УДК 621.396

Ю. П. ЗУБКОВ, канд. техн. наук

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ СТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ ПРЕДСКАЗАНИЯ СИГНАЛОВ КОРРЕКЦИИ

В современных радиотехнических системах широко распространены широкополосные составные сигналы с избыточностью. Синтез эффективных демодуляторов сигналов данного типа можно выполнять на основе одного из простейших методов векторной оптимизации — максимизации апостериорной вероятности (метод градиентного декодирования в целом) [1]. Помехоустойчивость приемников с градиентным декодированием в целом широкополосных составных избыточных сигналов в большой степени зависит от эффективности алгоритмов предсказания сигналов коррекции.

Рассмотрим теоретические основы методики синтеза указанных алгоритмов, ориентированных на микропроцессорную реализацию.

С помощью обобщения целого ряда комбинаторных задач, решение которых лежит в основе алгоритмов функционирования известных методов предсказания, можно определять некоторые основные положения структурной теории систем счисления. Согласно принципам этой теории множество сигналов коррекции отождествляется с множеством чисел. Последнее упорядочивается. Структура упорядоченного множества и определяет систему нумераций его элементов, т. е. структурную систему счисления.

Пусть задано n вполне упорядоченных множеств элементарных сигналов

$$S_j^A(t) = \{s_{j,i}(t)\}_{i=0}^{i=m_j-1} = S_j^A = \{s_{j,i}\}^{i=m_j-1};\ \forall j : j = \overline{0,\ n-1}. \quad (1)$$

Определение 1. S_j^A *есть* j*-й позиционный алфавит.*

Определение 2. $s_{j,i}(\forall j : j = \overline{0,\ n-1};\ \forall i : i = \overline{0,\ m_j-1})$ *есть* i*-я буква* j*-го позиционного алфавита.*

Определение 3. $S = \{s_{j,i}\}$ *есть слово множества*

$$S_D = \prod_{j=0}^{n-1} S_j^A. \quad (2)$$

Лексикографическое отношение доминирования на S_D *есть*

$$S_K = \{s_{j,i}^K\};\ S_{K+1} = \{s_{j,i}^{K+1}\};$$

$$s_{n-a,g}^K = s_{n-a,d}^{K+1};\ s_{n-r-1,f}^K < s_{n-r-1,p}^{K+1}; \quad (3)$$

$$\forall a : a = \overline{1,\ r};\ \forall r : r = \overline{1,\ n}.$$

Тогда структура S_D имеет вид

$$\begin{gathered} S_0 = (s_{n-1,0};\ s_{n-2,0};\ \ldots;\ s_{0,0}); \\ S_1 = (s_{n-1,0};\ s_{n-2,0};\ \ldots;\ s_{0,1}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m_0} = (s_{n-1,0};\ s_{n-2,0};\ \ldots;\ s_{0,m_0-1}); \\ S_{\operatorname{card} S_D} = (s_{n-1,m_{n-1}-1};\ s_{n-2,m_{n-2}-1};\ \ldots;\ s_{0,m_0-1}). \end{gathered} \tag{4}$$

Если обозначить

$$M_{s_{n-1}} = \{s : s = s_{n-1,\mathrm{var}}\},$$

т. е.

$$M_{s_{n-1}} = (s_{n-1,0};\ \ldots;\ s_{n-1,0};\ \ldots;\ s_{n-1,1};\ \ldots;\ s_{n-1,1};\ \ldots;\ s_{n-1,m_{n-1}-1}),$$

то

$$S_D = \bigcup_l S^{n-1,l},\quad S^{n-1,l} = \{s : s_{n-1} = s_{n-1,l}\} \tag{5}$$

и

$$\operatorname{card}\{S^{n-1,0};\ S^{n-1,1};\ \ldots;\ S^{n-1,m_{n-1}-1}\} = m_{n-1}.$$

Теорема 1.

