

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ВЫПУКЛЫХ ИМПЕДАНСНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Введение

Широко известен подход к решению задач дифракции на выпуклых телах, предложенный Фоком [1]. Фок показал, что в полутеневой зоне поле на поверхности тела имеет локальный характер и для любой точки полутеневой зоны определяется (помимо величины падающего поля) исключительно свойствами поверхности в данной точке.

Решая задачу дифракции плоской электромагнитной волны на параболоиде, Фоком были получены универсальные формулы, связывающие значение поля на поверхности тела с полем падающей волны. Указанные формулы справедливы и в теневой зоне, а в освещенной зоне (где угол падения луча к поверхности мал) переходят в обобщенные отражательные формулы Френеля.

Также было показано [2], что формулы для полутеневой зоны путем асимптотических представлений могут быть преобразованы в выражения, пригодные для вычисления полей как в теневой, так и в глубине освещенной зоны. Однако полученные выражения различаются для теневой и освещенной зоны, что неудобно для вычислений.

В работе [3] получены интерполяционные формулы, позволяющие вычисление рассеянного круговым идеально-проводящим цилиндром поля как в теневой, так и в освещенной зоне. В то же время вывод этих формул предполагает нулевой поверхностный импеданс.

В настоящей работе показано, что данные формулы справедливы и для импедансных круговых цилиндров (отличаются только более общей формой входящих в них интегралов). Кроме того показано, что формулы могут быть трансформированы в универсальные формулы, пригодные для выпуклых цилиндров с переменным радиусом кривизны, в частности эллиптических.

Асимптотическое решение для поля, рассеянного импедансным круговым цилиндром

Геометрия задачи изображена на рис. 1.

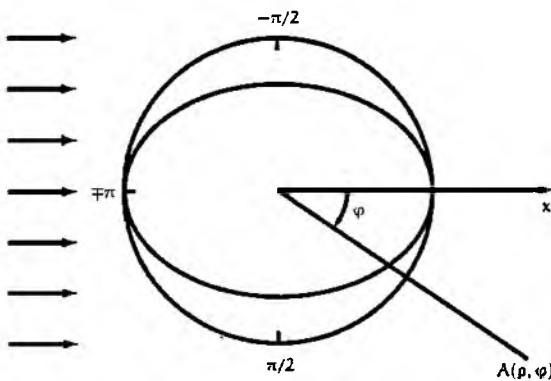


Рис. 1. Геометрия задачи

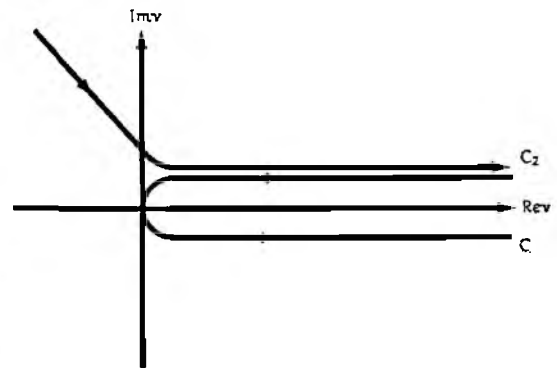


Рис. 2. Контуры интегрирования

Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении оси x падает на бесконечно протяженный круговой цилиндр радиуса a , а ось z совпадает с осью цилиндра.

Как известно, потенциал поля при дифракции плоской электромагнитной волны на импедансном круговом цилиндре может быть представлен как

$$u = \frac{E_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (i)^n \times \left[J_n(k\rho) - \frac{J_n(ka) + QJ_n'(ka)}{H_n^{(1)}(ka) + QH_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) \right] \cos n\varphi, \quad (1)$$

где k – волновое число, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$, $J_n, J'_n, H_n^{(1)}, H_n^{(1) \prime}$ – функции Бесселя и Ханкеля и их производные соответственно, E_0 – амплитуда падающего поля. Входящий в выражение коэффициент

$$Q = \begin{cases} i\delta & \text{в случае } H \text{ – поляризации;} \\ i\frac{1}{\delta} & \text{в случае } E \text{ – поляризации.} \end{cases} \quad (2)$$

где δ представляет собой приведенный поверхностный импеданс. Преобразуем сумму (1) в интеграл, посредством преобразования Ватсона. Получим

$$u = -\frac{iE_0}{k^2} \int_C \frac{e^{-i\frac{m}{2} \cos v \varphi}}{\sin \pi v} \left[J_\nu(k\rho) - \frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1) \prime}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] dv. \quad (3)$$

Контур интегрирования C охватывает положительную часть вещественной оси v (см. рис. 2). В силу четности подынтегрального выражения в (3) контур интегрирования C может быть заменен контуром C_2 .

