

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ВЫСШИХ ЗОНАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

ЧЕРЕДНИКОВ П.И., ПОДГАЙКО О.И.

Описываются соотношения для исследования устойчивости колебаний нелинейной системы в высших зонах параметрического возбуждения. Приводятся результаты исследования устойчивости колебаний в индуктивной параметрической системе с потерями при полигармоническом внешнем воздействии с постоянной составляющей и гармоническом характере изменения параметра. Показывается возможность использования критериев Раусса - Гурвица для анализа систем в высших зонах неустойчивости колебаний и связь энергетических запасов системы с режимами колебательного процесса.

В последнее время возрос интерес к существенно нелинейным параметрическим системам (НПС), взаимодействия в которых проходят в режиме высших зон неустойчивости колебаний. Исследование переходных процессов и устойчивости колебаний в нелинейной системе при параметрическом возбуждении позволяет оценить ее амплитудные и частотные характеристики. Изучение данного вопроса приобретает особое значение при рассмотрении состояния системы в высших зонах неустойчивости, когда колебания системы возникают в более узких частотных интервалах, и система становится более чувствительной к АЧХ внешнего воздействия. Анализ переходных процессов и устойчивости колебаний наглядно представляет связь между начальными условиями воздействия и отклика системы в виде периодических колебаний. Найти решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающего процессы в НПС при произвольных начальных условиях, невозможно, за исключением частных случаев. Рассмотрение переходных процессов и вопросов устойчивости колебаний в НПС в высших зонах неустойчивости имеет значительный научный и практический интерес для создания новых методов взаимодействий и широкого круга функциональных многостабильных преобразователей.

Цель данной статьи — показать возможность использования критериев Раусса - Гурвица для анализа систем в высших зонах неустойчивости колебаний и раскрыть связь энергетических запасов системы с режимами колебательного процесса.

Исследуем устойчивость колебаний в индуктивной параметрической системе, параметрическом генераторе, с потерями при полигармоническом внешнем воздействии с постоянной составляющей и гармоническом характере изменения параметра.

При переходе к безразмерному времени, используя аппроксимацию нелинейной характеристики намагничивания  $H = f(B)$  в виде:  $H = \alpha sh\beta B$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  — коэффициенты аппроксимации;  $B$ ,  $H$  — мгновенные значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля в сердечнике, уравнение, описывающее процессы в системе, будет иметь вид [1]:

$$\ddot{y} + \gamma_2 \frac{d}{d\tau} \left( ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2} \right) + \gamma_3 ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2} = U_0 + U_n \sin n(\tau + \varphi), \quad (1)$$

$$\text{где } \gamma_2 = \frac{\alpha\beta l R_2}{SW_2^2 \omega}; \gamma_3 = \frac{\alpha\beta l}{SW_2^2 \omega^2 C}; \quad x = 2B_H \cos \tau;$$

$n$  — номер зоны неустойчивости. Здесь  $S$  и  $l$  — сечение и длина средней магнитной линии сердечников;  $W_2$  — число витков в резонансной цепи;  $R_2$  — активное сопротивление резонансной цепи;  $C$  — емкость резонансной цепи;  $\omega$  — частота воздействия;  $B_H$  — амплитудное значение индукции поля возбуждения.

Исследуем устойчивость колебаний исходного нелинейного дифференциального уравнения. Для этого будем искать его решение в виде:

$$y = 2B_0 + 2a_n(\tau) \sin n\tau + 2b_n(\tau) \cos n\tau,$$

где  $B_0$  — постоянная составляющая;  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$  — медленно меняющиеся функции.

Дважды продифференцируем данное решение:

$$\ddot{y} = (4n\dot{a}_n - 2n^2 b_n) \cos n\tau - (2n^2 a_n + 4n\dot{b}_n) \sin n\tau.$$

Подставим решение и полученное соотношение в исходное уравнение (1), разложив гиперболические функции в ряд Фурье, коэффициентами которого являются модифицированные функции Бесселя:

$$\begin{aligned} ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2} &= sh B_0 I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n) + \\ &+ 2ch B_0 I_0(B_H) I_1(a_n) I_0(b_n) \sin n\tau + \\ &+ 2ch B_0 I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n) \cos n\tau; \\ \frac{d}{d\tau} \left( ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2} \right) &= (\dot{a}_n I_0(a_n) I_0(b_n) + \\ &+ 2\dot{b}_n I_0(B_H) I_1(a_n) I_1(b_n) - \\ &- 2n I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n)) ch B_0 \sin n\tau + \\ &+ (2\dot{a}_n I_0(B_H) I_1(a_n) I_1(b_n) + \dot{b}_n I_0(B_H) I_0(a_n) I_0(b_n) + \\ &+ 2n I_0(B_H) I_1(a_n) I_0(b_n)) ch B_0 \cos n\tau. \end{aligned}$$

