

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Антонцю Олегу Миколайовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Аналіз процесів фільтрації в областях з вільною межею

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель фільтраційної течії в області з вільною межею

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ асист. Славик О.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 57 с., 4 табл., 11 рис., 1 дод., 24 джерела.

ФІЛЬТРАЦІЙНА ТЕЧІЯ, ВІЛЬНА ПОВЕРХНЯ, ТЕОРІЯ R -ФУНКЦІЙ, МЕТОД РІТЦА, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.

Об'єкт дослідження – процеси фільтрації у пористому ґрунті з вільною поверхнею.

Мета роботи – застосування методу R -функцій до аналізу задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею.

Методи дослідження – конструктивний апарат теорії R -функцій для побудови структур розв'язку розглядуваних крайових задач, метод Рітца для апроксимації невизначених компонент зазначених структур та метод найменших квадратів для уточнення рівняння вільної межі.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу комп'ютерного моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею. Було проведено системний аналіз проблеми комп'ютерного моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею та сценаріїв її вирішення, зроблено висновок про доцільність використання конструктивного апарату теорії R -функцій у поєднанні з методом Рітца та точковим методом найменших квадратів. На основі методики побудови структур розв'язку побудовано жмуток функцій, що точно задовольняє всі крайові умови задачі. Для апроксимації невизначеної компоненти жмутка запропоновано використати метод Рітца, а для ітераційного уточнення рівнянн вільної межі – точковий метод найменших квадратів. Запропонована методика була алгоритмізована та програмно реалізована у системі Wolfram Mathematica 13.3. Наведено результати обчислювального експерименту для тестової задачі з відомим точним розв'язком.

ABSTRACT

Introductory note: 57 pages, 4 tables, 11 figures, 1 appendix, 24 sources.

FLOW IN POROUS MEDIA, FREE BOUNDARY, *R*-FUNCTION THEORY, RITZ METHOD, LEAST SQUARE METHOD.

Object of research – filtration processes in porous media with a free surface.

Purpose of work – application of the *R*-function's method to analyze the problem of modeling filtration processes in regions with a free boundary.

Methods of research – constructive apparatus of the theory of *R*-functions for building solution structures of the considered boundary value problems, the Ritz method for approximating the undefined components of the mentioned structures, and the method of least squares for refining the free boundary equation.

The qualification work examines the problem of computer modeling of filtration processes in regions with a free boundary. A systematic analysis of the problem of computer modeling filtration processes in regions with a free boundary and scenarios for its solution has been conducted. A conclusion has been drawn about the feasibility of using the constructive apparatus of *R*-function theory in combination with the Ritz method and the pointwise least squares method. Based on the methodology for constructing solution structures, a bundle of functions that exactly satisfies all boundary conditions of the problem has been constructed. To approximate the undefined component of the bundle, it is proposed to use the Ritz method, and for iterative refinement of the free boundary equation – the pointwise least squares method. The proposed methodology has been algorithmized and implemented programmatically in Wolfram Mathematica 13.3. The results of a computational experiment for a test problem with a known exact solution are presented.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею	9
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею	10
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	15
1.4 Постановка задач дослідження	19
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	20
2.1 Конструктивний метод R -функцій в задачах моделювання фізико-механічних полів	20
2.2 Застосування методу R -функцій у аналізі процесів фільтрації в областях з вільною межею	31
Висновки за розділом 2	39
3 Програмна реалізація	40
3.1 Система Wolfram Mathematica 13.3	40
3.2 Алгоритм розв’язання задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею	41
3.3 Опис програми	42
Висновки за розділом 3	43
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	44
Висновки за розділом 4	48
Висновки	49
Перелік джерел посилання	50
Додаток А Лістинг програми	53

ВСТУП

Актуальність теми. Фільтраційні течії відіграють ключову роль у природних екосистемах, оскільки вони впливають на розподіл води, поживних речовин та забруднюючих речовин у ґрунті та водних ресурсах. Моделювання таких течій дозволяє передбачати, як забруднення можуть поширюватися у підземних водах, що має важливе значення для охорони навколишнього середовища та управління водними ресурсами.

У будівництві та геотехніці важливо розуміти поведінку ґрунтів і їх взаємодію з водою. Фільтраційні течії можуть викликати осідання, зсуви та інші небезпечні явища. Моделювання таких процесів допомагає інженерам проектувати безпечні та стабільні споруди.

Таким чином, моделювання фільтраційних течій в областях з вільною межею є надзвичайно важливою задачею в сучасній науці та інженерії. Це пов'язано з багатьма факторами, які визначають важливість дослідження даних процесів. Розробка нових методів і алгоритмів для моделювання цих процесів є важливим напрямком досліджень, що сприяє сталому розвитку та ефективному управлінню природними ресурсами. Отже, тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування методу R -функцій до аналізу задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею;
- розглянути основні теоретичні відомості, що відносяться до конструктивного апарату теорії R -функцій;
- застосувати метод R -функцій до аналізу задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею;
- розробити чисельний алгоритм розв'язання поставленої задачі моделю-

вання процесів фільтрації в областях з вільною межею;

– реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи систему Wolfram Mathematica 13.3;

– провести обчислювальний експеримент для тестової задачі та виконати аналіз його результатів.

Об'єктом дослідження є процеси фільтрації у пористому ґрунті з вільною поверхнею.

Предметом дослідження є методи математичного моделювання та чисельного аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються конструктивний апарат теорії R -функцій для побудови структур розв'язку розглянутих крайових задач, метод Рітца для апроксимації невизначених компонент зазначених структур та метод найменших квадратів для уточнення рівняння вільної межі.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею

Об'єкт – «Задача моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею».

Системна модель об'єкта створюється з метою вивчення етапів побудови математичної моделі цих фізичних процесів та побудови найбільш ефективного методу розв'язання. Вона включає в себе побудову моделей, пов'язаних між собою, і фізичних процесів, які протікають у системі і впливають один на одного; побудову геометричної моделі системи; розрахунок поля швидкостей рідини в області, яке стане перевіркою правильності побудови моделі. На окремі частини системи, такі як побудова математичної та розрахункової моделі, у цій роботі звернено особливу увагу [1 – 3].

Система «Задача моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею» належить до цілеспрямованих систем, для яких призначення визначається їхньою здатністю (властивістю) приймати потреби й виконувати певні дії для задоволення цих потреб. Отже, призначенням моделі є надання глобальної математичної моделі для її подальшого використання при вивченні фізичних процесів фільтрації. Задля реалізації мети системи використовують різні ресурси. До таких ресурсів належать: інформаційні, технологічні, енергетичні. Головний вихід системи – наближений розв'язок із заданою точністю. На входи системи подаються її фізичні та геометричні параметри, які однаково важливі та є невід'ємною частиною побудови моделі. За допомогою програмного продукту Mathematica та за безпосередньої участі дослідника, керуючись інформаційною базою, здійснюється реалізація процесу моделювання.

В рамках методології IDEF0 процес представляється у вигляді набору елементів-робіт, які взаємодіють між собою, а також показуються ресурси, що

споживаються кожною роботою [1 – 3].

Стосовно вже існуючих систем IDEF0 може бути використана для аналізу функцій, що виконуються системою, та відображення механізмів, за допомогою яких ці функції виконуються. Перша діаграма в ієрархії діаграм IDEF0 завжди зображує функціонування системи загалом. Такі діаграми називаються контекстними (рисунк 1.1). Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом (декомпозицією) однієї з робіт на діаграмі, що стоїть вище. Результат декомпозиції контекстної діаграми системи наведено на рисунках 1.2 – 1.6.

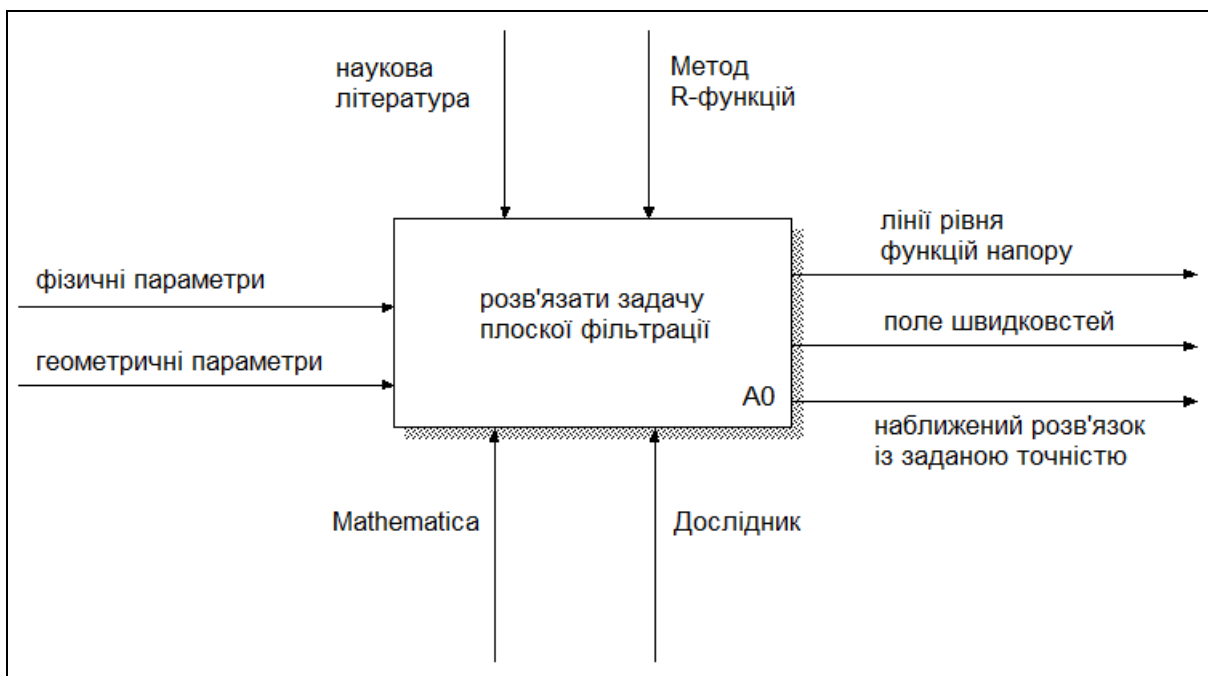


Рисунок 1.1 – Контекстна діаграма системи
«Розв'язати задачу плоскої фільтрації»

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею

Для задачі для функції течії необхідно вибрати метод розв'язання, що відповідає найкращій якості розв'язку, який характеризується заданими параметрами (рис. 1.7).