$$\operatorname{card} S^{n-1,l} = \operatorname{card}\left\{\prod_{j=n-2}^{0} S_j^A\right\},\quad \forall\, l : l = \overline{0,\ m_{n-1}-1}. \tag{6}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} S_D = \prod_{j=n-1}^{0} S_j^A = S_{n-1}^A \prod_{l=n-2}^{0} S_l^A = \{s_{l,t}\}_{n-1,0}^{n-1,m_{n-1}-1} \prod_{l=n-2}^{0} S_l^A = \\ = s_{n-1,0} \prod_{l=n-2}^{0} S_l^A \cup s_{n-1,1} \prod_{l=n-2}^{0} S_l^A \cup \\ \cup\, s_{n-1,m_{n-1}-1} \prod_{l=n-2}^{0} S_l^A. \end{aligned} \tag{7}$$

Переписав (7) с учетом (5), получим

$$S_D = \bigcup_{l=0}^{m_{n-1}-1} S^{n-1,l},$$

откуда

$$\operatorname{card} S^{n-1,l} = \operatorname{card}\left\{s_{n-1,l} \prod_{j=n-2}^{0} s_j^A\right\} = \operatorname{card}\{s_{n-1,l}\} \operatorname{card}\left\{\prod_{l=n-2}^{0} S_l^A\right\}.$$

Вследствие того что $\operatorname{card}\{s_{n-1,l}\} = 1$, находим

$$\operatorname{card} S^{n-1,l} = \operatorname{card}\left\{\prod_{l=n-2}^{0} S_l^A\right\}.$$

Из (7), (1) вытекает

$$\operatorname{card} S^{n-1,l} = \operatorname{card}\left\{\prod_{l=n-2}^{0} S_l^A\right\} = \prod_{l=n-2}^{0} m_l.$$

Теорема доказана.

Определение 4. *Позиционным номером p-го класса эквивалентности* $S^{n-1,p}$ *называется*

$$\mathrm{Num}\,(S^{n-1,p}) = \mathrm{card}\left\{\bigcup_{l=0}^{p-1} S^{n-1,l}\right\}.$$

Тогда согласно определению 4

$$\mathrm{Num}\,(S^{n-1,0}) = \mathrm{card}\,\varnothing = 0;$$

$$\mathrm{Num}\,(S^{n-1,1}) = \mathrm{card}\,\{S^{n-1,0}\} = \prod_{l=n-2}^{0} m_l;$$

$$\mathrm{Num}\,(S^{n-1,2}) = \mathrm{card}\,\{S^{n-1,0} \cup S^{n-1,1}\} =$$

$$= \mathrm{card}\,\{S^{n-1,0}\} + \mathrm{card}\,\{S^{n-1,1}\} = 2\prod_{l=n-2}^{0} m_l;$$

. . . . . .

$$\mathrm{Num}\,(S^{n-1,m_{n-1}-1}) = \mathrm{card}\left\{\bigcup_{i=0}^{m_{n-2}-1} S^{n-1,i}\right\} =$$

$$= (m_{n-1}-1)\prod_{l=n-2}^{0} m_l$$

и

$$S^{n-1,l} = \bigcup_{l} S^{n-2,l}(s_{n-1,l}). \tag{8}$$

Обозначим

$$S^{n-2,l}(s_{n-1,l}) = \{s : s_{n-1} = s_{n-1,l};\ s_{n-2} = s_{n-2,l}\}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\mathrm{card}\,\{S^{n-2,l}(s_{n-1,p})\}_{i=0}^{m_{n-2}-1} = m_{n-2}. \tag{10}$$

Теорема 2.

$$\mathrm{card}\,\{S^{n-2,l}(s_{n-1,p})\} = \mathrm{card}\left\{\prod_{j=n-1}^{0} S_j^4\right\}; \tag{11}$$

$$\forall\, p : p = \overline{0,\ m_{n-1}-1},\quad \forall\, l : l = \overline{0,\ m_{n-2}-1}.$$

