УДК 621.396

В. Г. МЕЛЬНИК, И. С. САВЧЕНКО, канд. техн. наук

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЬЦЕВОГО АВТОГЕНЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследована работа кольцевого автогенератора (КА) второго порядка на начальном этапе запуска, когда можно пренебречь нелинейностями в системе [1]. Такое упрощение позволяет выявить ряд качественных особенностей, что важно при изучении сложных колебательных систем и дает возможность определить необходимые для практических применений соотношения, которые с большой степенью точности остаются верными и при более строгом анализе. Однако принятые упрощения исключают возможность изучения свойств КА, непосредственно связанных с нелинейной природой системы. Это прежде всего вопросы, обусловленные установлением стационарного режима колебаний, определением его характеристик и устойчивости.

Рассмотрим нелинейную модель КА второго порядка, учитывающую неидентичность параметров отдельных каскадов резонансных усилителей. В первом приближении определены значения стационарных амплитуд, разности фаз, частоты гармонических колебаний в стационарном режиме и исследована их устойчивость.

Составим для кольцевого автогенератора второго порядка систему нелинейных дифференциальных уравнений [1]. Для этого запишем уравнение Кирхгофа относительно переменных составляющих напряжений U_1, U_2 на резонансных контурах (сеточными токами пренебрегаем)

$$\frac{d^2U_1}{dt^2} + \frac{1}{R_1C_1}\frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{L_1C_1}U_1 = \frac{1}{C_1}\frac{d_ia_1}{dt};$$

$$\frac{d^2U_2}{dt^2} + \frac{1}{R_2C_2}\frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{L_2C_2}U_2 = \frac{1}{C_2}\frac{d_ia_2}{dt}. \qquad (1)$$

Разложим i_a в ряд Тейлора, задавшись характеристикой лампы «мягкого режима»

$$i_{a_1} = s_1 \frac{M_2}{L_2} U_2 - \frac{1}{3} s_1 \left(\frac{M_2}{L_2} U_2\right)^3; \quad i_{a_2} = s_2 \frac{M_1}{L_1} U_2 - \frac{1}{3} s_2' \left(\frac{M_1}{L_1} U_1\right)^3 \tag{2}$$

и, фиксируя рабочую точку на вольт-амперной характеристике в точке перегиба для упрощения анализа, реакцией анода пренебрегаем. После введения частоты ω в (1) и соответствующей перегруппировки получим [1]

$$\frac{d^2U_1}{dt^2} + \omega^2 U_1 = (\omega^2 - \omega_1^2) U_1 + \beta_1 \frac{dU_2}{dt} - \delta_1 \frac{dU_1}{dt} - \gamma_1 U_2 \frac{dU_2}{dt};$$

$$\frac{d^2U_2}{dt^2} + \omega^2 U_2 = (\omega^2 - \omega_2^2) U_2 + \beta_2 \frac{dU_1}{dt} - \delta_2 \frac{dU_2}{dt} - \gamma_2 U_1 \frac{dU_1}{dt}, \tag{3}$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{S_1'}{C_1} \left(\frac{M_2}{L_2}\right)^3, \; \gamma_2 = \frac{S_2'}{C_2} \left(\frac{M_1}{L_1}\right)^3. \tag{4}$$

Учитывая, что связь между резонансными усилителями в кольце в общем случае сильная, ищем решение, гармонического в нулевом приближении с частотой ω, не совпадающей ни с одной из собственных частот ω_1, ω_2. Если в рассматриваемой системе возможен почти гармонический процесс с частотой ω, то правые части уравнений (3) должны быть малы по сравнению с консервативными членами уравнений. Малость членов, сгруппированных в правых частях уравнений, может быть выражена в явном виде выделением малого безразмерного сомножителя μ.

Система (3) есть система нелинейных дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля для кольцевого автогенератора второго порядка, гармонические решения для которой ищем в виде

$$U_1 = \mathrm{A} \cos (\omega t + \varphi_1); \; U_2 = \mathrm{B} \cos (\omega t + \varphi_2). \tag{5}$$

Здесь А, В, φ_1, φ_2 — медленноменяющиеся функции времени.

