ПРО РОЗРАХУНОК СТАЦІОНАРНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ В СКІНЧЕННИХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Шишка А.В.
Науковий керівник – доц., к.ф.-м.н. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166 Харків, пр. Леніна 14, каф ПМ, тел. 057-7021-436)
E-mail: awuwka@gmail.com

This paper introduces an iterative method for calculating the planar flow of a viscous fluid, based on the joint application of the method of successive approximations by nonlinear component and the R-functions method.

Розглянемо плоску стаціонарну задачу про рух в'язкої нестисливої рідини в скінченній однозв'язній області Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Така течія може бути описана крайовою задачею для одного нелінійного рівняння четвертого порядку відносно функції течії $\psi(x,y)$:

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re} J(\Delta\psi,\ \psi) \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \ s\in\partial\Omega. \tag{2}$$

Тут Re – число Рейнольдса; $\frac{d\tilde{f}}{ds}$, $\tilde{g}$ – деякі розподіли нормальної та дотичної складових швидкості потоку відповідно; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$; $J(\Delta\psi,\ \psi) = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Для розв'язування задачі (1), (2) побудуємо процес послідовних наближень. Нехай $u_0(x,y)$ – розв'язок наступної задачі:

$$\Delta^2 u_0 = 0 \text{ у } \Omega, \tag{3}$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \ s\in\partial\Omega. \tag{4}$$

Задача (3), (4) в зроблених припущеннях може бути розв'язана за допомогою методів R-функцій та Рітца [1].

В задачі (1), (2) зробимо заміну $\psi = u_0 + u$, де u – нова невідома функція. Це приводить до задачі з однорідними крайовими умовами

$$\Delta^2 u = \mathrm{Re} J\big(\Delta(u_0+u),\ u_0+u\big) \text{ у } \Omega, \tag{5}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Послідовні наближення до розв'язку задачі (5), (6) будуватимемо наступним чином. Нехай початкове наближення $u^{(0)}$ задано. Тоді при відомому значенні $u^{(k)}$ функції u на k-й ітерації наступне $(k+1)$-е наближення знаходиться як розв'язок наступної лінійної задачі

$$\Delta^2 u^{(k+1)} = \text{Re} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}),\ u_0 + u^{(k)}) \text{ у } \Omega, \tag{7}$$

$$u^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{8}$$

Відомо [2], що оператор крайової задачі (7), (8) додатно визначений і при фіксованій правій частині в (7) розв'язок задачі (7), (8) може бути знайдений як точка мінімуму в H_{Δ^2} функціоналу енергії

$$I[u] = \int_\Omega [(\Delta u)^2 - 2u \text{Re} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}),\ u_0 + u^{(k)})]dxdy, \tag{9}$$

де H_{Δ^2} – відповідний енергетичний простір.

Згідно з методом Рітца наближений розв'язок задачі (7), (8) подамо у вигляді

$$u_N^{(k+1)}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(k+1)} \varphi_i(x, y), \tag{10}$$

де $\varphi_i(x, y) = \omega^2(x, y)\tau_i(x, y)$; $\omega(x, y)$ – функція, що описує геометрію області: 1) $\omega(x,y) = 0$ на $\partial\Omega$; 2) $\omega(x,y) > 0$ у Ω; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$; $\tau_i(x, y)$ – повна в $L_2(\Omega)$ система функцій; $c_i^{(k+1)}$ – невизначені коефіцієнти. Для визначення сталих $c_i^{(k+1)}$ отримаємо систему Рітца, що відповідає функціоналу (9).

Запропонований метод показав свою ефективність на модельній задачі розрахунку стаціонарної течії в квадратній каверні при русі верхньої кришки. Матриця системи Рітца є симетричною і не змінюється від ітерації до ітерації. Це дозволяє використовувати її повторно при різних значеннях числа Рейнольдса. Також є можливість прискорювати формування системи Рітца використовуючи паралельні обчислення на базі технології NVIDIA CUDA [3].

Список джерел:

1. Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету течений Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. – № 4. – 2002. – С. 77 – 78.

2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

3. Сидоров М.В., Шишка А.В. Застосування паралельних обчислень та технології NVIDIA CUDA до розв’язання крайових задач математичної фізики варіаційними методами // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – 2011. – № 987, вып. 18. – С. 99 – 106.