Доказательство тривиально, поэтому не приводится. В частности,

$$\mathrm{card}\,\{S^{n-2,l}(s_{n-1,p})\} = \prod_{c=n-3}^{0} m_c. \tag{12}$$

Определение 5. *Позиционным номером l-го класса эквивалентности* $S^{n-2,l}(s_{n-1,p})$ *называется*

$$\mathrm{Num}\,(S^{n-2,l}(s_{n-1,p})) = \mathrm{card}\left\{\bigcup_{l=0}^{l-1} S^{n-2,l}(s_{n-1,p})\right\}, \tag{13}$$

$$\forall p : p = \overline{0,\ m_{n-1}-1}.$$

Определение 6. *Позиционным номером К-го класса эквивалентности* $S^{n-t,k}(s_{n-1,p};\ \ldots;\ s_{n-t,k})$ *называется*

$$\operatorname{Num} S^{n-t,k}(\cdot) = \operatorname{card}\left\{\bigcup_{l=0}^{k-1} S^{n-t,l}(\cdot)\right\}, \tag{14}$$

$$\forall p : p = \overline{0,\ m_{n-1}-1};\ \ldots;\ \forall k : k = \overline{0,\ m_{n-t-1}-1}.$$

Теорема 3.

$$\operatorname{card} S^{n-t,k}(s_{n-1,p};\ s_{n-2,p};\ \ldots;\ s_{n-t,k}) = \operatorname{card}\left\{\prod_{j=n-t-1}^{0} S_j^A\right\}. \tag{15}$$

Теорема 4. *Номер элемента* $(s_{n-1,a};\ \ldots;\ s_{0,c})$ *в* S_D *определяется суммой соответствующих позиционных номеров*

$$\operatorname{Num}(s_{n-1,a};\ \ldots;\ s_{0,c}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Num}\left[S^{n-i,l\in S_{n-i}^A}\left(s_{n-1,l\in S_{n-1}^A};\ \ldots;\ s_{n-i-1,l\in S_{n-i-1}^A}\right)\right]. \tag{16}$$

Доказательство. Раскрыв (16) с учетом (13), получим

$$\operatorname{Num}(s_{n-1,a};\ \ldots;\ s_{0,c}) = \operatorname{card} A,$$

где

$$A = \operatorname{card}\left\{\bigcup_{l=a-1}^{0} S^{n-1,l}\right\} + \operatorname{card}\left\{\bigcup_{j=0}^{b-1} S^{n-2,b}(s_{n-1,a})\right\} +$$

$$+ \operatorname{card}\left\{\bigcup_{g=0}^{c-1} S^{n-3,g}(s_{n-1,a};\ \ldots;\ s_{n-2,b})\right\} + \ldots + \operatorname{card}\left\{\bigcup_{l=0}^{t-1} S^{n-t,l} \times\right.$$

$$\left.\times (s_{n-1,a};\ \ldots;\ s_{n-t+1,a})\right\} + \ldots + \operatorname{card}\left\{\bigcup_{k=0}^{r-1} S^{r,k}(s_{n-1,a};\right.$$

$$\left. s_{n-2,b};\ \ldots;\ s_{1,\gamma})\right\}. \tag{17}$$

Проанализируем первое слагаемое в (17). Согласно (5) данное слагаемое соответствует мощности лексикографически упорядоченного множества векторов из S_D, для которых s_{n-1} принимает значения от $s_{n-1,0}$ до $s_{n-1,a-1}$. Из (1) вытекает, что следующие элементы S_D содержат $s_{n-1,a}$. Рассмотрим второе слагаемое в (17). В соответствии с (7) оно определяет кардинал лексикографически упорядоченного множества слов (сигналов коррекции), в которых $(n-1)$-я буква есть $s_{n-1,a}$, а буква s_{n-2} принимает значения от $s_{n-2,0}$ до $s_{n-2,b-1}$. Таким образом, второе множество также несет на себе лексикографическое отношение доминирования. Анализируя остальные слагаемые в (17), нетрудно установить их соответствие словам из (4). Последнее слагаемое определяет множество слов, у которых левые $n-1$ буквы такие же, как и в исходном слове. Последнее слово данного множества содержит букву $s_{0,c-1}$. В соответствии с (1) следующим будет

слово, открывающее множество. Последнее означает, что исходное слово содержится во множестве A' таком, что $\operatorname{card} A' = \operatorname{card} A + 1$.