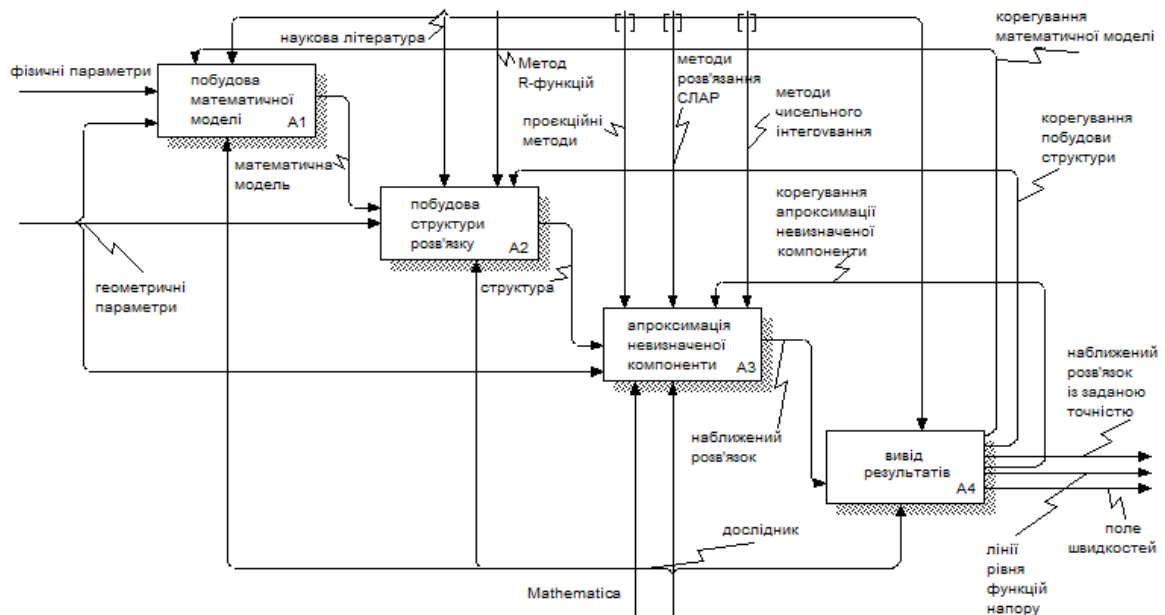


Рисунок 1.2 – Діаграма декомпозиції. Рівень A0

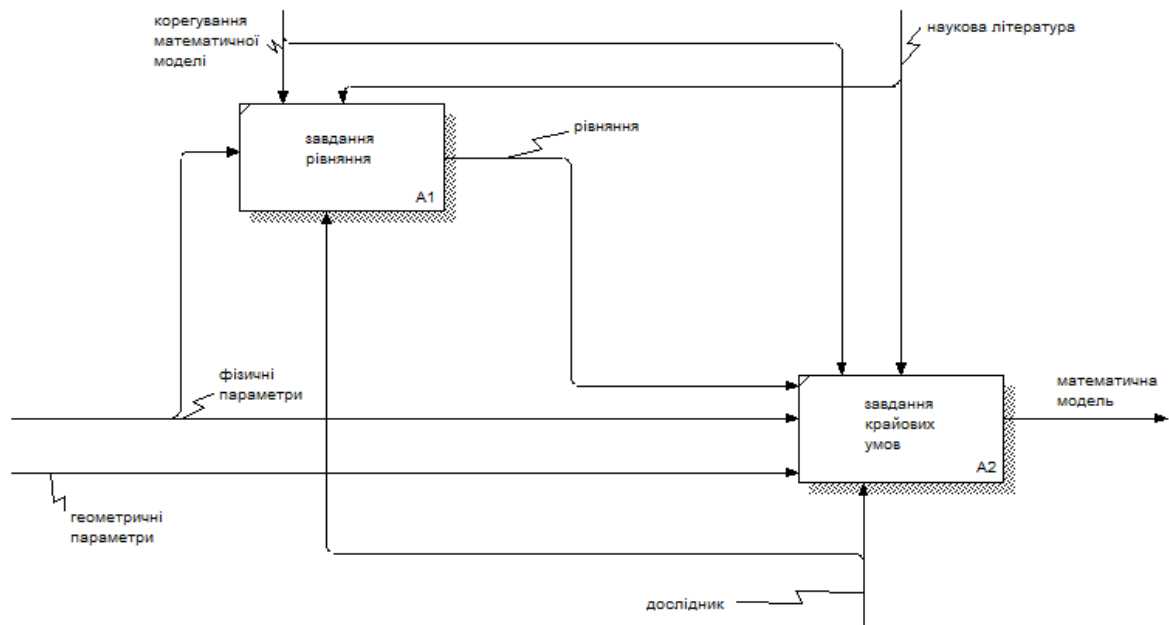


Рисунок 1.3 – Діаграма декомпозиції «Побудова математичної моделі».

Рівень A1

Нехай отримання розв'язку характеризується такими параметрами:

- ресурси ЕОМ, витрачені обчислення;
- час проведення розрахунків;
- точність отриманого розв'язку;

- обчислювальна складність алгоритму;
- форма подання отриманих результатів з точки зору простоти подальшого використання.

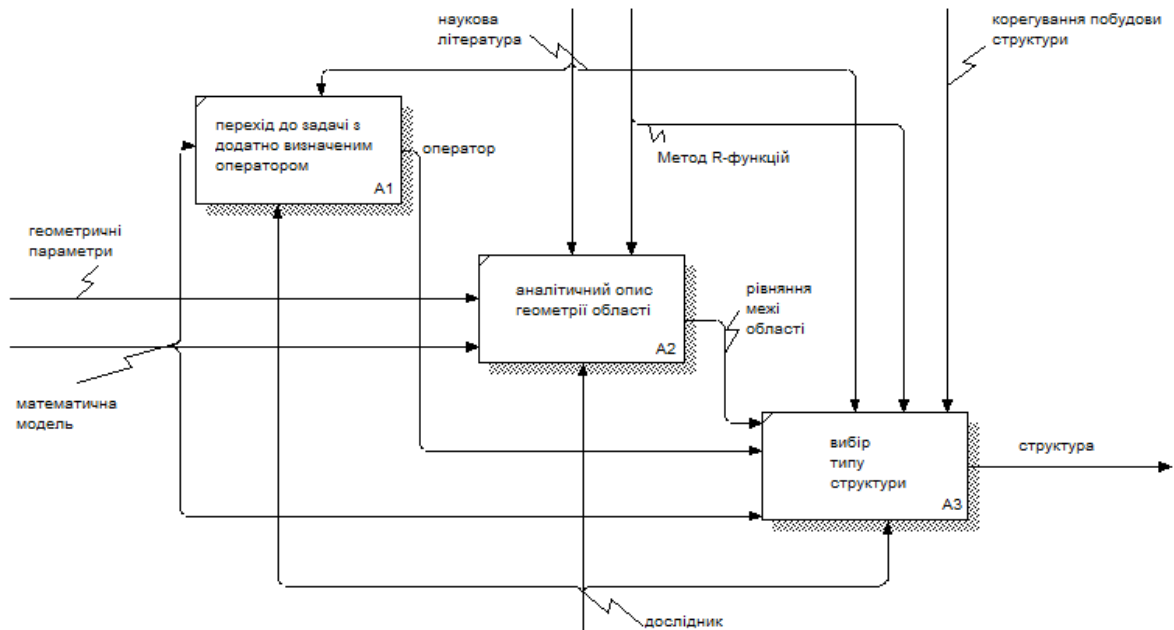


Рисунок 1.4 – Діаграма декомпозиції «Побудова структури розв’язку».

Рівень A2

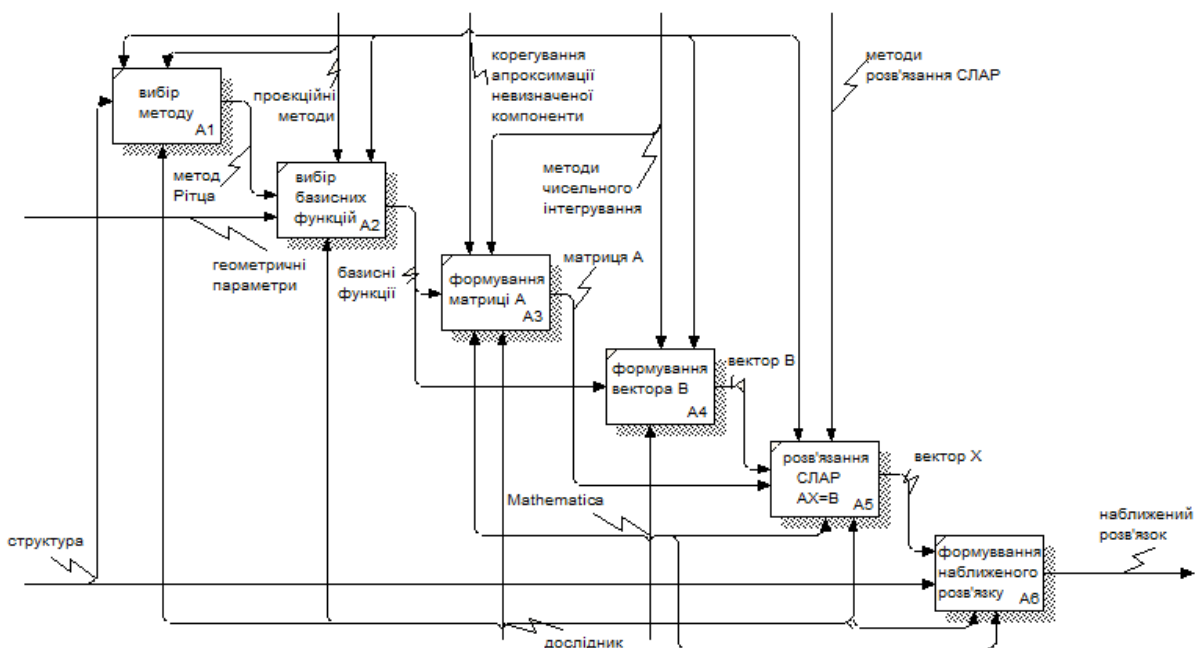


Рисунок 1.5 – Діаграма декомпозиції «Апроксимація невизначеної компоненти». Рівень A3