Интеграл (3) может быть записан в виде двух интегралов

$$u = \frac{iE_0}{k^2} \int_{C_2} \frac{e^{-i\frac{m}{2} \cos v \varphi}}{\sin \pi v} J_\nu(k\rho) dv - \frac{iE_0}{k^2} \int_{C_2} \frac{e^{-i\frac{m}{2} \cos v \varphi}}{\sin \pi v} \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1) \prime}(ka)} H_\nu^{(1)}(k\rho) \right] dv = u_0 + u_1. \quad (4)$$

Первый из них представляет падающее поле, а второй – рассеянное. Будем рассматривать рассеянное поле.

В дальней зоне ($k\rho \rightarrow \infty$) и мы можем заменить функцию Ханкеля ее асимптотикой

$$H_\nu^{(1)}(k\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4})} e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}. \quad (5)$$

Тогда потенциал рассеянного поля запишется в виде

$$u_1 = \frac{iE_0}{k^2} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} \frac{e^{-i\frac{m}{2} \cos v \varphi}}{\sin \pi v} \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1) \prime}(ka)} \right] dv. \quad (6)$$

Для случая нормального падения электромагнитной волны поле не зависит от координаты z , и $E_z = k^2 u_1$. Отсюда (принимая $E_0 = 1$) получим

$$E_z = -i \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4})} \int_{C_2} \frac{e^{-i\frac{m}{2} \cos v \varphi}}{\sin \pi v} \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1) \prime}(ka)} \right] dv. \quad (7)$$

Известно (см., например, [3]), что E_z может быть представлена в виде

$$E_z = -M^{\frac{3}{2}} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} A(\varphi, ka), \quad (8)$$

где $M = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, а $A(\varphi, ka)$ – амплитудная функция рассеянного поля.

Из (7) и (8) получим

$$A(\varphi, ka) = i \sqrt{\frac{4}{ka}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{C_2} \frac{e^{-i\frac{m}{2} \cos v \varphi}}{\sin \pi v} \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1) \prime}(ka)} \right] dv. \quad (9)$$

Представим (9) в виде суммы

$$A(\varphi, ka) = A_1(\varphi, \int ka) + A_2(\varphi, ka), \quad (10)$$

где

$$A_1(\varphi, ka) = 2\sqrt{\frac{4}{ka}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_2} \cos v\varphi \cdot \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \right] dv, \quad (11)$$

и

$$A_2(\varphi, ka) = i\sqrt{\frac{4}{ka}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_2} \frac{e^{i\nu\pi} \cos v\varphi}{\sin \pi\nu} \cdot \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \right] dv. \quad (12)$$

Запишем (11) в виде

$$A_1(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{4}{ka}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_2} e^{i\nu\varphi} \cdot \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \right] dv + \\ + \sqrt{\frac{4}{ka}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_2} e^{-i\nu\varphi} \cdot \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \right] dv. \quad (13)$$

Так как

$$J_\nu(ka) \approx \frac{1}{M\sqrt{\pi}} v(t), \quad J'_\nu(ka) \approx -\frac{1}{M^2\sqrt{\pi}} v'(t); \quad (14)$$

$$H_\nu^{(1)}(ka) \approx -\frac{i}{M\sqrt{\pi}} w_1(t), \quad H_\nu^{(1)'}(ka) \approx \frac{i}{M^2\sqrt{\pi}} w_1'(t), \quad (15)$$

где $v = ka + Mt$, то

$$\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \approx i \frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)}. \quad (16)$$

Здесь $q = QM$. Осуществляя подстановку (16) в (13) и переходя к интегрированию по t (с учетом того, что $dv = Mdt$), получим

$$A_1(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{2}{M}} e^{i\kappa a\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{iM\varphi t} \cdot \left[\frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} \right] dt + \\ + \sqrt{\frac{2}{M}} e^{-i\kappa a\varphi} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{-iM\varphi t} \cdot \left[\frac{v'(t) - qv(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} \right] dt. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь выражение (12). Разлагая входящий в подынтегральное выражение сомножитель

$$\frac{e^{i\nu\pi} \cos v\varphi}{\sin \pi\nu} = -i(e^{i\nu(2\pi+\varphi)} + e^{i\nu(2\pi-\varphi)} + \dots), \quad (18)$$