Таким образом, доказано соответствие (16) величине $\operatorname{card} A'$. Поэтому, учитывая (13), получаем

$$\operatorname{Num}(s_{n-1,a};\ s_{n-2,b};\ \ldots;\ s_{0,c}) = \operatorname{card} A.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 теоремы 4. Начальный элемент множества S_D имеет номер

$$\operatorname{Num}(s_{n-1,0};\ s_{n-2,0};\ \ldots;\ s_{0,0}) = 0.$$

Следствие 2 теоремы 4. Конечный элемент в S_D имеет номер

$$\operatorname{Num}(s_{n-1,m_{n-1}-1};\ \ldots;\ s_{n-2,m_{n-2}-1};\ \ldots;\ s_{0,m_0-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} m_i - 1.$$

Доказательство.

$$\prod_{i=0}^{n-1} m_i = (m_{n-1} - 1) \prod_{i=0}^{n-2} m_i + (m_{n-2} - 1) \prod_{i=0}^{n-3} m_i + \ldots + m_0 - 1 =$$

$$= (m_{n-1} - 1) \prod_{i=0}^{n-2} m_i + \ldots + (m_1 - 1) m_0 + (m_0 - 1) + 1 - 1 =$$

$$= (m_{n-1} - 1) \prod_{i=0}^{n-2} m_i + \ldots + (m_{n-1} - 1) \prod_{i=0}^{n-2} m_i + m_{n-1} - 1 =$$

$$= m_{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} m_i - \prod_{i=0}^{n-2} m_i + m_{n-1} - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} m_i - 1.$$

Следствие 3 теоремы 4. Элементы любого словарного множества можно перенумеровать, т. е. на этом множестве моделируется натуральный ряд чисел.

Определение 7. *Словарное множество, элементы которого нумеруются согласно (16), называется моделирующим.*

Определение 8. *Нумерацией называется процесс моделирования натурального ряда чисел на моделирующем множестве.*

Теорема 5 («существования»).

$$\prod_{i=0}^{l} m_i - 1 = \sum_{j=1}^{l} s_{j,m_j-1} \prod_{i=0}^{j-1} m_i + s_{0,m_0-1}. \tag{18}$$

Доказательство.

Так как

$$\prod_{i=0}^{l} m_i = s_{l,m_l-1} \prod_{i=0}^{l-1} m_i + \ldots + s_{1,m_1-1} + s_{0,m_0-1} + 1,$$

имеем

$$\prod_{i=0}^{l} m_i = s_{l,m_l-1} \prod_{i=0}^{l-1} m_i + \ldots + s_{1,m_1-1} m_0 + m_0;$$

$$\prod_{i=0}^{l} m_i = s_{l,m_l-1} \prod_{i=0}^{l-1} m_i + \prod_{i=0}^{l-1} m_i.$$

Наконец

$$(s_{l,m_l-1} + 1) \prod_{i=0}^{l-1} m_i = \prod_{i=0}^{l} m_i.$$

Теорема доказана.

Следствие теоремы «существования». Если $m_i = \text{const} = 2$, то

$$\prod_{i=0}^{l} m_i - 1 = \sum_{i=0}^{l-1} m_i = \sum_{i=0}^{l-1} 2^i = 2^l - 1.$$

Теорема 6. *Множество является моделирующим, если оно словарно и*

$$\text{card } S^k > \sum_{i=0}^{l} m_i, \quad \forall K, \; l : K > l.$$

Данная теорема подтверждает возможность существования парадоксальных систем счисления.