С учетом медленности изменения функций  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  пренебрегаем малыми второго порядка. Получаем приближенные формулы для синусной и косинусной составляющих — укороченные нели-

нейные уравнения относительно производных  $\dot{a}_n$  и  $\dot{b}_n$  для  $n$ -й зоны неустойчивости колебаний системы:

$$\dot{a}_n = \frac{n}{2}b_n - \frac{1}{2}\gamma_2 chB_0 I_0(B_H)I_0(b_n)I_1(a_n) - \frac{1}{2n}\gamma_3 chB_0 I_0(B_H)I_0(a_n)I_1(b_n) + \frac{1}{4n}U_n \sin n\varphi_n; \quad (2)$$

$$\dot{b}_n = -\frac{n}{2}a_n - \frac{1}{2}\gamma_2 chB_0 I_0(B_H)I_0(a_n)I_1(b_n) + \frac{1}{2n}\gamma_3 chB_0 I_0(B_H)I_1(a_n)I_0(b_n) - \frac{1}{4n}U_n \cos n\varphi_n. \quad (3)$$

С помощью полученных формул можно исследовать устойчивость системы в произвольной зоне неустойчивости.

Устойчивость периодического решения для полученных выражений можно найти из критерия Раусса-Гурвица. Рассмотрим малые отклонения  $x_n$  и  $h_n$  от амплитуд  $a_0$  и  $b_0$   $n$ -й гармоники. Определим, когда эти отклонения с увеличением времени будут стремиться к нулю. Из уравнений (2) и (3), опуская члены степени выше первой относительно  $x_n$  и  $h_n$ , получим для  $n$ -й зоны неустойчивости  $(A(a, b) = \dot{a}_n, B(a, b) = \dot{b}_n)$ :

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = a'_1 \xi_n + a'_2 \eta_n; \quad \frac{d\eta_n}{d\tau} = b'_1 \xi_n + b'_2 \eta_n, \quad (4)$$

$$a'_1 = \left( \frac{dA}{da_n} \right)_{a_n=a_{0n}, b_n=b_{0n}} = -\frac{1}{4}\gamma_2 I_0(B_H)I_0(b_n)I_0(a_n)chB_0 - \frac{1}{2n}\gamma_3 I_0(B_H)I_1(a_n)I_1(b_n)chB_0;$$

$$a'_2 = \left( \frac{dA}{db_n} \right)_{a_n=a_{0n}, b_n=b_{0n}} = \frac{n}{2} - \frac{1}{4n}\gamma_3 I_0(B_H)I_0(a_n)I_0(b_n)chB_0 - \frac{1}{2}\gamma_2 I_0(B_H)I_1(a_n)I_1(b_n)chB_0;$$

$$b'_1 = \left( \frac{dB}{da} \right)_{a_n=a_{0n}, b_n=b_{0n}} = -\frac{n}{2} + \frac{1}{4n}\gamma_3 I_0(B_H)I_0(a_n)I_0(b_n)chB_0 - \frac{1}{2}\gamma_2 I_0(B_H)I_1(a_n)I_1(b_n)chB_0;$$

$$b'_2 = \left( \frac{dB}{db} \right)_{a_n=a_{0n}, b_n=b_{0n}} = -\frac{1}{4}\gamma_2 I_0(B_H)I_0(a_n)I_0(b_n)chB_0 + \frac{1}{2n}\gamma_3 I_0(B_H)I_1(a_n)I_1(b_n)chB_0.$$

Характеристическое уравнение для системы (4) имеет вид:

$$\lambda^2 - (a'_1 + b'_2)\lambda + a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 = 0.$$

Если действительные части корней этого уравнения отрицательны, то отклонения  $x_n$  и  $h_n$  с течением времени стремятся к нулю. В этом случае достаточные условия устойчивости имеют вид:

$$P_n = -a'_1 - b'_2 > 0, \quad q_n = a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 > 0. \quad (5)$$

Подставив значения  $a'_1, a'_2$  и  $b'_1, b'_2$  в уравнения (5), получим критерии устойчивости:

$$P_n = \frac{1}{2}\gamma_2 chB_0 I_0(B_H)I_0(a_n)I_0(b_n) > 0;$$

$$q_n = -\frac{n^2}{4} + chB_0 I_0(B_H) \left( \frac{1}{16n^2}\gamma_3^2 + \frac{1}{16}\gamma_2^2 \right) x \times$$

$$\times x \left( (I_0(a_n)I_0(b_n))^2 - 4(I_1(a_n)I_1(b_n))^2 \right) -$$

$$-\frac{1}{2}n\gamma_2 chB_0 I_0(B_H)I_1(a_n)I_1(b_n) > 0.$$

Условие  $P_n > 0$  выполняется всегда. Необходимо выполнение условия  $q_n > 0$ , которое определяется непосредственно параметрами системы и внешнего воздействия.

