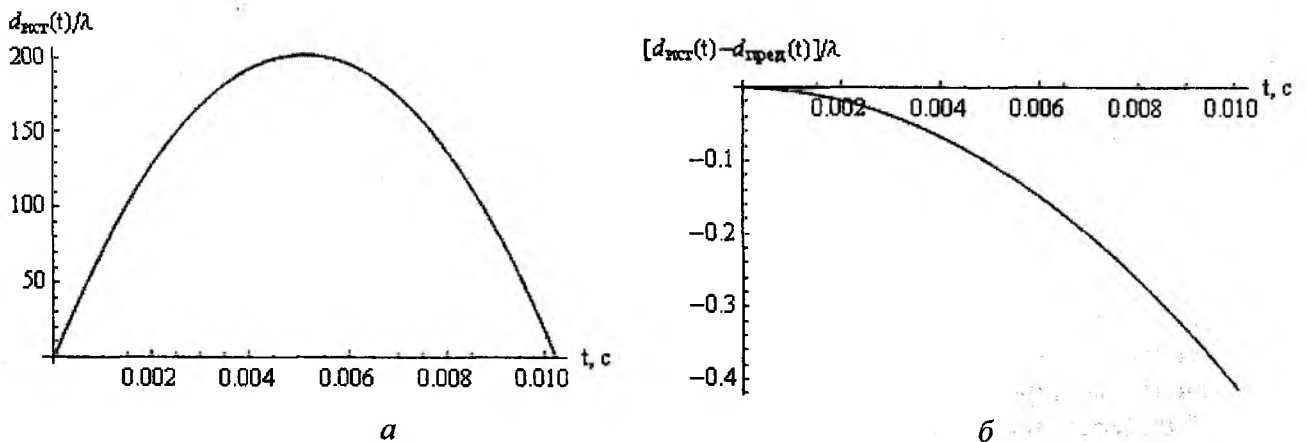


Рис. 1

В представленных ниже результатах моделирования длина временного окна обработки была принята равной 401 отсчет (164 мкс). При этом исследовалось три типа окон: прямоугольное, окно Ханна и окно с нулевым вторым моментом, реализованное на основе окна Ханна.

Результаты моделирования для случая отсутствия аддитивной помехи показаны на рис. 2, а, б, где по оси ординат отложена нормированная ошибка измерения перемещения

объекта  $[\hat{c}(t) - c(t)]/\lambda$ , а функция  $c(t) = d_{\text{ист}}(t) - d_{\text{ист}}(0)$ . На рис. 2, а отображена ошибка измерения перемещения с использованием прямоугольного окна, а на рис. 2, б – с использованием окна Ханна (пунктирная кривая) и окна с нулевым вторым моментом (сплошная кривая).

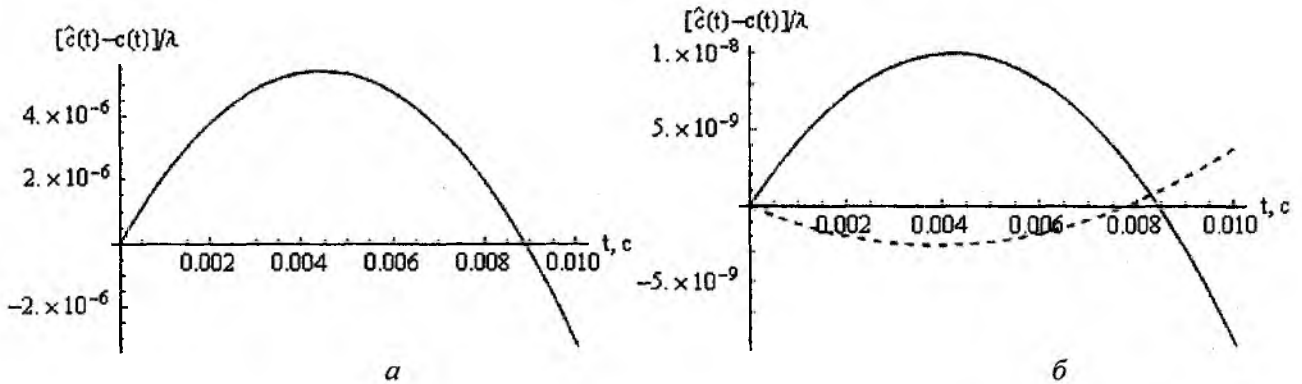


Рис. 2

Результаты моделирования наглядно показывают, что, при отсутствии аддитивной помехи применение весового окна Ханна и синтезированного на его основе окна с нулевым вторым моментом повышает точность оценивания фазы сигнала по сравнению с использованием прямоугольного окна.