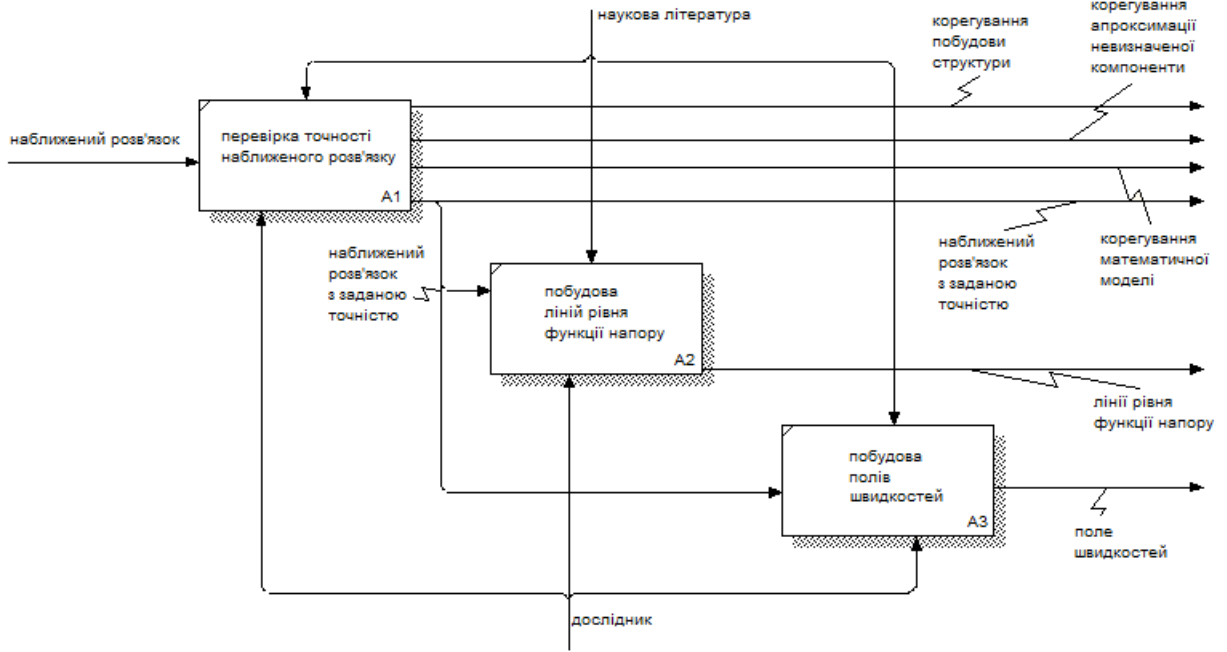


Рисунок 1.6 – Діаграма декомпозиції «Вивід результатів». Рівень A4

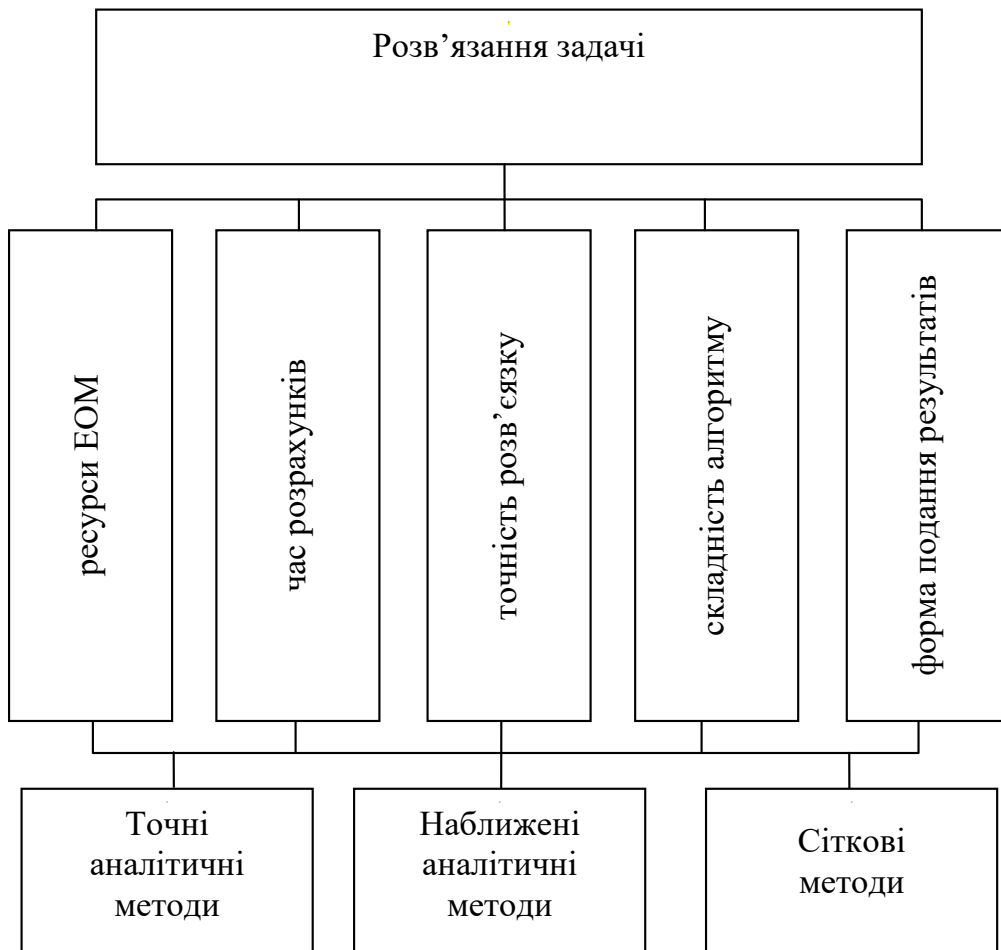


Рисунок 1.7 – Ієрархічна модель аналізу проблеми

Методи розв'язання:

- точні аналітичні методи;
- наближені аналітичні методи;
- сіткові методи.

У таблиці 1.1 наведено вектор пріоритетів елемента першого рівня.

Таблиця 1.1 – Вектор пріоритетів елемента першого рівня

Ресурси ЕОМ	Час розрахунків	Точність розв'язку	Складність алгоритму	Форма подання результатів
0,0177	0,5340	0,6292	0,2106	0,0890

Таблиця 1.2 містить компоненти векторів пріоритетів для елементів другого рівня.

Таблиця 1.2 – Компоненти векторів пріоритетів для елементів другого рівня

Елемент рівня	Вектор пріоритетів		
	Точні аналітичні методи	Наближені аналітичні методи	Сіткові методи
Ресурси ЕОМ	0,40	0,2	0,38
Час розрахунків	0,4076	0,2109	0,4001
Точність розв'язку	0,513	0,7143	0,1429
Складність алгоритму	0,1655	0,6098	0,2247
Форма подання результатів	0,1429	0,7143	0,1429

Значення якості розв'язку для кожного методу можна обчислити за загальною формулою:

$$Q = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \varphi_i = \lambda_T \left(1 - \frac{T_{\text{іст}}}{T_{\text{норм}}} \right) + \lambda_R \left(1 - \frac{R_{\text{іст}}}{R_{\text{норм}}} \right) + \lambda_A \frac{A_{\text{іст}}}{A_{\text{норм}}} + \lambda_C \left(1 - \frac{C_{\text{іст}}}{C_{\text{норм}}} \right) + \lambda_V \frac{V_{\text{іст}}}{V_{\text{норм}}},$$

де λ – важливість якості;

φ – міра якості.

Значення якості розв'язку наведено у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 – Значення якості розв'язку

Значення якості розв'язку		
Точні аналітичні методи	Наближені аналітичні методи	Сіткові методи
0,1659	0,6557	0,1784

У таких класичних точних аналітичних методах, як наприклад, метод Фур'є або метод інтегральних перетворень, геометрична інформація враховується вдалим вибором системи координат; у методі конформних відображень – побудовою підходящої відображаючої функції. Однак такі підходи далеко не завжди можливі.

Порівнюючи отримані значення якості, можна виділити наближені аналітичні методи на основі методу R -функцій як найефективніші для розв'язання задач розрахунку плоских задач фільтрації з вільною межею.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглянемо випадок двовимірного нестисливого потоку через ортотропний ґрунт у області Ω , у якій закон Дарсі може бути записаний так:

$v_1 = -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $v_2 = -k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2}$. Тут u – напір, k_{11} , k_{22} – коефіцієнти фільтрації, v_1 , v_2

– компоненти швидкості потоку. Рівняння нерозривності такого потоку має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0 \text{ у } \Omega. \quad (1.1)$$

Граничні умови задачі такі:

$$u = \bar{u} \text{ на } \partial\Omega_1;$$

$$v_n = - \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \alpha_{n1} + k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \alpha_{n2} \right) = \bar{v}_n \text{ на } \partial\Omega_2, \quad (1.2)$$

де \bar{v}_n – швидкість, спрямована за нормаллю до межі;

α_{n1} і α_{n2} – напрямні косинуси нормалі з осями Ox_1 і Ox_2 відповідно;

$\partial\Omega_1$ – непроникна частина межі;

$\partial\Omega_2$ – проникна частина межі.

Нехай в пористому ґрунті утворюється вільна поверхня рідини, що фільтрується, яка називається зазвичай поверхнею депресії. Точне положення цієї поверхні невідомо та її визначення становить одну з частин загального розв’язання. З цією метою використовується проста умова: у будь-якій точці вільної поверхні повний потенціальний напір u дорівнює напору H , що відповідає геометричному піднесенню вільної поверхні над площиною порівняння (атмосферний тиск приймається рівним нулю). Зазначимо, що наявність вільної ділянки межі області фільтрації робить крайову задачу (1.1), (1.2) нелінійною.

Розглянемо загальний випадок фільтрації, показаний на рис. 1.8, із чотирма різного типу ділянками межі [4 – 7].

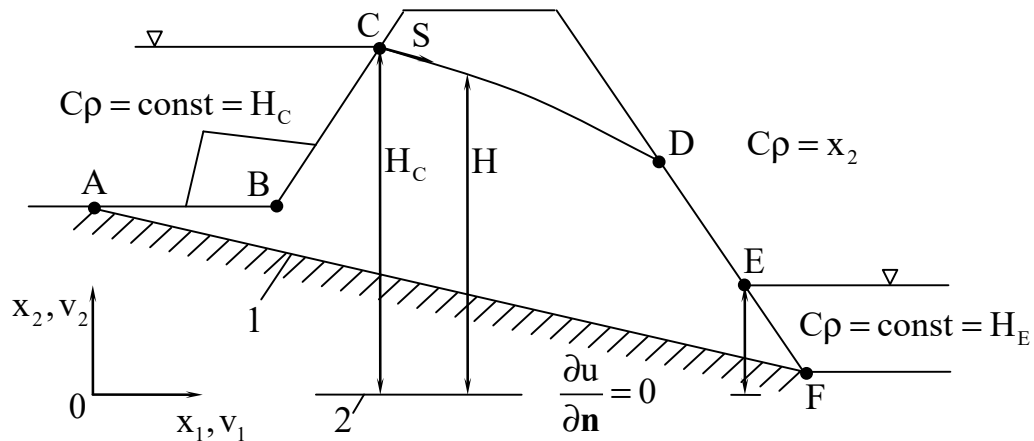


Рисунок 1.8 – Загальний випадок фільтрації

Тип 1. Непроникна межа (лінія AF) – поверхня шару ґрунту та тверді породи. Умова на таких межах є $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\partial\Omega_2$. Отже, вони є лініями течії.

Тип 2. Межа ґрунту з рідиною є поверхнею пористої греблі, що обмежують район фільтрації вгору і вниз за потоком (лінії ABC і EF). На ці поверхні діє гідростатичний тиск; повний потенційний напір вздовж них може бути прийнятий сталим і рівним підвищенню рідкої поверхні. Ці межі є екіпотенціальними лініями.

Тип 3. Лінія фільтрації (або крива депресії) CD є найвищою лінією течії в області течії. У кожній точці вздовж цієї лінії тиск у порах дорівнює атмосферному, тому повний напір дорівнює геометричному напору, тобто $u = H = x_2$ в довільній точці CD . Крім того, ця крива є лінією течії.

Типа 4. Поверхня височування – це поверхня, де вода просочується крізь ґрунт у повітря. Оскільки тиск на такій межі є сталим і дорівнює атмосферному, повний тиск дорівнює підвищенню ($u = x_2$). Ця межа не є ні екіпотенціальною лінією, ні лінією течії.

Розглянемо двовимірний випадок: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 0$ і, крім того, $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, тобто осі координат є основним напрямом тензора коефіцієнта фільтрації. Розв'язуватимемо мішану крайову задачу, пов'язану з визначенням підземної частини гідроспороди:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega, \quad (1.3)$$

$$u|_{AE} = u_1, \quad u|_{FC} = u_3, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma_0 u \Big|_{ABC \cup A'B'C'} = \gamma_0(x, y), \quad (1.5)$$

де $\frac{\partial u}{\partial N} = k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y)$ – похідна по конормалі;

\mathbf{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі;

u_1, u_3 – сталі величини.