На рис. 1 приведены первые четыре (I-IV) области устойчивых и неустойчивых (заштрихованная зона) решений, полученных из выражений (5). Сплошная кривая соответствует системе без потерь, кривые 1-3 рассчитаны с учетом активных потерь соответственно для  $R_2 = 5, 15$  и  $25$  Ом. По оси абсцисс отложен коэффициент, зависящий от интенсивности воздействия на систему и определяющий глубину модуляции параметра, по оси ординат - коэффициент, характеризующий расстройку системы. При  $R_2 = 25$  Ом области неустойчивости ограничиваются сверху, а при  $R_2 = 30$  Ом - зоны неустойчивости сужаются в точку, которая соответствует устойчивому режиму колебаний и максимуму поступления энергии в нелинейную систему.

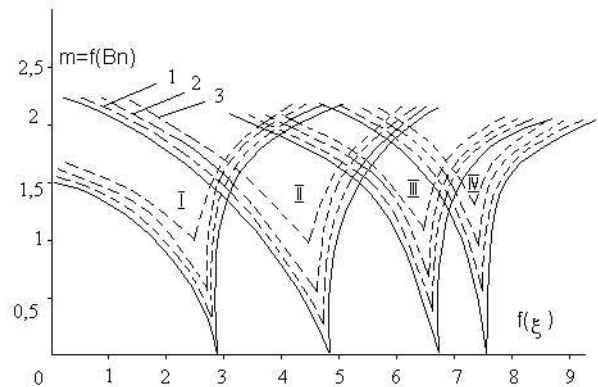


Рис. 1. Области колебаний системы при различных потерях

Анализ переходных процессов в системе, описываемой уравнением (1), заключается в рассмотрении его решения, которое с течением времени становится периодическим. Применим метод Пуанкаре, используя (2) и (3), и перейдем к интегральным кривым:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}_n}{b_n} = & \left( \frac{n}{2} b_n - \frac{1}{2} \gamma_2 I_0(B_H) I_0(b_n) I_1(a_n) chB_0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2n} \gamma_3 I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n) chB_0 + \frac{1}{4n} U_n \sin n\varphi_n \right) / \\ & / \left( -\frac{n}{2} a_n - \frac{1}{2} \gamma_2 I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(a_n) chB_0 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2n} \gamma_3 J_0(B_H) I_1(a_n) I_0(b_n) - \frac{1}{4n} U_n \cos n\varphi_n \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку  $\dot{a}_n$  и  $\dot{b}_n$  не являются функциями времени, то возможно построение с помощью метода изоклин, Льенера и т.д. интегральных кривых на плоскости  $a, b$ . Периодические решения (2) и (3) соответствуют особым точкам уравнения (6), когда  $a=b=0$ .

На рис. 2 представлен первый квадрант фазового портрета исследуемой нелинейной диссипативной системы во второй зоне неустойчивости колебаний. Введение активных потерь в систему приводит к деформации ее фазового портрета. Все особые точки типа фокус соответствуют устойчивому режиму колебаний системы с определенными фазами, что отвечает условию ее энергетических затрат. Радиус-векторы получающихся фокусов поворачиваются на один и тот же угол против часовой стрелки, а радиус-векторы особых точек типа седло поворачиваются по часовой стрелке. Разнотипные особые точки, при увеличении затухания в системе, сближаются друг с другом и при некотором критическом значении потерь сливаются, что соответствует срыву колебаний в системе. При этом остается всего одна особая точка типа устойчивого фокуса в начале координат, колебания в которой отсутствуют.