В работе исследовано влияние аддитивной помехи типа «гауссовский белый шум» на точность измерения перемещений цели. Установлено, что для описанного выше примера с уменьшением соотношения сигнал шум (от очень больших значений до величины  $A/\sigma = 10$ ) влияние весовых окон на точность измерения перемещений уменьшается. При  $A/\sigma = 10$  все три типа окон обеспечивают примерно одинаковую среднеквадратическую точность измерения перемещений – около  $4,5 \cdot 10^{-4} \lambda$ .

## Выводы

Перспективным направлением построения высокоточных измерителей дальности до объектов является их реализация с применением предварительного гетеродинирования принятых сигналов, их дискретизации и последующей обработки сигналов в цифровом виде.

Во многих прикладных задачах измерения перемещений объектов существует возможность представить закон их движения в виде двух составляющих: априори известной полиномиальной функции с широким диапазоном изменения и медленно изменяющейся полиномиальной функции с неизвестными коэффициентами. В этих случаях существует возможность исключения из принятого сигнала априори известной составляющей путем соответствующей цифровой обработки, состоящей в умножении принятого сигнала на ожидаемый сигнал и последующей низкочастотной фильтрации результата умножения.

Для измерения неизвестной составляющей перемещения объектов разработан алгоритм цифровой обработки. Суть этого алгоритма состоит в разбиении всего интервала наблюдения на элементарные интервалы стационарности, на которых изменения фазы принятого сигнала, обусловленные априори неизвестной составляющей движения, являются существенно меньшими  $2\pi$ . Затем на каждом из таких интервалов с использованием корреляторов определяется элементарная оценка фазы сигнала. Окончательный результат измерения находится в результате обработки элементарных оценок фаз методами регрессионного анализа.

Проведено исследование характеристик разработанного алгоритма аналитическими методами и путем статистического моделирования. Определены условия асимптотической оптимальности разработанного алгоритма. В результате исследований установлено, что кроме аддитивной помехи на показатели точности алгоритмов измерения могут существенное влияние оказывать и частотные составляющие, возникающие в корреляторах измерителя при

взаимодействии принятых и ожидаемых сигналов. Для устранения таких помех предложено использовать весовые окна, в частности окно Ханна.

Дальнейшие исследования предполагается посвятить решению прикладных задач измерения перемещений объектов с использованием разработанного метода.

**Список литературы:** 1. *Кинкулькин, И.Е.* Фазовый метод определения координат / Кинкулькин И.Е., Рубцов В.Д., Фабрик М.А. – М. : Сов. радио, 1979. – 280 с. 2. *Миценко, И.Д.* Системы ближней дальнометрии : учеб. пособие. Ч.3. Фазовые методы дальнометрии и селекции объектов / Миценко И.Д., Покасов В.В., Ильиных С.П. ; под ред. Миценко И.Д. – Новосибирск : НГТУ, 2003. – 115 с. 3. *Тихонов, В.И.* Оптимальный прием сигналов / Тихонов В.И. – М. : Радио и связь, 1983. – 320 с. 4. *Ширман, Я. Д.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Ширман Я. Д. , Манжос В. Н. – М. : Радио и связь, 1981. – 416 с. 5. *Корн, Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Корн Г., Корн Т. – М. : Наука, 1978. – 831 с. 6. *Алгоритмы обработки сигнала в цифровом баллистическом гравиметре* / Омельченко А.В., Сидоренко Г.С., Занимонский Е.М. [и др.] // Вісник Інженерної академії України. – 2009. – Вип. 3-4. – С. 251–255.

*Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 15.04.2012*