Частина межі області $A'B'C'$ (рис. 1.9) – невідома лінія, яку позначимо через $\partial\Omega_*$. У окремому випадку, коли ABC і $A'B'C'$ – непроникні межі, маємо $\sigma_0 = 0$ і $\gamma_0 = 0$.

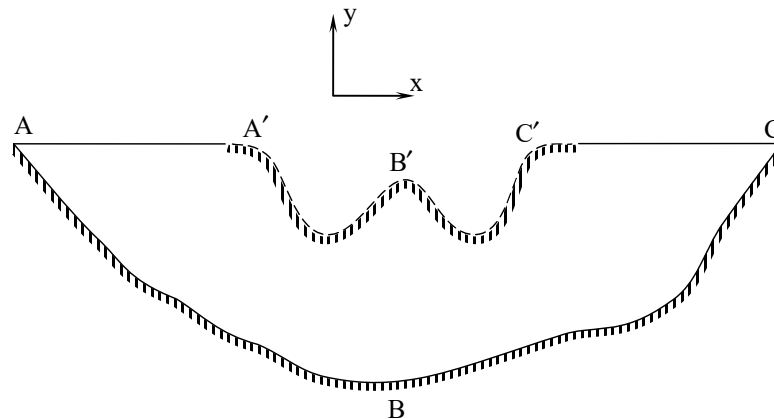


Рисунок 1.9 – Область фільтрації

Припускаємо, що точки A' і C' невідомі. Оскільки у нас $\partial\Omega_*$ означає невідому межу, то згідно з теорією на ній задається додаткова, так звана «геометрична умова» (або «кінематична умова»)

$$u = \xi(s) \text{ на } \partial\Omega_*, \quad (1.6)$$

де ξ означає заданий напір на підземному контурі гідроспороди.

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного системного аналізу задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею, а також аналізу методів її вирішення, можна зробити висновок, що перспективним є дослідження процесів фільтрації в областях з вільною межею з використанням конструктивного апарату теорії R -функцій.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування методу R -функцій до аналізу задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею.

Для досягнення поставленої мети, необхідно:

- розглянути основні теоретичні відомості, що відносяться до конструктивного апарату теорії R -функцій;
- застосувати метод R -функцій до аналізу задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею;
- розробити чисельний алгоритм розв'язання поставленої задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею;
- реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи систему Wolfram Mathematica 13.3;
- провести обчислювальний експеримент для тестової задачі та виконати аналіз його результатів.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Конструктивний метод R -функцій в задачах моделювання фізико-механічних полів

Означення 2.1. Функція $y = f(x_1, \dots, x_n)$, визначена всюди у просторі змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$, називається R -функцією, якщо існує така булева функція $Y = F(X_1, \dots, X_n)$, що виконується рівність

$$S[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S(x_1), \dots, S(x_n)], \quad (2.1)$$

де

$$S(z) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } z < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Введемо до розгляду такі R -функції [21, 22]:

$$\bar{x} = -x, \quad (2.3)$$

$$x_1 \vee_{\alpha} x_2 = \frac{1}{1+\alpha} \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right), \quad (2.4)$$

$$x_1 \wedge_{\alpha} x_2 = \frac{1}{1+\alpha} \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right), \quad (2.5)$$

де

$$-1 < \alpha(x_1, x_2) \leq 1. \quad (2.6)$$

Функціям, заданим співвідношеннями (2.3) – (2.5), відповідають булеві функції – заперечення \bar{x} , диз'юнкція $x_1 \vee x_2$, кон'юнкція $x_1 \wedge x_2$. Відповідно до

цього функцій $x_1 \vee_\alpha x_2$ називається R -диз'юнкцією, функція $x_1 \wedge_\alpha x_2$ – R -кон'юнкцією, а \bar{x} – R -запереченням.

Відомо, що кон'юнкція, диз'юнкція та заперечення становлять повну систему функцій по відношенню до множини булевих функцій. Але тоді система

$$x_1 \wedge_\alpha x_2, \quad x_1 \vee_\alpha x_2, \quad \bar{x} \quad (2.7)$$

є повною по відношенню до класу R -функцій.

Функції R -кон'юнкція та R -диз'юнкція мають частинні похідні, визначені всюди, за винятком початку координат, де мають розрив першого роду.

Вимозі k раз неперервної диференційності задовольнятиме, наприклад, система

$$x_1 \wedge_\alpha^{(k)} x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^k, \quad (2.8)$$

$$x_1 \vee_\alpha^{(k)} x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^k. \quad (2.9)$$

За допомогою R -функцій можна здійснювати побудову рівнянь меж складних областей [21, 22]. Якщо D_1, \dots, D_m – m областей, що визначаються відповідними нерівностями

$$f_1(x, y) \geq 0, \quad \dots, \quad f_m(x, y) \geq 0, \quad (2.10)$$

де $f_i(x, y)$, $i=1, \dots, m$, – задані функції, всюди визначені, k раз неперервно диференційовані, то булевій функції $F(D_1, \dots, D_m)$ відповідає деяка область D , межа якої складається з частин меж областей D_1, \dots, D_m . Значенню істинності булевої функції $F(D_1, \dots, D_m)$ відповідає приналежність точки $M(x, y)$ області D , а значенню хибності – її неприналежність до цієї області. Кажуть,

що функція $F(D_1, \dots, D_m)$ визначає логіку побудови області D за допомогою областей D_1, \dots, D_m . Домовимось предикат $P_i(x, y)$, який набуває значення істинності, що дорівнює одиниці, в області D і значення хибності, що дорівнює нулю, поза її областю, позначати так:

$$P_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) > 0) \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.11)$$

Теорема 2.1. Якщо області D_i ($i=1, \dots, m$) визначається відповідно нерівностями $f_i(x, y) \geq 0$ ($i=1, \dots, m$), а логіка побудови області D задана булевою функцією $F(D_1, \dots, D_m)$, то нерівність

$$\Psi(x, y) \equiv \Phi[f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)] \geq 0, \quad (2.12)$$

де $\Phi(u_1, \dots, u_m)$ – R -функція, відповідна булевій функції $F(D_1, \dots, D_m)$, визначає область D .

Теорема 2.2. Нехай відкрита область D визначається за допомогою предикату

$$P(x, y) = F[P_1(x, y), \dots, P_m(x, y)], \quad (2.13)$$

де $P_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) > 0)$, $f_i(x, y)$ ($i=1, \dots, m$) визначені та неперервні всюди функції, $F[P_1(x, y), \dots, P_m(x, y)]$ – довільна булева функція, записана за допомогою кон'юнкцій, диз'юнкцій та заперечень. Тоді, якщо у формулі $F[P_1(x, y), \dots, P_m(x, y)]$ виконати формальну заміну P_i на f_i ($i=1, \dots, m$), знаків кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення знаками R -кон'юнкції, R -диз'юнкції та R -заперечення відповідно, то отримана функція (позначимо її $\omega(x, y)$) буде завжди визначена та неперервна, додатна всередині області D і від'ємна поза цією областю.

Можливість побудови функції $\omega(x, y)$, додатної всередині області та рівної нулю на її межі, може бути використана для побудови координатних послідовностей при реалізації варіаційних та проєкційних методів. Звернемо увагу на те, що є одна відмінність задачі побудови функції $\omega(x, y)$ від задачі побудови рівняння контуру ∂D області D . Рівняння $f(x, y) = 0$ є рівнянням контуру ∂D , якщо йому задовольняють координати тих і лише тих точок, які належать цьому контуру. У задачі побудови функції $\omega(x, y)$ нас не цікавить поведінка функції $\omega(x, y)$ поза областю D .

При побудові координатних послідовностей може знадобитися, щоб крім названих властивостей, функція $\omega(x, y)$ задовольняла наступну властивість:

$$\left. \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 1, \quad (2.14)$$

де ∂D – межа області D ;

\mathbf{n} – внутрішня нормаль.

Побудова функції $\omega(x, y)$ може бути виконана так. Спочатку за допомогою R -функцій будується функція $\omega_1(x, y)$, яка задовольняє умови

$$\omega_1(x, y)|_{\partial D} = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega_1(x, y) > 0 \text{ у області } D.$$

Після цього функцію $\omega(x, y)$ можна взяти у вигляді

$$\omega(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)}{\sqrt{\omega_1(x, y)^2 + |\nabla \omega_1(x, y)|^2}}. \quad (2.16)$$

Нехай Ω – скінченна чи нескінченна область n -вимірною евклідова про-

сторю \mathbb{R}^n та нехай $\partial\Omega$ – межа області Ω . Нехай Au – деякий диференціальний оператор над функцією $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$, де $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – точка простору \mathbb{R}^n .

Ставиться задача про пошук функції $u(\mathbf{x})$, яка задовольняє у кожній точці області Ω рівняння

$$Au(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

та одній або декільком умовам на межі

$$B_i u(\mathbf{x})|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (2.18)$$

де $\partial\Omega_i$ – частини межі Ω ;

B_i – диференціальні оператори;

$f(\mathbf{x})$ та $\varphi_i(\mathbf{x})$ – функції, задані відповідно у Ω та на $\partial\Omega_i$.

Якщо задані область Ω , оператори A та B_i , то цим задається цілий клас задач, для кожної з яких заданими є функції $f(\mathbf{x})$ и $\varphi_i(\mathbf{x})$. За цими даними потрібно визначити функцію $u(\mathbf{x})$.

Введемо до розгляду формулу [21, 22]

$$u = V(\Phi_1, \dots, \Phi_m) + \Phi_0, \quad (2.19)$$

де V – m -місцевий оператор;

Φ_0 – деяка відома функція.

Якщо за будь-якого вибору достатньо кількість разів диференційовних і обмежених в області Ω функцій Φ_1, \dots, Φ_m формула (2.19) точно задовольняє крайові умови (2.18), те, слідуючи В.Л. Рвачову, говоритимемо, що формулою (2.19) визначається структура розв'язку крайової задачі (2.17), (2.18). Структура, яка враховує всі крайові умови, називається загальною структурою.

Якщо існує можливість вибору невизначених функцій Φ_1, \dots, Φ_m , що формула (2.19) визначає точний розв'язок крайової задачі, то структуру (2.19) називатимемо повною структурою.

Структуру (2.19) назвемо повною в деякому сенсі, якщо існує можливість такого вибору на певній множині функцій Φ_1, \dots, Φ_m , що функція u , задана формулою (2.19), буде як завгодно близька (у зазначеному розумінні) до точного розв'язку, або, іншими словами, структура (2.19) називається повною в сенсі деякої метрики, якщо $\forall \varepsilon > 0$ знайдуться такі функції $\Phi_1^\varepsilon, \dots, \Phi_m^\varepsilon$, що виконуються нерівність

$$\rho(u_T, V(\Phi_1^\varepsilon, \dots, \Phi_m^\varepsilon) + \Phi_0) < \varepsilon, \quad (2.20)$$

де u_T означає точний розв'язок крайової задачі (2.17), (2.18).

Вигляд структури (2.19) визначається виглядом оператора V і функції Φ_0 . Очевидно, що цей вигляд залежить не тільки від вигляду диференціальних операторів B_i і заданих функцій $\varphi_i(\mathbf{x})$, але також від форми області та форми ділянок межі, на яких задано ту чи іншу з крайових умов. Уся ця інформація має бути врахована під час побудови структури.