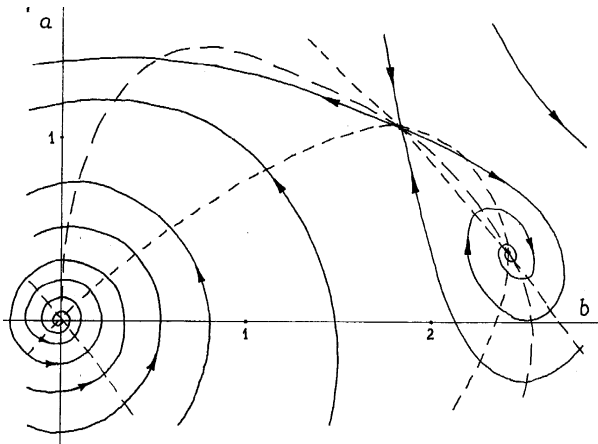


Рис. 2. Фазовый портрет существенно нелинейной системы

Исследования показали, что фазовый портрет параметрической системы несет информацию о степени ее нелинейности. Угол поворота особых точек фазового портрета системы тем больше, чем меньше степень ее нелинейности. В слабонелинейной системе колебания срываются при меньших потерях по сравнению с сильнонелинейной. Это означает, что слабонелинейная система более чувствительна к величине потерь и, соответственно, колебания высших зон неустойчивости возбуждаются в ней в более узком интервале изменения затухания. Следовательно, при переходе к зоне неустойчивости более

высокого порядка система становится более чувствительной к величине потерь. Введение потерь способствует переходу от одного устойчивого состояния системы к другому.

Метод фазовой плоскости позволяет качественно оценить переходные процессы в системе, что существенно при исследовании оптимальных режимов возбуждения и начальных условий колебаний. Одним из важнейших энергетических показателей колебательной системы является запас потенциальной энергии, обусловленный наличием параметрических взаимодействий в системе. Величина энергетических запасов определяет устойчивость колебательного процесса в системе при ее расстройке.

В общем виде для консервативной индуктивной системы, согласно уравнению (1):

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \xi^2 f(t) = 0,$$

$$\text{где } f(t) = sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2}; \xi^2 = \frac{\alpha \beta l}{SW_2^2 \omega^2 C} = \frac{1}{\omega^2 LC} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

– квадрат расстройки системы.

Почленно умножим это уравнение на скорость изменения параметра  $\dot{y}$  и проинтегрируем по времени. Получим выражение для всей энергии колебательной системы  $E_0$ :

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + 2\delta y + \xi^2 \int f(t) dt = const = E_0. \quad (7)$$

(7) представляет собой уравнение фазовой траектории и устанавливает зависимость между  $y$  и  $\dot{y}$ , в котором второе слагаемое определяет диссипативные свойства системы, третье – колебательные.

Рассмотрим третий член уравнения (7), опуская произвольную постоянную интегрирования. Потенциальная энергия колебательной системы  $E_n$ :

$$E_n = \int \xi^2 sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} \frac{dy}{2} dt = 2\xi^2 ch \frac{x}{2} ch \frac{y}{2}.$$

Полученное выражение равно потенциальной энергии нелинейной системы и раскрывает характер влияния интенсивности воздействия и амплитуды колебаний в системе на ее энергетические запасы, которые будут определяться характером взаимодействия в системе –  $f(t)$ . Данное выражение показывает, что в то время, как переменные  $x$  и  $y$ , а вместе с ними и производная  $\dot{y}$ , колеблются с частотой  $\omega$ , колебания энергии в системе происходят с удвоенной частотой  $2\omega$ , что является классическим условием параметрического возбуждения.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Отсутствие колебаний в системе  $y \rightarrow 0$  ( $ch \frac{y}{2} = 0$ ):

$$E_n = 2\xi^2 ch \frac{x}{2},$$

энергетические запасы системы определяются непосредственно ее свойствами и интенсивностью воздействия.

2. Наличие стационарного режима колебаний в системе:  $E_n = 2\xi^2 ch \frac{x}{2} ch \frac{y}{2}$ ,

потенциальная энергия определяется характером взаимодействий в системе.

3. Отсутствие воздействия и наличие затухающих колебаний  $x \rightarrow 0$  ( $ch \frac{x}{2} = 1$ ):  $E_n = 2\xi^2 ch \frac{y}{2}$ ,

энергозапасы определяются амплитудными характеристиками колебательного процесса.

Для количественной оценки потенциальной энергии параметрической системы воспользуемся разложением в ряд гиперболического косинуса  $ch$ :

$$ch y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^6}{6!} + \dots,$$

где  $y = Y_m \sin \omega t$  – функция гармонического характера при условии возбуждения в системе синусоидальных колебаний.

Чтобы достичь требуемой точности анализа физических процессов для слабонелинейной системы, можно ограничиться в разложении гиперболической функции первыми двумя членами ряда, для существенно нелинейной – тремя и более слагаемыми, число которых возрастает с увеличением рассматриваемой зоны неустойчивости.