Применяя к системе (3) метод медленноменяющихся амплитуд [2], найдем укороченные уравнения для амплитуд и фаз колебаний кольцевого автогенератора

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left[-\delta_1 \mathrm{A} + \left(\beta_1 - \frac{\gamma_1}{4}\mathrm{B}^2\right) \mathrm{B} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)\right];$$

$$\frac{d\mathrm{B}}{dt} = \frac{1}{2}\left[-\delta_2 \mathrm{B} + \left(\beta_2 - \frac{\gamma_2}{4}\mathrm{A}^2\right) \mathrm{A} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)\right]; \tag{6}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{1}{2\mathrm{A}}\left[\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega} \mathrm{A} - \left(\beta_1 - \frac{\gamma_1}{4}\mathrm{B}^2\right) \mathrm{B} \sin (\varphi_2 - \varphi_1)\right];$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{1}{2\mathrm{B}}\left[\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega} \mathrm{B} - \left(\beta_2 - \frac{\gamma_2}{4}\mathrm{A}^2\right) \mathrm{A} \sin (\varphi_2 - \varphi_1)\right].$$

Имеем систему четырех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, описывающую изменение во времени амплитуд А, В и фаз φ_1, φ_2 гармонического процесса в КА с нестационарными связями между переменными. Представим систему (6) в комплексной форме. Для этого умножим два последние равенства в (6) на мнимое число i и сложим первое равенство с третьим, а второе с четвертым. После несложных преобразований получим

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[-\left(\delta_1 + i\frac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega}\right)A + \left(\beta_1 - \frac{\gamma_1}{4}B^2\right)B\right];$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}\left[-\left(\delta_2 + i\frac{\omega^2-\omega_2^2}{\omega}\right)B + \left(B_2 - \frac{\gamma_2}{4}A^2\right)A\right], \qquad (7)$$

где $\qquad A = Al^{i\varphi_1};\ B = Bl^{i\varphi_2};\ A^2 = AA^*;\ B^2 = BB^*.$

Из системы (7) определим стационарные значения амплитуд $\bar{A}$, $\bar{B}$, параметр ω и стационарную разность фаз $\Delta\varphi = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$. Для этого правые части уравнений полагаем равными нулю. Тогда

$$\overset{0}{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 = 0;\quad \overset{0}{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 = 0;$$

$$-|q_1|\bar{A} + \left(\beta_1 - \frac{\gamma_1}{4}\bar{B}^2\right)\bar{B} = 0;\quad -|q_2|\bar{B} + \left(\beta_2 - \frac{\gamma_2}{4}\bar{A}^2\right)\bar{A} = 0, \qquad (8)$$

где $\quad \overset{0}{\varphi}_i = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega^2-\omega_i^2}{\omega\delta_i};\ |q_i| = \left(\delta_i^2 + \frac{(\omega^2-\omega_i^2)^2}{\omega^2}\right)^{1/2},\ i = 1,\ 2. \qquad (9)$

Из первых двух равенств находим $\Delta\bar{\varphi} = \overset{0}{\varphi}_1 = -\overset{0}{\varphi}_2$; $\overset{0}{\varphi}_1 + \overset{0}{\varphi}_2 = 0$ **(10)**. Первое уравнение определяет набег фазы гармонического колебания частоты ω на резонансных контурах и совпадает с соответствующим выражением, полученным в линейном случае.

Из второго равенства находим значение частоты установившихся колебаний в КА с неидентичными параметрами колебательных систем

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2\delta_2 + \omega_2^2\delta_1}{\delta_1+\delta_2} = p_2\omega_1^2 + p_1\omega_2^2. \qquad (11)$$

Частота свободных колебаний ω в стационарном режиме совпала с частотой ω_0 нулевого приближения по параметру μ (в отсутствие затухания).