и подставляя указанное выше разложение в (12), получим

$$A_2(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{4}{ka}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_2} e^{i\nu(2\pi-\varphi)} \cdot \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \right] dv + \\ + \sqrt{\frac{4}{ka}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_2} e^{i\nu(2\pi+\varphi)} \cdot \left[\frac{J_\nu(ka) + QJ'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka) + QH_\nu^{(1)'}(ka)} \right] dv. \quad (19)$$

Производя замену функций Ханкеля и Бесселя их асимптотическими представлениями через функции Эйри – Фока подобно тому как это было сделано для $A_1(\varphi, ka)$, имеем

$$A_2(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{2}{M}} e^{ika(2\pi+\varphi)} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{iM(2\pi+\varphi)t} \left[\frac{v(t) - qv(t)}{w_1(t) - w_1(t)} \right] dt + \sqrt{\frac{2}{M}} e^{ika(2\pi-\varphi)} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{iM(2\pi-\varphi)t} \left[\frac{v(t) - qv(t)}{w_1(t) - w_1(t)} \right] dt. \quad (20)$$

Вводя обозначение

$$\hat{g}(\xi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\xi t} \left[\frac{v(t) - qv(t)}{w_1(t) - w_1(t)} \right] dt, \quad (21)$$

получим следующее выражение для амплитудной функции рассеянного поля

$$A(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{2}{M}} [e^{ika\varphi} \hat{g}(M\varphi) + e^{-ika\varphi} \hat{g}(-M\varphi) + e^{ika(2\pi+\varphi)} \hat{g}(M(2\pi+\varphi)) + e^{ika(2\pi-\varphi)} \hat{g}(M(2\pi-\varphi)) + \dots]. \quad (22)$$

Полученное нами выражение для амплитудной функции рассеянного поля в виде (22) неприменимо в освещенной области. Для получения универсальной формулы применим подход изложенный в [3]. Для этого примем, что

$$-M\varphi = -2M \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (23)$$

Из (23) следует, что

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin \left(\frac{M\varphi}{2M} \right). \quad (24)$$

Раскладывая арксинус в ряд, приходим к выражению

$$\varphi = \frac{M\varphi}{M} + \frac{1}{3} \frac{(M\varphi)^3}{(2M)^3} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \frac{(M\varphi)^3}{(2M)^3}. \quad (25)$$

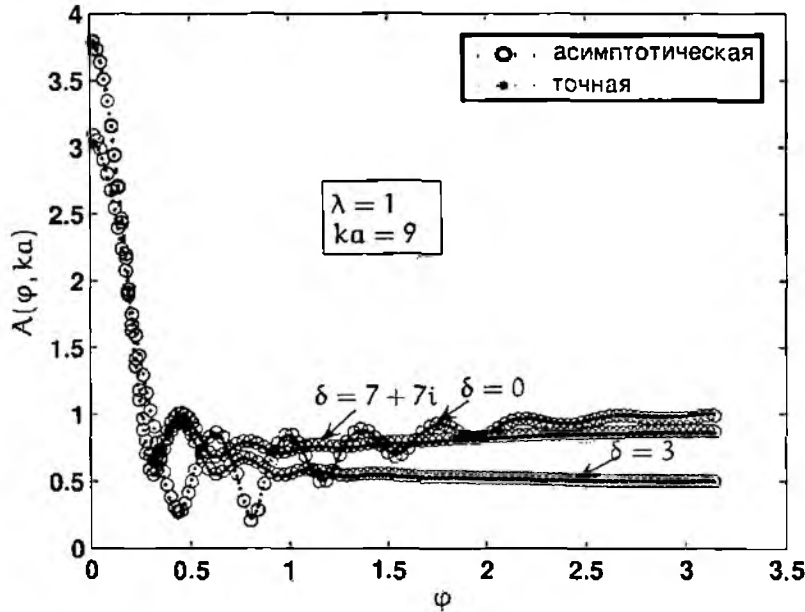


Рис. 3. Амплитудная функция рассеяния импедансным круговым цилиндром, H -поляризация

С учетом (23) и (25) можем записать

$$e^{-ika\varphi} = e^{-ika \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{12} (-2M \sin \frac{\varphi}{2})^3}. \quad (26)$$