Методи пошуку наближень невизначених функцій можуть бути найрізноманітнішими. При цьому якщо структура містить більше однієї невизначеної функції, може виявитися, що існує неоднакова можливість їхнього вибору. Вибір методу в цьому випадку буде істотно впливати на те, які наближення невизначених функцій будуть отримані. Однак досить хороше наближення розв'язання задачі в цілому може бути все ж таки отримано, незважаючи на зазначену відмінність у виборі невизначених функцій.

У більшості випадків структури крайових задач мають вигляд

$$u = V(\Phi_1, \dots, \Phi_m) + \Phi_0 = \sum_{i=1}^m V_i(\Phi_i) + \Phi_0, \quad (2.21)$$

де V_i – деякі лінійні диференціальні оператори.

Якщо кожен з невизначених функцій наближати поліномами вигляду

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{n_i} c_k^{(i)} \Psi_k(\mathbf{x}), \quad i=1, \dots, m, \quad (2.22)$$

де $\{\Psi_k\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) – деяка повна послідовність функцій, то, враховуючи лінійність операторів V_i , отримаємо

$$u = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i} c_k^{(i)} V_i(\Psi_k) + \Phi_0. \quad (2.23)$$

Вираз (2.23) містить $N = n_1 + \dots + n_m$ невизначених сталих, за будь-якого вибору яких задовольняються крайові умови задачі. Таким чином, формулу (2.23) можна розглядати як деяку координатну функцію. Змінюючи числа n_i ($i=1, \dots, m$), можемо отримати будь-яку бажану кількість координатних функцій. Відшукання сталих c_k може бути здійснено за звичайною процедурою одного з варіаційних чи проєкційних методів (Рітца, Бубнова-Галеркіна, найменших квадратів тощо) [23].

Нехай Ω є деяка область у тривимірному просторі, обмежена поверхнею $\partial\Omega$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} Au \equiv & a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ & + 2a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + c = f, \end{aligned} \quad (2.24)$$

де a_{ij} , b_i , c , f – визначені в області Ω функції x_1 , x_2 , x_3 .

Припустимо, що квадратична форма

$$Q(\xi, \eta, \zeta) \equiv a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{13}\xi\zeta + a_{23}\eta\zeta \quad (2.25)$$

у точках області $\Omega \cup \partial\Omega$ є додатно-означеною, тобто $Q(\xi, \eta, \zeta) > 0$ при $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \neq 0$ у всіх точках області $\Omega \cup \partial\Omega$. При виконанні цих умов рівняння називається рівнянням еліптичного типу. Основними типами крайових задач для еліптичних рівнянь є такі:

а) задача Діріхле (перша основна задача)

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad (2.26)$$

б) задача Неймана (друга основна задача)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad (2.27)$$

в) задача з косою похідною (третя основна задача)

$$a_0 \frac{\partial u}{\partial l} + b_0 u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad a_0 > 0 \quad (2.28)$$

г) мішана задача

$$b_0 u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad b_0 > 0 \text{ на } \partial\Omega_1, \quad (2.29)$$

$$a_0 \frac{\partial u}{\partial l} + b_0 u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad a_0 > 0 \text{ на } \partial\Omega_2, \quad (2.30)$$

де a_0, b_0, φ_0 – задані на $\partial\Omega$ функції;

$l = (l_1, l_2, l_3)$ – заданий на $\partial\Omega$ вектор, що утворює із вектором внутрішньої нормалі $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ гострий кут.

Задача Діріхле. Структура розв'язку має вигляд

$$u \equiv \varphi + \omega\Phi.$$

Задача Неймана. Нехай φ є функція, що продовжує функцію φ_0 всередину області Ω . Тоді крайову умову (2.27) можна записати у вигляді

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.31)$$

Використаємо оператор D_1 , який визначається формулою

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (2.32)$$

де $\omega = 0$, $\omega \in C^2$, – один раз нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$. Враховуючи, що оператор D_1 на межі області Ω перетворюється на оператор диференціювання за нормаллю, крайову умову (2.31) можна замінити умовою

$$(D_1 u - \varphi) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.33)$$

Структуру розв'язку тоді візьмемо у вигляді

$$u \equiv \Phi_0 - \omega D_1 \Phi_0 + \omega\varphi + \omega^2 \Psi. \quad (2.34)$$

Нехай $\Psi \equiv 0$. Тоді отримаємо

$$u \equiv \Phi_0 - \omega D_1 \Phi_0 + \omega\varphi, \quad (2.35)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi_0. \quad (2.36)$$

Отже, якщо користуватися структурою (2.35), межові значення функції можуть бути будь-які. Можна показати, що за деяких обмежень, що стосуються форм області, функції ω та заданої функції φ , така структура є повною.

Задача з косою похідною. Нехай a , b та φ є функції, що продовжують функції a_0 , b_0 та φ_0 всередину області Ω . Продовжуюча функція a строго додатна у Ω . Вектор l також вважатимемо продовженим усередину області Ω .

Скористаємось оператором

$$D'_1 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (2.37)$$

Умову (2.28) замінимо умовою

$$v \equiv aD'_1 u + bu - \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.38)$$

Тоді можна одержати, що

$$u \equiv \Phi_0 + \frac{\omega}{q} (\omega\Psi - b\Phi_0 - aD'_1\Phi_0 + \varphi). \quad (2.39)$$

Мішана задача. Мішані задачі є найскладнішим і в той же час найчастішим на практиці типом крайових задач. Значно складнішою є і побудова структури таких задач.

Нехай $\omega_i = 0$ є нормалізоване на $\partial\Omega_i$ рівняння ділянки $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$, межі $\partial\Omega$. Це означає, що

$$\omega_1|_{\partial\Omega_i} = 0; \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}_1}\Big|_{\partial\Omega_1} = 1; \quad \omega_2|_{\partial\Omega_2} = 0; \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial\mathbf{n}_2}\Big|_{\partial\Omega_2} = 1; \quad (2.40)$$

де \mathbf{n}_i – внутрішня нормаль до $\partial\Omega_i$, $i=1,2$.

Припустимо, крім того, що

$$\omega_1 \geq 0 \text{ на } \Omega \cup \partial\Omega_2; \quad \omega_2 \geq 0 \text{ на } \Omega \cup \partial\Omega_1. \quad (2.41)$$

Причому рівність нулю досягається лише в кінцевих точках $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$.

Тоді структура розв'язку визначається формулою

$$u \equiv \frac{\varphi}{b} + \omega_1\Phi_0 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1(aD_1^{(2)}\omega_2 + \omega_2) + \omega_2} \times \\ \times \left[\varphi + \omega_2\Psi_2 - aD_1' \left(\frac{\varphi}{b} \right) - aD_1'(\omega_1\Phi_0) - \frac{b_2\varphi}{b} - b_2\omega_1\Phi_0 \right]. \quad (2.42)$$

Таким чином, приходимо до структури, яка забезпечує виконання крайових умов мішаної задачі незалежно від вибору невизначених функцій Φ_0 та Ψ_2 .

Застосування конструктивного апарату теорії R -функцій в задачах чисельного аналізу фізико-механічних полів складається з таких етапів:

- точний аналітичний опис геометрії розрахункової області, тобто побудова такої функції, яка б дорівнювала нулеві на межі області, була б додатною всередині області і нормальна похідна (в напрямку зовнішньої нормалі) від якої на межі б дорівнювала -1 ;
- продовження крайових умов всередину області, тобто до визначення функцій і операторів, заданих на межі, у внутрішніх точках області;
- побудова загальної структури розв'язку, тобто такої формули, яка залежить від деяких невизначених функцій і при будь-якому їх виборі точно задо-

вольняє всі крайові умови задачі;

– побудова наближеного розв'язку, тобто апроксимація невизначених функцій, що входять до структури розв'язку, одним із чисельних методів (наприклад, варіаційним).

До розрахунку фільтраційних течій (в тому числі і з вільною межею) конструктивний апарат теорії R -функцій було застосовано у роботах [8 – 20].

2.2 Застосування методу R -функцій у аналізі процесів фільтрації в областях з вільною межею

Розглянемо застосування до розв'язування задачі (1.3) – (1.6) конструктивного апарату теорії R -функцій [10 – 12].

Будемо припускати, що рівняння (1.3) є еліптичним невідроджуваним, тобто при всіх $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ виконано в Ω нерівність $k_{11}t_1^2 + k_{22}t_2^2 \geq \mu_0(t_1^2 + t_2^2)$, $\mu_0 > 0$.

Введемо такі позначення:

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad Nu \equiv k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y),$$

$$\partial\Omega_* = A'B'C' - \text{вільна межа}, \quad \partial\Omega_1 = AA' \cup C'C, \quad \partial\Omega_2 = ABC.$$

Нехай функція $\omega'(x, y)$ має такі властивості:

- 1) $\omega'(x, y) = 0$ на AA' ;
- 2) $\omega'(x, y) > 0$ в $\Omega \cup A'B'C' \cup C'C \cup ABC$;
- 3) $\left. \frac{\partial \omega'}{\partial \mathbf{n}} \right|_{AA'} = -1$,

а функція $\omega''(x, y)$ – такі:

- 1) $\omega''(x, y) = 0$ на $C'C$;

2) $\omega''(x, y) > 0$ в $\Omega \cup A'B'C' \cup AA' \cup ABC$;

$$3) \left. \frac{\partial \omega''}{\partial \mathbf{n}} \right|_{C'C} = -1.$$

Такі функції можуть бути побудовані за описаною вище методикою.

Продовжимо крайові умови (1.4) усередину області. Функція

$$\varphi(x, y) = \frac{u_3 \omega'(x, y) + u_1 \omega''(x, y)}{\omega'(x, y) + \omega''(x, y)}$$

визначена всюди в $\bar{\Omega}$ і $\varphi|_{\partial\Omega_1} = \begin{cases} u_1 & \text{на } AA', \\ u_3 & \text{на } C'C. \end{cases}$ Нехай, $\gamma(x, y) = EC\gamma_0$, $\sigma(x, y) = EC\sigma_0$

– продовження функцій γ і σ всередину області. Тоді задача (1.3) – (1.6) запишеться у вигляді:

$$Au = 0 \text{ у } \Omega, \quad (2.43)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi|_{\partial\Omega_1}, \quad (2.44)$$

$$Nu + \sigma u|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*} = \gamma|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega}, \quad (2.45)$$

$$u = \xi(x, y) \text{ на } \partial\Omega_*. \quad (2.46)$$

Якби $\partial\Omega_*$ була заданою межею, то крайова задача (2.43) – (2.45) могла б бути зведена до задачі знаходження мінімуму відповідного квадратичного функціоналу.

У цьому випадку ми відразу не можемо знаходити мінімум отриманого функціоналу, оскільки область Ω , якою ведеться інтегрування, і її межа $\partial\Omega_*$ невідомі. Тому для повного розв'язання задачі необхідно використовувати й умову (2.46).

Для розв'язання поставленої задачі сформуємо ітераційний процес в такий спосіб. Нехай отримане k -е наближення до вільної межі $\partial\Omega_*^{(k)}$. Тоді отри-

маємо конкретну область $\Omega^{(k)}$ з відомою межею.