Подстановка в выражение для потенциальной энергии соответствующего разложения по переменной  $y$  для слабонелинейной системы приводит к выра-

$$E_{II} = 2\xi^2 ch \frac{x}{2} + \frac{\xi^2 ch \frac{x}{2}}{2} y^2 + \frac{\xi^2 ch \frac{x}{2}}{48} y^4,$$

согласно которому максимум потенциальной энергии системы расположен в точке  $y = 0$ .

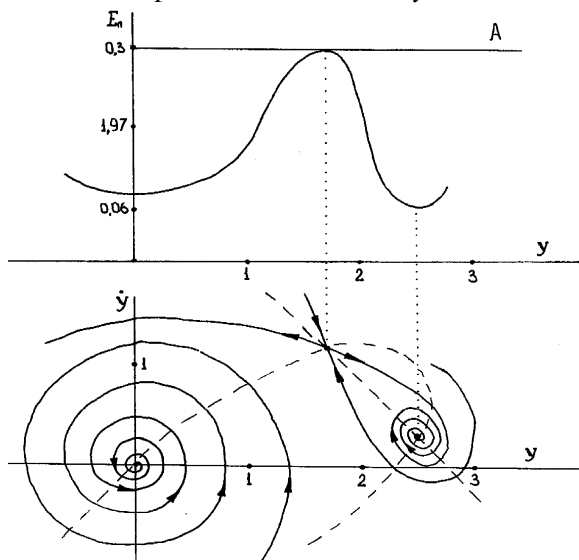


Рис. 3. Энергетическая диаграмма и фазовый портрет системы

При рассмотрении поведения системы на фазовой плоскости выявляется связь энергетических запасов системы с ее фазовыми траекториями. Из (7) сразу можно получить уравнение фазового портрета нелинейной системы:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= V = \sqrt{2(E_0 - 2\delta y - 2\xi^2 ch \frac{x}{2} ch \frac{y}{2})} = \\ &= 2\sqrt{\frac{E_0}{2} - \delta y - \xi^2 ch \frac{x}{2} ch \frac{y}{2}}, \end{aligned}$$

что весьма наглядно, если представить потенциальную энергию как функцию  $y$ . В верхней части рис.3 построен график потенциальной энергии НПС, а в нижней (в том же масштабе оси  $y$ ) соответствующий фазовый портрет колебаний. Очевидно, что максимумы потенциальной энергии соответствуют особым точкам типа седло, минимумы – типа фокус.

С физической точки зрения в особой точке типа седло даже незначительное возмущение вызывает движение из непосредственной окрестности неустойчивого положения равновесия, так как фазовые траектории в окрестности особой точки являются гиперболообразными кривыми, асимптотами которых служат ветви сепаратрисы. Все прямые ниже прямой  $A$  соответствуют фазовым траекториям типа фокус. Прямая  $A$  – граничный случай, так как она касается кривой  $E_n$  в точке максимума. Движения, соответствующие траекториям выше прямой  $A$ , уже не будут колебательными. Следовательно, по фазовому портрету можно установить характер положения зон устойчивых и неустойчивых колебаний и тип движения нелинейной системы.

Применение критерия Раусса-Гурвица для анализа устойчивости периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в параметрической системе, позволяет достаточно легко исследовать устойчивость ее колебаний на любой гармонике. Увеличение потерь в системе приводит к ограничению области неустойчивости сверху, а срыв колебаний соответствует сужению в точку. При переходе к зоне неустойчивости более высокого порядка нелинейная система становится более чувствительной к потерям, а колебания высших зон возбуждаются в более узком интервале изменения затухания. Изменение диссипативных свойств способствует переходу от одного устойчивого состояния системы к другому. Увеличение степени нелинейности системы и введение потерь приводит к деформации ее фазового портрета – повороту радиус-векторов и сближению особых точек.

Уравнение фазовой траектории устанавливает связь энергетических запасов нелинейной системы с положением зон устойчивых колебаний и характером параметрических взаимодействий. Даже незначительное возмущение вызывает движение системы из непосредственной окрестности неустойчивого положения равновесия.

**Литература:** 1. *Расчет и проектирование параметрических систем на высших гармониках:* Учеб. пособие / Чередников П.И. Харьков: ХПИ, 1980. 98с.

Поступила в редколлегию 04.11.2000

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Руженцев И.В.

**Чередников Павел Ильич**, канд. техн. наук, доцент кафедры ПЭЭА ХТУРЭ. Научные интересы: теория и практика параметрических зонных взаимодействий. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-43.

**Подгайко Олег Иванович**, ассистент кафедры ПЭЭА ХТУРЭ. Научные интересы: исследование параметрических взаимодействий в нелинейных системах. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-43.