Ограничиваясь в выражении (22) первыми двумя членами, подставляя в него выражение (26) и заменяя аргумент $-M\varphi$ на $-2M \sin \frac{\varphi}{2}$, получим интерполяционную формулу амплитудной функции, которая применима как для теневой так и для освещенной зоны

$$A(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{2}{M}} \left[e^{ika\varphi} g(M\varphi) + e^{-ika2 \sin \frac{\varphi}{2}} e^{\frac{i}{2}(-2M \sin \frac{\varphi}{2})^3} g(-2M \sin \frac{\varphi}{2}) \right]. \quad (27)$$

Эта формула полностью совпадает с подобной формулой в [3], выведенной в предположении идеально-проводящей поверхности кругового цилиндра.

На рис. 3 приведено сравнение диаграмм направленности поля, рассеянного импедансным круговым цилиндром, вычисленных по асимптотической формуле (27) и по формуле строчной теории (амплитудная функция представлена в виде разложения по собственным функциям кругового цилиндра) для случая H -поляризации при различных значениях импеданса.

Асимптотическое решение для поля, рассеянного импедансным эллиптическим цилиндром

Полученная выше формула (27) может быть распространена на случай импедансного выпуклого цилиндра с произвольной кривизной. Рассмотрим данную процедуру на примере эллиптического цилиндра (см. рис. 1).

Как показано в работе [4], параметр ξ характеризует набег фазы волны по поверхности тела произвольной кривизны и может быть записан как

$$\xi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\rho_g} \left(\frac{k\rho_g}{2} \right)^{\frac{1}{3}} dt, \quad (28)$$

где t – длина дуги, ρ_g – радиус кривизны. Несложно заметить, что аргумент $M\varphi$ в формулах (22), (27) и есть параметр ξ . В самом деле, в случае кругового цилиндра ρ_g представляет собой константу, равную радиусу цилиндра a , и уравнение (28) может быть представлено в виде

$$\xi = \int_0^t \frac{1}{a} \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{a} \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^t dt = \frac{1}{a} \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}} t = \frac{1}{a} Ma\varphi = M\varphi. \quad (29)$$

Длина же дуги поверхности определяется как

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (30)$$

и в случае кругового цилиндра равна $a\varphi$.

Интерполяционную формулу можно получить исходя из следующих соображений. Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\rho_g} dt = \alpha. \quad (31)$$

Выделим малый участок дуги Δt , заключенный между t_1 и t_2 и вычисляемый по формуле (30). Можно показать, что величина α представляет собой угол между радиусами кривизны, на которые опирается участок дуги, поскольку произведение α на радиус кривизны участка дуги Δt (при $\Delta t \rightarrow 0$) представляет собой длину этой самой дуги.

Также можно заметить, что угол α , при стремлении эллипса к окружности, будет стремиться к углу φ .

Таким образом, разделив интегралы (28) и (30) на α , выделяя, тем самым, ρ_g и M компоненты соответственно и умножая результат на $2 \sin \frac{\alpha}{2}$, запишем

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\rho_g} \left(\frac{k\rho_g}{2} \right)^{\frac{1}{2}} dt}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\xi}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\int_0^1 dt}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (32)$$

Помимо этого, необходимо учесть (см. [2]), что для поля в теневой области

$$M = \sqrt{M(t_1)M(t_2)}, \quad (33)$$

где $t_1 - t_2$ длина дуги от границы свет-тень до точки отрыва луча от поверхности.

Подставляя (32), (33) в (27), получим амплитудную функцию

$$A(\varphi, ka) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{M(t_1)M(t_2)}}} M e^{ikl} \mathcal{J}_g(\xi) + \sqrt{\frac{2}{M}} e^{-ik \frac{l}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2}} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{\xi}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \mathcal{J}_g \left(-\frac{\xi}{\alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (34)$$