Рассмотрим вопрос о амплитудах стационарных колебаний КА. Для решения последних двух уравнений системы (8) введем малый параметр μ по формуле $\mu = \sqrt{\beta_1\beta_2} - \sqrt{|g_1||g_2|}$ (12), а также предположим, что мера нелинейности вольт-амперной характеристики γ_i имеет порядок малости μ (квазилинейный случай), и обозначим $\gamma_1 = \mu\gamma_1'$, $\gamma_2 = \mu\gamma_2'$ (13), где γ_1', γ_2' — конечные величины.

Предположение (13) непосредственно вытекает из равенств (7), в которых первые производные медленных функций A, B и разность членов, содержащих первые степени A, B,— значения порядка μ.

Разрешив систему (8) относительно неизвестных A, B с учетом формул (12), (13) и располагая члены в полученных равенствах по степеням параметра μ, определим стационарные амплитуды

$$0 = \bar{A}(a_0 + a_1\bar{A}^2 + \mu a_2\bar{A}^4 + \mu^2 a_3\bar{A}^6 + \mu^3 a_4\bar{A}^8);$$
$$0 = \bar{B}(b_0 + b_1\bar{B}^2 + \mu b_2\bar{B}^4 + \mu^2 b_3\bar{B}^6 + \mu^3 b_4\bar{B}^8). \quad (14)$$

Здесь

$$a_0 = b_0 = \beta_1\beta_2 - |q_1||q_2| = \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2 - p_1p_2\frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{\omega^2};$$
$$a_1 = -\frac{1}{4}(\beta_1\gamma_2 + \kappa_1^2\beta_2\gamma_1); \quad b_1 = -\frac{1}{4}(\beta_2\gamma_1 + \kappa_2^2\beta_1\gamma_2); \quad (15)$$
$$\kappa_1^2 = \frac{\delta_1\beta_2}{\delta_2\beta_1}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\delta_2\beta_1}{\delta_1\beta_2}, \quad \kappa_1\kappa_2 = 1.$$

Остальные коэффициенты не приводим из-за их громоздкости.

Система полиномов (14) имеет две пары действительных положительных корней. Первая пара $\bar{A} = 0$, $\bar{B} = 0$ (16) соответствует статическому режиму, т. е. отсутствию колебаний в системе. Вторая пара корней, найденных с точностью до μ,

$$\bar{A}^2 = 4\frac{\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2 - p_1p_2\dfrac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{\omega^2}}{\beta_1\gamma_2 + \kappa_1^2\beta_2\gamma_1};$$

$$\bar{B}^2 = 4\frac{\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2 - p_1p_2\dfrac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{\omega^2}}{\beta_2\gamma_1 + \kappa_2^2\beta_1\gamma_2} \quad (17)$$

соответствует стационарному (установившемуся) динамическому режиму. Полученные выражения определяют амплитуды установившихся колебаний в ячейках автогенератора как функции параметров системы. Таким образом, в первом приближении найдены значения амплитуд гармонических колебаний на резонансных контурах КА в установившемся режиме.

Чтобы исследовать зависимость полученных выражений от расстройки параметров контуров, сделаем упрощение, основанное на экспериментальных данных.

Считаем разность между частотами ω, ω_1, ω_2 малой, тогда расстройка контуров $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega$. Это позволяет третий член в числителе правой части уравнения (17) приближенно представить в виде

$$\frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{\omega^2} \approx 4(\omega_2 - \omega_1)^2 = 4\Delta\omega^2.$$

Введя относительную расстройку контуров $\xi = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, представим выражение (17) в виде

$$\bar{A}^2 = 4\omega_1^2 \frac{q^2 - 4p_1p_2(\xi - 1)^2}{\beta_1\gamma_2 + \kappa_1^2\beta_2\gamma_1}; \quad \bar{B}^2 = 4\omega_1^2 \frac{q^2 - 4p_1p_2(\xi - 1)^2}{\beta_2\gamma_1 + \kappa_2^2\beta_1\gamma_2}, \tag{18}$$

где $q^2 = \frac{\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2}{\omega_1^2}$.