Визначимо функцію $u^{(k)}(x, y)$ як розв'язок задачі

$$Au^{(k)} = 0 \text{ у } \Omega^{(k)}, \quad (2.47)$$

$$u^{(k)} \Big|_{\partial\Omega_1} = \varphi \Big|_{\partial\Omega_1}, \quad (2.48)$$

$$Nu^{(k)} + \sigma u^{(k)} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}} = \gamma \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}}. \quad (2.49)$$

Для розв'язання задачі (2.47) – (2.49) скористаємося методом R -функцій.

Нехай рівняння $\partial\Omega_*^{(k)}$ подано у вигляді $y = h(x)$, причому $y - h(x) > 0$ в

$\Omega^{(k)} \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Тоді $\omega_*^{(k)}(x, y) = \frac{y - h(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$ має такі властивості:

- 1) $\omega_*^{(k)}(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_*^{(k)}$;
- 2) $\omega_*^{(k)}(x, y) > 0$ у $\Omega^{(k)} \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$;
- 3) $\frac{\partial\omega_*^{(k)}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_*^{(k)}} = -1$, \mathbf{n} – зовнішня нормаль.

Нехай $\omega_1(x, y)$ і $\omega_2(x, y)$ мають властивості:

- 1) $\omega_1(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_1$; $\omega_2(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_2$;
- 2) $\omega_1(x, y) > 0$ у $\Omega \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}$; $\omega_2(x, y) > 0$ у $\Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_*^{(k)}$;
- 3) $\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1} = -1$; $\frac{\partial\omega_2}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_2} = -1$.

Далі будуємо

$$\tilde{\omega}(x, y) = \omega_2(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_*^{(k)}(x, y),$$

$$\vec{l} = (l_1, l_2) = \frac{1}{\sqrt{\left(k_{11} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(k_{22} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2 + \tilde{\omega}^2}} \left(k_{11} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}, k_{22} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y} \right).$$

Вектор \vec{l} визначено всюди в $\Omega^{(k)}$ і на межі він співпадає з вектором одиничної внутрішньої конормалі. Тоді диференціальний оператор

$D_1^{\vec{l}} u = \frac{\partial u}{\partial x} l_1 + \frac{\partial u}{\partial y} l_2$ має властивість:

$$-\sqrt{\left(k_{11} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(k_{22} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2} + \tilde{\omega}^2 D_1^{\vec{l}} u \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}} = Nu \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}}.$$

Отже, крайову умову (2.49) можна записати як

$$SD_1^{\vec{l}} u^{(k)} - \sigma u^{(k)} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}} = -\gamma \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}}, \quad (2.50)$$

де $S = \sqrt{\left(k_{11} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(k_{22} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2} + \tilde{\omega}^2$. Продовжуючи крайову умову (2.48) всередину області $\Omega^{(k)}$, отримаємо часткову структуру розв'язку крайової задачі (2.47) – (2.49), яка задовольняє крайову умову (2.48), у вигляді

$$u^{(k)} = \varphi + \omega_1 \Phi, \quad (2.51)$$

де Φ – невизначена функція.

Будемо припускати, що $(\vec{l}, \nabla \tilde{\omega}) \geq 0$. Використовуючи оператор $D_1^{\vec{l}}$, крайову умову (2.50) замінимо рівністю

$$SD_1^{\vec{l}} u^{(k)} - \sigma u^{(k)} = -\gamma + \tilde{\omega} \Psi, \quad (2.52)$$

де Ψ – невизначена функція. Невизначену функцію Φ , що входить у формулу (2.51) подамо у вигляді $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\omega} \Phi_1$ і підставимо (2.51) у (2.52):

$$\begin{aligned}
SD_1^{\bar{l}}(\varphi + \omega_1\Phi_0 + \omega_1\tilde{\omega}\Phi_1) - \sigma(\varphi + \omega_1\Phi_0 + \omega_1\tilde{\omega}\Phi_1) &= -\gamma + \tilde{\omega}\Psi, \\
SD_1^{\bar{l}}\varphi + SD_1^{\bar{l}}(\omega_1\Phi_0) + S\omega_1\Phi_1 D_1^{\bar{l}}\tilde{\omega} + S\tilde{\omega}D_1^{\bar{l}}(\omega_1\Phi_1) - \\
-\sigma\varphi - \sigma\omega_1\Phi_0 - \sigma\omega_1\tilde{\omega}\Phi_1 &= -\gamma + \tilde{\omega}\Psi. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Доданки, що містять $\tilde{\omega}$ можуть бути поглинені членом $\tilde{\omega}\Psi$ за рахунок довільності функції Ψ :

$$SD_1^{\bar{l}}\varphi + SD_1^{\bar{l}}(\omega_1\Phi_0) + S\omega_1 D_1^{\bar{l}}\tilde{\omega}\Phi_1 - \sigma\varphi - \sigma\omega_1\Phi_0 = -\gamma + \tilde{\omega}\Psi_1,$$

де Ψ_1 – невизначена функція. До лівої та правої частин останньої формули додамо функцію $\tilde{\omega}(S + \delta\omega_1)\Phi_1$, де $\delta = 1 - (\bar{l}, \nabla\tilde{\omega}) > 0$:

$$SD_1^{\bar{l}}\varphi + SD_1^{\bar{l}}(\omega_1\Phi_0) + (S\omega_1 D_1^{\bar{l}}\tilde{\omega} + S\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}\omega_1)\Phi_1 - \sigma\varphi - \sigma\omega_1\Phi_0 = -\gamma + \tilde{\omega}\Psi_2,$$

де Ψ_2 – нова невизначена функція.

Тоді

$$\Phi_1 = \frac{-SD_1^{\bar{l}}\varphi - SD_1^{\bar{l}}(\omega_1\Phi_0) + \sigma\varphi + \sigma\omega_1\Phi_0 - \gamma + \tilde{\omega}\Psi_2}{\omega_1(SD_1^{\bar{l}}\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}) + S\tilde{\omega}}.$$

Підставивши Φ_1 в $u^{(k)} = \varphi + \omega_1\Phi_0 + \omega_1\tilde{\omega}\Phi_1$, отримаємо загальну структуру розв'язку крайової задачі (2.47) – (2.49)

$$\begin{aligned}
u^{(k)} &= \varphi + \omega_1\Phi_0 + \\
&+ \frac{\omega_1\tilde{\omega}}{\omega_1(SD_1^{\bar{l}}\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}) + S\tilde{\omega}} [-SD_1^{\bar{l}}\varphi - SD_1^{\bar{l}}(\omega_1\Phi_0) + \sigma\varphi + \sigma\omega_1\Phi_0 - \gamma + \tilde{\omega}\Psi_2]. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Невизначені компоненти Φ_0 і Ψ_2 структури (2.54) можна апроксимувати,

наприклад, будь-яким варіаційним методом. При цьому отримуємо функцію $u_m^{(k)}$ – наближений розв’язок задачі (2.47) – (2.49). Зрозуміло, що умові на вільній межі вона не задовольняє.

Для ітераційного уточнення рівняння вільної межі побудуємо алгоритм, заснований на використанні точкового методу найменших квадратів та умови (2.46).

Рівняння вільної межі $\partial\Omega_*^{(k+1)}$ для наступної $(k+1)$ -ї ітерації шукаємо у вигляді:

$$y^{(k+1)} = \sum_{r=0}^n c_r^{(k+1)} \psi_r(x), \quad (2.55)$$

де n – натуральне число;

$c_r^{(k+1)}$ ($r = 0, 1, 2, \dots, n$) – невідомі коефіцієнти;

$\psi_0(x), \dots, \psi_n(x)$ – базисні функції (степеневі чи тригонометричні поліноми, сплайни тощо).

Нехай $a^{(k)}$ і $c^{(k)}$ – абсциси точок $A^{(k)}$ і $C^{(k)}$. Покладемо $d^{(k)} = |c^{(k)} - a^{(k)}|$.

Виберемо натуральне число N таке, що $N > n$ і задаємо систему точок (вузлів)

$$x_l = a^{(k)} + \frac{N-l}{N-1} d^{(k)}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \text{ Позначимо } y_l^{(k+1)} = \sum_{r=0}^n c_r^{(k+1)} \psi_r(x_l).$$

Крім одиничної нормалі $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ введемо у розгляд конормаль

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{згідно з правилом:} \quad v_1 = \frac{k_{11}n_1}{S}, \quad v_2 = \frac{k_{22}n_2}{S}, \quad \text{де}$$

$$S = [(k_{11}, n_1)^2 + (k_{22}, n_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad n_1 = \cos(\mathbf{n}, x), \quad n_2 = \cos(\mathbf{n}, y).$$

З умов (2.45) на $\partial\Omega_*^{(k)}$ маємо $S \frac{\partial u^{(k)}(P_l)}{\partial \mathbf{v}} = \gamma(P_l) - \sigma u^{(k)}(P_l)$, звідки, набли-

жено замінюючи $u^{(k)}(P_l) \approx u_m^{(k)}(P_l)$, отримаємо

$$\frac{\partial u^{(k)}(P_l)}{\partial v} \approx \frac{1}{S} [\gamma(P_l) - \sigma u_m^{(k)}(P_l)] = Q(P_l),$$

де $u_m^{(k)}(P_l)$ – значення наближеного розв’язку вихідної задачі в області $\Omega^{(k)}$ з межею $\partial\Omega_*^{(k)}$ у точці P_l , точка $P_l = (x_l, y_l)$ лежить на $\partial\Omega_*^{(k)}$.

Кінематична умова в точках, що лежать на $\partial\Omega_*^{(k)}$, зрозуміло не виконується. Нехай $\tilde{P}_l = (\tilde{x}_l, \tilde{y}_l)$ – точка нормалі (рис. 2.1) до $\partial\Omega_*^{(k)}$, що проходить крізь P_l і лежить на $\partial\Omega_*^{(k)}$, у якій (2.46) виконується приблизно, тобто. $u^{(k)}(\tilde{P}_l) - \xi(\tilde{P}_l) \approx 0$, звідки, розкладаючи в околі точки P_l в ряд Тейлора і обмежуючись лінійним наближенням, маємо

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{P}_l) - u^{(k)}(\tilde{P}_l) &= \xi(P_l) - u^{(k)}(P_l) + |\tilde{P}_l - P_l| \left[\frac{\partial \xi(P_l)}{\partial v} - \frac{\partial u^{(k)}(P_l)}{\partial v} \right] \approx \\ &\approx \xi(P_l) - u_n^{(k)}(P_l) + |\tilde{P}_l - P_l| \left[\frac{\partial \xi(P_l)}{\partial v} - Q(P_l) \right]. \end{aligned}$$

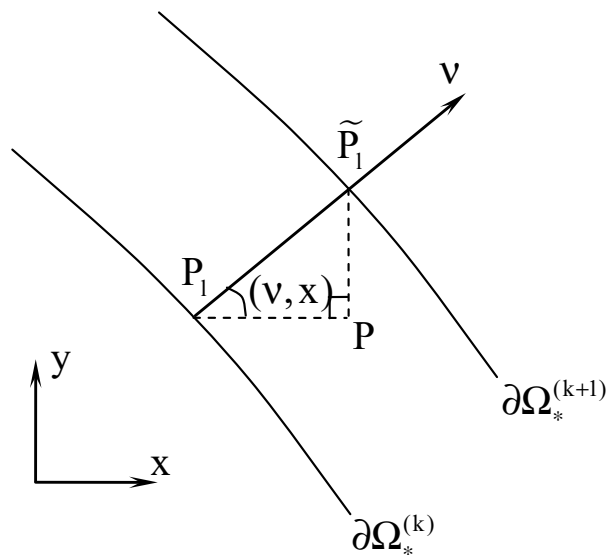


Рисунок 2.1

З $\Delta P P_l \tilde{P}_l$ отримаємо

$$\tilde{x}_l - x_l = \left| \tilde{P}_l - P_l \right| \cos(\nu, x), \quad \tilde{y}_l - y_l = \left| \tilde{P}_l - P_l \right| \cos(\nu, y). \quad (2.56)$$