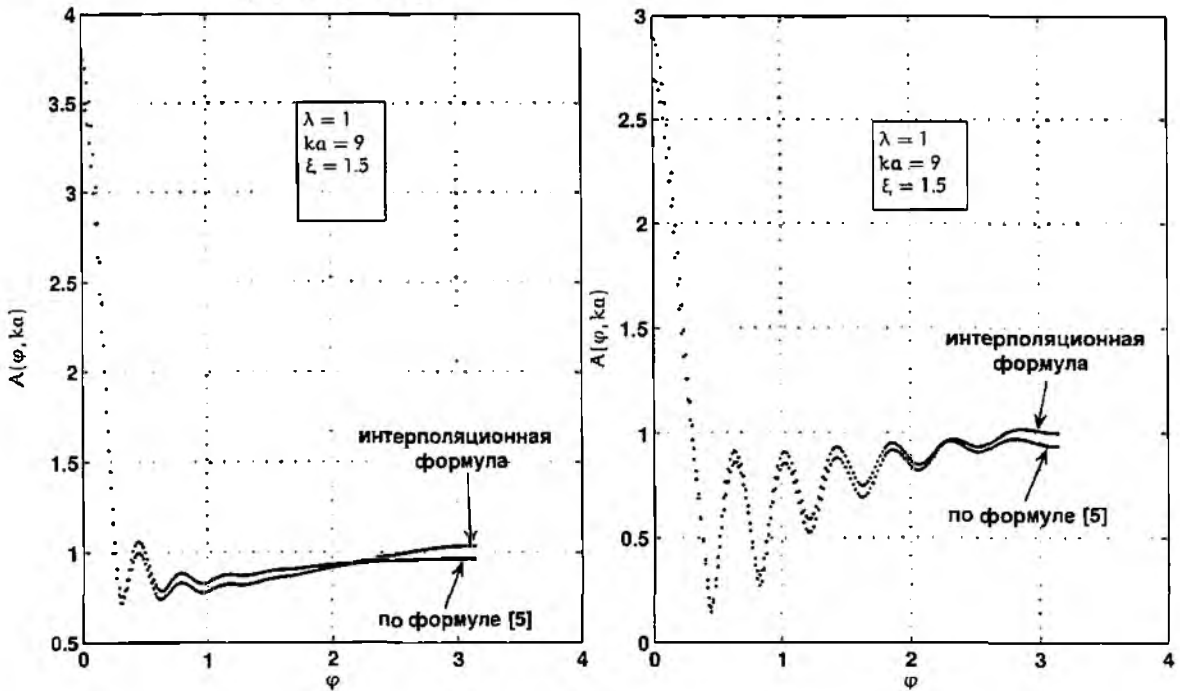


Рис. 4. Амплитудные функции рассеяния идеально проводящим эллиптическим цилиндром: а – E -поляризация, б – H -поляризация

На рис. 4 приведено сравнение диаграмм направленности идеально-проводящего эллиптического цилиндра, рассчитанных соответственно по формуле (34) и по данным, приведенным в [5] (амплитудная функция представлена в виде разложения по функциям Матье) для случая E - и H -поляризации.

Необходимо отметить, что формула, приведенная в [5], дает корректные результаты для случая небольших размеров цилиндров и эллиптичностей, а формула (34) – для эллиптических цилиндров с минимальным радиусом кривизны большим чем длина волны, поэтому сравнение возможно в достаточно узком диапазоне размеров и эллиптичностей.

Заключение

Получены интерполяционные формулы для вычисления амплитудных функций рассеяния для кругового и эллиптического импедансных цилиндров, пригодные для расчетов в теневой и в освещенной областях.

Проведено сравнение амплитудной функции рассеяния при различных значениях поверхностного импеданса, вычисленной по интерполяционной формуле и по формулам строгой теории для кругового цилиндра, которое показало практически полное совпадение результатов.

Для идеально-проводящего эллиптического цилиндра проведено сравнение амплитудной функции рассеяния, вычисленной по интерполяционной формуле и по формуле, выражающей поле через собственные функции эллиптического цилиндра, и получено хорошее совпадение, с учетом диапазона применимости указанных формул.

Список литературы: 1. Фок В.А. Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с. 2. Syed, H., Volakis, J. An asymptotic analysis of the plane wave scattering by a smooth convex impedance cylinder // Tech. Rep. 025921-9-T: University of Michigan Radiation Laboratory, 1990. January. 31 pp. 3. Горяинов А.С. Асимптотическое решение задачи о диффракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре. // *Радиотехника и электроника*. 1958. Т. 3, № 5. С. 603–614. 4. Pathak, P. A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface // *Proc. IEEE*. 1974. Vol. 62, No. 11. Pp. 1438–1447. 5. Батраков Д.О. Рассеяние электромагнитных волн эллиптическим цилиндром, поверхность которого обладает разнородными электрическими свойствами: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. Харьков, 1985. 216 с.

*Харьковский национальный
университет радиозлектроники*

Поступила в редколлегию 17.02.2009