Графики зависимостей значений $\bar{A}^2$, $\bar{B}^2$ как функций расстройки при фиксированных значениях остальных параметров КА показаны на рис. 1.

Из (18) следует, что максимального значения A_m^2, B_m^2 стационарные амплитуды достигают при относительной расстройке $\xi = 1$, т. е. при одинаковых резонансных параметрах контуров

$$A_m^2 = 4\frac{\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2}{\beta_1\gamma_2 - k_1^2\beta_2\gamma_1};$$

$$B_m^2 = 4\frac{\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2}{\beta_2\gamma_1 + k_2^2\beta_1\gamma_2}. \tag{19}$$

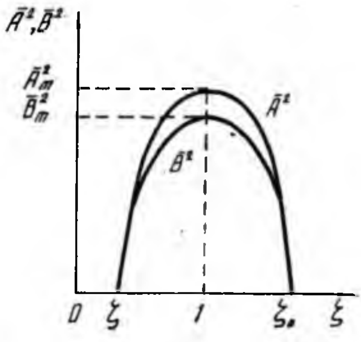

Рис. 1

«Перекос» значений стационарных амплитуд вызван неидентичностью остальных параметров резонансных усилителей КА и определяется соотношением между k_1, k_2. Если $k_1 = k_2 = 1$ или $\delta_1\beta_2 = \delta_2\beta_1$, то $\bar{A}^2 = \bar{B}^2$ и графики стационарных амплитуд сливаются.

Приравнивая в выражениях (18) правые части к нулю и решая квадратное относительно ξ уравнение, находим значения $\xi_н$, $\xi_в$ расстроек, в пределах которых существует гармонический режим колебаний

$$\xi_н - 1 = \frac{q}{2\sqrt{p_1p_2}}; \qquad \xi_в = 1 + \frac{q}{2\sqrt{p_1p_2}}. \tag{20}$$

В выражениях (18) произведение $p_1p_2 = \frac{\delta_1\delta_2}{(\delta_1 + \delta_2)^2}$ (21) зависит от неидентичности расстройки контуров по затуханиям δ_1, δ_2. Введем параметр «расстройки» по затуханию $\eta = \delta_2/\delta_1$ и рассмотрим зависимость стационарных амплитуд $\bar{A}$, $\bar{B}$ от параметра η. Изменим δ_1, δ_2 таким образом, чтобы в (18) оставалось постоянным произведение $\delta_1\delta_2 = \delta^2$, т. е. положим $\eta = \delta^2/\delta_1^2$. В этом случае (21) можно записать в виде

$$p_1p_2 = \frac{\eta}{(1+\eta)^2}; \qquad A^2 = 4\omega_1^2 \frac{q^2 - 4\frac{\eta(\xi-1)^2}{(1+y)^2}}{\beta_1\gamma_2 + \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\frac{\gamma_1}{\eta}};$$

$$\bar{B}^2 = 4\omega_1^2 \frac{q^2 - 4\,\dfrac{\eta(\xi - 1)^2}{(1 + y)^2}}{\beta_2\gamma_1 + \eta\,\dfrac{\beta_1^2}{\beta_2}\gamma_2}\,. \tag{22}$$

Графики зависимости $\bar{A}^2$, $\bar{B}^2$ от η представлены на рис. 2.