З іншого боку, з (2.55) випливає, що

$$\left| \tilde{P}_l - P_l \right| = \left| \frac{u_m^{(k)}(P_l) - \xi(P_l)}{\frac{\partial \xi(P_l)}{\partial \nu} - Q(P_l)} \right|. \quad (2.57)$$

Відповідно до (2.57) з (2.56) маємо співвідношення для обчислення координат точок \tilde{P}_l , що лежать на $\partial\Omega_*^{(k+1)}$:

$$\tilde{x}_l = x_l + \cos(\nu, x) \left| \frac{u_m^{(k)}(P_l) - \xi(P_l)}{\frac{\partial \xi(P_l)}{\partial \nu} - Q(P_l)} \right|, \quad \tilde{y}_l = y_l + \cos(\nu, y) \left| \frac{u_m^{(k)}(P_l) - \xi(P_l)}{\frac{\partial \xi(P_l)}{\partial \nu} - Q(P_l)} \right|. \quad (2.58)$$

Для знаходження коефіцієнтів у рівнянні кривої $\partial\Omega_*^{(k+1)}$ вимагаємо, щоб крива якимось чином визначалася через множину точок $\tilde{P}_l = (\tilde{x}_l, \tilde{y}_l)$, $l = 1, 2, \dots, N$. Для цього скористаємося точковим методом найменших квадратів: вимагаємо, щоб вираз $R = \sum_{l=1}^N \left[\tilde{y}_l - \sum_{r=0}^n c_r^{(k+1)} \psi_r(\tilde{x}_l) \right]^2$ мав мінімальне значення,

де значення \tilde{x}_l і \tilde{y}_l беруться з (2.58). Необхідна умова мінімуму $\frac{\partial R}{\partial c_r^{(k+1)}} = 0$,

$r = 0, 1, 2, \dots, n$, дає систему з $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє визначити $n+1$ параметрів $c_0^{(k+1)}, c_1^{(k+1)}, \dots, c_n^{(k+1)}$. Після визначення всіх параметрів у (34), крива $y^{(k+1)}$ буде відомою, отже, маємо відому область $\Omega^{(k+1)}$. На наступній $(k+2)$ -й ітерації будемо наближений розв'язок $u_m^{(k+2)}$ для нової області $\Omega^{(k+1)}$. Ітерації проводиться до того часу, поки "відстань" між $\partial\Omega_*^{(k)}$ і $\partial\Omega_*^{(k+1)}$

стане досить малою: $\max_{1 \leq l \leq N} \sqrt{(x_l^{(k+1)} - x_l^{(k)})^2 - (y_l^{(k+1)} - y_l^{(k)})^2} < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – наперед задане досить мале число.

Висновки за розділом 2

Було проведено вибір та обґрунтування методу розв’язання задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею.

1. Розглянуто основні відомості з конструктивного апарату теорії методу R -функцій та його застосування для математичного моделювання фізико-механічних полів, з’ясовано доцільність застосування методу R -функцій для розв’язування поставленої задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею.

2. Розглянуто застосування методів теорії R -функцій до побудови структури розв’язку задачі розрахунку фільтраційної течії у області з вільною межею. Для апроксимації невизначеної компоненти структури описано застосування методу Рітца, що дозволяє отримати наближений розв’язок поставленої задачі у аналітичному вигляді, а для уточнення рівняння вільної межі описано ітеративну процедуру на основі точкового методу найменших квадратів.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система Wolfram Mathematica 13.3

Більшість перших математичних систем, що використовуються при роботі з комп'ютерами, були призначені для виконання числових розрахунків. Їх результат завжди конкретний: це або цифра, або потік цифр, поданих у вигляді таблиць, матриць або точок графіка. Результати рідко є абсолютно точними в математичному сенсі: як правило, при операціях з дійсними числами відбувається їх округлення, обумовлене принциповим обмеженням розрядної сітки комп'ютера при зберіганні чисел у пам'яті. Реалізація більшості чисельних методів, наприклад, розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, також засноване на свідомо наближених чисельних методах. Часто через накопичення похибок ці методи розбігаються, даючи неточний або неправильний результат.

Довгий час обмежені можливості комп'ютерів не дозволяли реалізувати на них серйозні системи символічної математики. Лише до початку 90-х років ситуація помітно покращала. Апаратні можливості комп'ютерів різко зросли, і були розгорнуті серйозні роботи зі створення систем комп'ютерної алгебри – так званих систем символічної математики. Найбільшу популярність здобули три класи систем символічної математики: створена на базі мови штучного інтелекту MuLisp, мала система Derive, одна з найпотужніших і досі привабливих систем Maple V, і система Mathematica. Mathematica 13.3 – одна з найпопулярніших та найбільших систем символічної математики. Пакет має великі графічні можливості, подання документів у формі Notebook, що поєднує програми та команди з даними, поданими у формульному, текстовому, табличному та графічному вигляді. Система забезпечує динамічний зв'язок між комірками документів у стилі електронних таблиць при розв'язуванні багатьох символічних задач, що принципово та вигідно відрізняє її від інших систем. З точки зору мови програмування система Mathematica 13.3 відноситься до інтерпретованих систем, тобто послідовно аналізує (інтерпретує) кожний вираз і відразу виконує

його. Робота з системою проходить у діалоговому режимі. Система містить достатній набір керуючих структур для створення умовних виразів, розгалужень у програмах, циклів тощо. Для виконання поставленої задачі, після аналізу можливостей різних середовищ програмування та математичних пакетів було обрано пакет Mathematica 13.3, оскільки даний пакет, на наш погляд, є найбільш оптимальним щодо теоретичного і чисельного аналізу, і, зокрема, для моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею[24].

3.2 Алгоритм розв'язання задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею

З огляду на викладене у п. 2.2 алгоритм розв'язання задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею можна задати наступними етапами:

- а) задати фізичні параметри процесу фільтрації (коефіцієнти фільтрації k_{11} і k_{22}) та геометрію області Ω , у якій відбувається фільтрація;
- б) побудувати методом R -функцій нормалізовані рівняння $\omega'(x, y) = 0$, $\omega''(x, y) = 0$ ділянок AA' , $C'C$ межі $\partial\Omega$ області Ω ;
- в) покласти $k = 0$ і задати початкове наближення $\partial\Omega_*^{(k)}$ до ділянки вільної межі області фільтрації Ω , сформувавши область $\Omega^{(k)}$.
- в) обрати повну систему $\{\tau_k\}$ та відповідно до структури розв'язку (2.54) побудувати послідовність координатних функцій;
- г) обрати номер наближення m ;
- д) методом Рітца розв'язати задачу (2.47) – (2.49) в області $\Omega^{(k)}$, отримавши наближений за Рітцем розв'язок $u_m^{(k)}$;
- е) уточнити рівняння вільної межі у вигляді (2.55) точковим методом найменших квадратів;
- є) покласти $k := k + 1$ і перейти п. в) поки не буде виконано умову збіжності;
- ж) провести аналіз та візуалізацію побудованого наближеного розв'язку.

3.3 Опис програми

Для розв'язання крайової задачі (1.3) – (1.6) була розроблена програма. Вона була виконана з використанням можливостей пакета Mathematica 13.3, що дозволяють створювати програмні продукти у формі електронних документів (ЕД). При відкритті ЕД за допомогою пакета Mathematica 4.2 перед користувачем з'являється документ, який складається з об'єднання груп комірок у наступні підсекції:

Блок 1. Задання фізичних та геометричних параметрів області фільтрації. У цьому блоці користувач має задати фізичні параметри процесу фільтрації (коефіцієнти фільтрації k_{11} і k_{22}) та геометрію області Ω , у якій відбувається фільтрація (задаються R -операції системи \mathfrak{X}_0 та будуються функції $\omega'(x, y)$, $\omega''(x, y)$ такі, що рівняння $\omega'(x, y) = 0$, $\omega''(x, y) = 0$ є нормалізованими рівняннями ділянок AA' , CC' межі $\partial\Omega$ області Ω .

Блок 2. Задання початкового наближення до вільної межі. У цьому блоці користувач має задати початкове наближення до вільної межі.

Блок 3. Задання координатної послідовності. У цьому блоці задається порядок наближення m , задаються послідовності $\{\tau_k\}$ та координатних функцій $\{\varphi_k\}$ відповідно до структури розв'язку (2.54).

Блок 4. Формування та розв'язування системи Рітца. У цьому блоці обчислюються наближений за Рітцем розв'язок $u_m^{(k)}$ задачі в області $\Omega^{(k)}$.

Блок 5. Уточнення рівняння вільної межі. У цьому блоці точковим методом найменших квадратів проводиться ітераційне уточнення рівняння вільної межі.

Блок 5. Виведення результатів. У цьому блоці записується наближений за Рітцем розв'язок задачі і за допомогою функції ContourPlot побудовано лінії течії фільтраційного потоку.

Лістинг програми наведено у додатку А.

Висновки за розділом 3

Для розв'язання поставленої задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею була обрана система Mathematica 13.3.

1. Описано особливості системи комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3, зокрема її переваги при розв'язуванні задач комп'ютерного моделювання фільтраційних течій.

2. Розроблено алгоритм розв'язування задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею.

3. Описано розроблену у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3 програму за побудованим алгоритмом розв'язування задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі [10 – 12]

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(1+x)^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega, \quad (4.1)$$

$$u|_{AC} = 1 - y^2, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{1}{(1+x)^2} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) \Big|_{BC} = -\frac{3+3x+16y^2}{\sqrt{9+64y^2(1+x)^3}}, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{1}{(1+x)^2} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) \Big|_{AB} = 0, \quad (4.4)$$

$$u|_{BC} = \frac{3}{4}. \quad (4.5)$$

Область Ω представлена рис. 4.1.