Ширина полосы расстроек, в которой существует стационарный режим колебаний,

$$\Delta\xi = \xi_{в} - \xi_{н} = \frac{\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2}{\sqrt{p_1p_2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} + \sqrt{\eta}\right)(\beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2). \tag{23}$$

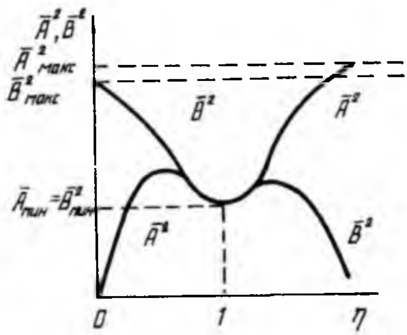

Рис. 2

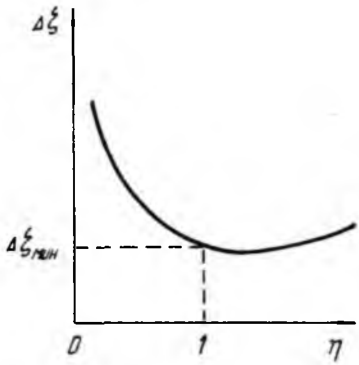

Рис. 3

Зависимость $\Delta\xi$ от η представлена на рис. 3. Согласно (23) в случае постоянства остальных параметров $\Delta\xi$ достигает минимума при $\eta = 1$, т. е. при равенстве затуханий контуров $\delta_1 = \delta_2$, и расширяется при рассогласовании контуров по затуханиям. Таким образом, увеличение «расстройки» ведет к расширению полосы устойчивой работы стационарного режима.

Рассмотрим бесконечно близкие к $\bar{A}$, $\bar{B}$ решения системы уравнений (7) $A = \bar{A} + \delta A$; $B = \bar{B} + \delta B$ (24).

Подставим (24) в уравнения установления колебаний (7). Разлагая правые части уравнения в ряд Тейлора по малым величинам δA, δB и ограничиваясь линейными членами ряда, получаем систему уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\delta A}{dt} &= -\frac{1}{2} q_1 \delta A + \frac{1}{2}\left(\beta_1 - \frac{3}{4}\gamma_1 \bar{B}^2\right)\delta B = a_{11}\delta A + a_{12}\delta B; \\ \frac{d\delta B}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\beta_2 - \frac{3}{4}\gamma \bar{A}^2\right)\delta A - \frac{1}{2} q_2 \delta B = a_{21}\delta A + a_{22}\delta B. \end{aligned} \tag{25}$$

Согласно общей теореме Ляпунова [3], если все собственные значения матрицы $A = (a_{ij})$ системы уравнения (25) имеют отрицательные действительные части, то стационарные состояния системы (7) асимптотически устойчивы.

Собственные значения λ_i находим из определителя следующего матричного уравнения: $\bar{A} - \lambda\hat{E} = 0$ (26). Здесь $\hat{E}$ — единичная матрица.

Раскрывая определитель уравнения (26), получаем относительно λ уравнение второй степени с комплексными коэффициентами $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = 0$ (27), имеющие два комплексных корня λ_1, λ_2, действительные части которых $\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}\} = a \pm \pm\sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + \sqrt{b^2 + c^2})}$ (28), где

$$a = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}; \quad c = \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\delta_2 - \delta_1)}{16\omega}; \tag{29}$$

$$b = \frac{4\left(\beta_1 - \frac{3}{4}\gamma_1 B^2\right)\left(\beta_2 - \frac{3}{4}\gamma_2 A^2\right) + (\delta_2 - \delta_1) - \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{\omega^2}}{16}.$$

Из (29) следует, что неравенство $\mathrm{Re}\{\lambda_2\} < 0$ всегда имеет место, а выполнение неравенства $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} < 0$ эквивалентно соотношению $a^2 - b > \frac{c^2}{4a^2}$ (30), раскрывая которое, приходим к следующим выражениям: $2\bar{A}^2 > 0$, $2\bar{B}^2 > 0$, т. е. стационарный динамический режим обладает сильной устойчивостью, а стационарный статистический режим неустойчив согласно (30).

Список литературы: 1. *Бондарь Б. Г., Мельник В. Г., Савченко И. С.* К некоторым вопросам теории многофазных генераторов // Радиотехника.— 1977.— Вып. 43.— С. 7—14. 2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 376 с. 3. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1974.— 423 с.

Поступила в редколлегию 16.05.85