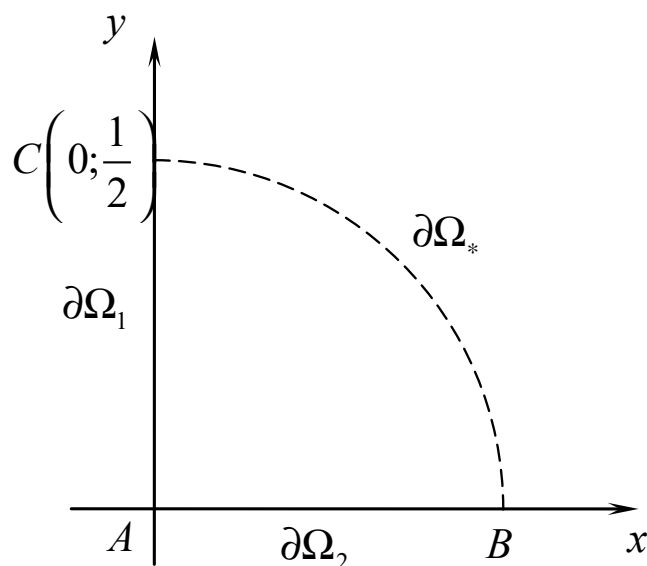


Рисунок 4.1 – Розрахункова область для тестової задачі

Точку C вважаємо відомою, положення точки B є невідомим, відомо

лише, що вона знаходиться на прямій Ox , BC є ділянкою вільної межі. Точний розв'язок задачі (4.1) – (4.5) має вигляд

$$u(x, y) = \frac{1 - y^2}{1 + x}, \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 3x}.$$

За початкове наближення до рівняння вільної межі візьмемо пряму, що з'єднує точки $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ і $B^{(0)}\left(\frac{2}{5}, 0\right)$: $y = h^{(0)}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$. Побудуємо розв'язок задачі (4.1) – (4.5) в області $\Omega^{(0)} = ACB^{(0)}$ за алгоритмом, описаним у п. 3.2. Для задачі (4.1) – (4.5)

$$\omega_*^{(0)}(x, y) = \frac{-y - 1,25x - 0,5}{\sqrt{2,5625}}, \quad \omega_1(x, y) = x,$$

$$\omega_2(x, y) = y, \quad \tilde{\omega}(x, y) = y \wedge_\alpha \frac{-y - 1,25x - 0,5}{\sqrt{2,5625}},$$

$$\varphi = 1 - y^2, \quad \sigma = 0, \quad \gamma = \frac{-\frac{3 + 3x + 16y^2}{\sqrt{9 + 64y^2(1+x)^3}} y}{y + \frac{-y - 1,25x + 0,5}{\sqrt{2,5625}}},$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{1 - y^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{(1 + x)^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2} + \tilde{\omega}^2,$$

$$\vec{l} = \left(\frac{\frac{1}{1 - y^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}}{S}; \frac{\frac{1}{(1 + x)^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}}{S} \right),$$

$$D_1^{\vec{l}} u = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{1 - y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + \frac{1}{(1 + x)^2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \right].$$

Структура розв'язку крайової задачі (4.1) – (4.5) має вигляд

$$u^{(0)}(x, y) = \varphi + \omega_1 \Phi_0 + \frac{\omega_1 \tilde{\omega}}{\omega_1 (SD_1^{\bar{}} \tilde{\omega} + \delta \tilde{\omega}) + S \tilde{\omega}} [-SD_1^{\bar{}} \varphi - SD_1^{\bar{}} (\omega_1 \Phi_0) + \sigma \varphi + \sigma \omega_1 \Phi_0 - \gamma + \tilde{\omega} \Psi_2].$$

Невизначену компоненту $\Phi_0 = \Phi^{(0)}$ апроксимуємо виразом вигляду

$$\Phi^{(0)} \approx \Phi_m^{(0)} = \sum_{i+j=0}^m \alpha_{ij} \tau_{ij} = \sum_{i+j=0}^m \alpha_{ij} x^i y^j.$$

Числа α_{ij} , $i + j = 0, 1, \dots, m$, знайдемо з умови мінімуму відповідного функціоналу енергії. Координатні функції візьмемо у вигляді

$$\varphi_{ij}(x, y) = \omega_1 \tau_{ij} - \frac{\omega_1 \tilde{\omega}}{\omega_1 (SD_1^{\bar{}} \tilde{\omega} + \delta \tilde{\omega}) + S \tilde{\omega}} SD_1^{\bar{}} (\omega_1 \tau_{ij}),$$

$$\text{де } \delta = 1 - \frac{1}{S} \left[\frac{1}{1-y^2} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Використовуючи значення $u_{10}^{(0)}(x, y)$ уточнимо рівняння вільної межі із залученням умови (4.5). Шукатимемо рівняння $\partial \Omega_*^{(1)}$ у вигляді

$$y^{(1)} = c_0^{(1)} + c_1^{(1)} x + c_2^{(1)} x^2 + c_3^{(1)} x^3. \quad (4.6)$$

Візьмемо $N = 5$, $x_l = \frac{5-l}{10}$, $l = 1, 2, \dots, 5$. На $\partial \Omega_*^{(0)}$ маємо

$$\cos(\nu, x) = \frac{1}{S} \frac{1}{1-y^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \Big|_{\partial \Omega_*^{(0)}}, \quad \cos(\nu, x) = \frac{1}{S} \frac{1}{(1+x)^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \Big|_{\partial \Omega_*^{(0)}}, \quad P_l = (x_l, y_l) \text{ — точки, що}$$

лежать на $\partial \Omega_*^{(0)}$: $y_l = -\frac{5}{4} x_l + \frac{1}{2}$. За формулами (2.58) знаходимо

$$\tilde{x}_l = x_l + \frac{1}{S} \frac{1}{1-y^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \Big|_{(x_l, y_l)} \frac{u_5^{(0)}(x_l, y_l) - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{S} \gamma \Big|_{(x_l, y_l)}},$$

$$\tilde{y}_l = y_l + \frac{1}{S} \frac{1}{(1+x)^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \Big|_{(x_l, y_l)} \frac{u_5^{(0)}(x_l, y_l) - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{S} \gamma \Big|_{(x_l, y_l)}}.$$

Тоді коефіцієнти $c_0^{(1)}$, $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$, $c_3^{(1)}$ у (4.6) знайдемо з умови

$$\sum_{i=1}^5 [\tilde{y}_l - (c_0^{(1)} + c_1^{(1)} \tilde{x}_l + c_2^{(1)} \tilde{x}_l^2 + c_3^{(1)} \tilde{x}_l^3)]^2 \rightarrow \min_{c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)} \in \mathbb{R}}.$$

Збіжність з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ досягнута на 8-й ітерації, при цьому $\|u_{10}^{(8)} - u\|_{L_2(\Omega^{(8)})} = 0,14 \cdot 10^{-4}$.

У таблиці 4.1 наведено порівняння точних та наближених значень шуканої функції в деяких вузлах (x_i, y_i) .

Таблиця 4.1 – Порівняння точного та наближеного розв'язків

x_i	y_j	8-а ітерація	Точне значення функції
0,3272	0	0,7435	0,7535
0,2805	0	0,7803	0,7810
0,2805	0,1953	0,7507	0,7512
0,2338	0,1953	0,7791	0,7796
0,2338	0,2756	0,7486	0,7490
0,1971	0,2756	0,7782	0,7785
0,1971	0,3277	0,7516	0,7520
0,1504	0,3277	0,7827	0,7828
0,1504	0,3793	0,7507	0,7508

Як бачимо, розглянутий метод дає хороші результати для тестової задачі, а використання вищих наближень покращує точність наближеного розв'язку порівняно з результатами з [10 – 12].

Висновки за розділом 4

Проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі розрахунку фільтраційних течій в області з вільною межею. Результати обчислювального експерименту представлені у табличній формі. Аналіз результатів показує, що застосування до розв'язування задачі аналізу процесів фільтрації в областях з вільною межею методу R -функцій у поєднанні з методом Рітца дає хороші результати, які добре співвідносяться з математичною постановкою задачі, з її фізичним змістом та з відомими з літератури результатами.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було застосовано метод R -функцій у поєднанні з варіаційним методом Рітца до аналізу фільтраційних течій в областях з вільною межею.

1. Було проведено системний аналіз задачі моделювання процесів фільтрації в областях з вільною межею. Зроблено висновок про доцільність застосування до вирішення цієї задачі саме конструктивного апарату теорії R -функцій, розробленої академіком НАН України В.Л. Рвачова.

2. На основі сумісного застосування конструктивних засобів теорії методу R -функцій та методу Рітца розроблено алгоритм чисельного аналізу процесу фільтрації в областях з вільною межею.

3. Розроблений алгоритм програмно реалізовано у пакеті Wolfram Mathematica 13.3 і за допомогою розробленої програми проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі з відомим точним розв'язком, що підтвердило ефективність розглянутого методу.

4. Дослідження фільтраційних течій в областях з вільною межею може бути застосовано, зокрема, у гідроенергетиці при проєктуванні різних гідротехнічних споруд.

5. Результати, що отримані у роботі, можна використати для створення та аналізу комп'ютерних моделей, програм або алгоритмів, що зможуть вдосконалити та оптимізувати проведення аналізу процесу фільтрації в областях з вільною межею.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. Київ : Видавнича група ВНУ, 2007. 544 с.
2. Катренко А. В. Системний аналіз. Львів : “Новий світ – 2000”, 2011. 396 с.
3. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс. 2-е изд., перераб. и доп. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
4. Бойко В. С., Бойко Р. В. Підземна гідрогазомеханіка. Львів : «Апріорі», 2005. 452 с.
5. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, Н. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. Киев : Наукова думка, 1977. 288 с.
6. Ляшко Н. И., Великоиваненко Н. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. Киев : Наукова думка, 1973. 264 с.
7. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Ленинград : Судостроение, 1979. 264 с.
8. Сидоров М. В., Стороженко А. В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений. *Радиоэлектроника и информатика*. 2004. № 4 (29). С. 58 – 61.
9. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R -функций. *Радиоэлектроника и информатика*. 2010. № 2 (49). С. 40 – 46.
10. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Математическое моделирование стационарных фильтрационных течений со свободной границей методом R -функций. *АСУ и приборы автоматки*. Вып. 150. 2010. С. 18 – 27.
11. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Численный анализ стационарных фильтрационных течений со свободной границей структурно-вариационным методом. *АСУ и приборы автоматки*. Вып. 151. 2010. С. 15 – 21.

12. Блишун А.П. Метод R -функций в задачах стационарной фильтрации со свободной границей. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2011. № 2. С. 29 – 37.

13. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Применение метода R -функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2012. № 1. С. 50 – 56.

14. Блишун А. П., Сидоров М. В. Метод численного анализа стационарного фильтрационного течения под гидротехническим сооружением в кусочно-однородному грунте. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2012. № 2. С. 5 – 12.

15. Блишун А.П. Численный метод расчета фильтрационного течения под флютбетом при наличии линз. *Радиоэлектроника и информатика*. 2012. № 3 (58). С. 18 – 22.

16. Подгорний О. Р., Сидоров М. В. Застосування методу R -функцій до аналізу фільтраційних течій у кусково-однорідному середовищі. *Радиоелектроніка та інформатика*. 2018. №4 (83). С. 32 – 37.

17. Подгорний О. Р. Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R -функцій для їх чисельного аналізу. *Радиоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 40 – 47.

18. Подгорний О. Р. Чисельний аналіз методом R -функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2018. Вип. 18. С. 113 – 125.

19. Подгорный А. Р., Сидоров М. В. Метод численного анализа фильтрационных течений под каскадом гидросооружений. *Вестник Казахского национального университета. Серия математика, механика, информатика*. 2019. № 1 (101). С. 115 – 131.

20. Podhornyj O. R., Sidorov M. V. Mathematical modeling of fluid flows through the piecewise homogeneous porous medium by R -function method. *Mathematical Modeling and Computing*. 2021. Vol. 8, no. 3. P. 499 – 508.

21. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физики. Киев : Наукова думка, 1974. 260 с.
22. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.
23. Колосова С. В. Вариационные методы приближенного решения краевых задач и интегральных уравнений. Киев : УМК ВО, 1990. 72 с.
24. Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> (дата звернення: 16.12.2024).