Теорема 7. *Если суммы символов в каждой позиции моделирующего множества одинаковы, то кардиналы позиционных алфавитов неизменны.*

Рассмотрим вопросы, связанные с формированием позиционных алфавитов. Множество позиционных алфавитов с учетом (1) можно представить так:

$$\{\text{card } S_0^A;\ \text{card } S_1^A;\ \ldots;\ \text{card } S_{n-1}^A\},$$

или

$$(\gamma_0;\ \gamma_1;\ \ldots;\ \gamma_{n-1}). \tag{19}$$

Для анализа характеристик (19) используем элементы теории возвратных последовательностей [2]. Пусть

$$\gamma(0) = 1,\ \gamma(l < 0) = 0,\ \gamma(l) = c\gamma(l-1), \tag{20}$$

тогда последовательность (19) имеет вид

$$\{1;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ \ldots\},\ c = 1; \tag{21}$$

$$\{1;\ 2;\ 4;\ \ldots;\ 2^{l-1};\ \ldots\},\ c = 2; \tag{22}$$

$$\{1;\ m;\ m^2;\ m^3;\ \ldots;\ m^{l-1};\ \ldots\},\ c = m. \tag{23}$$

Если

$$\gamma(l) = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma(l - ip - 1);\ \gamma(0) = 1, \tag{24}$$

то при $m = 2$, $p = 1$ $\gamma(l) = \gamma(l-1) + \gamma(l-2)$.
Последнее выражение соответствует известной фибоначчиевой возвратной последовательности второго порядка.

Из анализа эволюции характеристик лексикографически упорядоченного множества следует, что перспективными являются множества матричных элементов. Аналогичный вывод содержится и в работе [3].

Для каждой из последовательностей (21) — (24), называемых базовыми, можно построить соответствующую матрицу.

В общем виде матричный сигнал коррекции записывается в следующем виде:

$$\gamma_l^{Б}(l),\ \gamma_l^{Б}(0) = 1;$$
$$\gamma_l^{Б}(t),\ \gamma_l^{Б}(0) = 1;$$
$$\gamma_l^{H} = \gamma_l^{Б}(t);$$
$$\gamma_l^{H} = \gamma_t^{Б}(l).$$

Представление совокупности сигналов коррекции в виде определенной структуры позволяет эффективно нумеровать ее элементы. Теоретико-множественное описание указанной структуры в виде соответствующей системы счисления, называемой структурной, открывает широкие возможности в реализации алгоритмов формирования сигналов коррекции на микропроцессорной основе. Данные возможности следуют из того факта, что функционально новые алгоритмы отображают процедуры перехода от систем счисления сигналов управления к структурным системам счисления сигналов коррекции.

Список литературы: 1. *Зубков Ю. П.* Градиентное декодирование в целом составных сигналов с избыточностью // Радиотехника.— 1981.— Вып. 59. С. 32—39. 2. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности.— М.: Наука, 1983.— 48 с. 3. *Вышинский В. А.* Об одной универсальной алгоритмической системе // Автоматика.— 1984, № 4.— С. 71—73.

Поступила в редколлегию 17.12.85.

УДК 621.396

Б. Г. ТЕРЯЕВ, канд. техн. наук

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ЧАСТОТНО-ОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ТРАКТА

Исследованию помехоустойчивости квазикогерентных ФМ демодуляторов с учетом работы их устройств синхронизации и при отсутствии межсимвольных искажений в линейных каналах посвящена работа [1]. Для такого исследования необходимо предварительно определить отношение сигнал-помеха на выходе устройств синхронизации — формирования опорного колебания (УФОК) и выделения тактовых импульсов (УВТИ). Указанное отношение зависит от отношения сигнал-помеха на выходе устройства и его функциональной схемы. Практически любое устройство синхронизации демодуляторов ФМ сигналов можно представить в виде последовательно соединенных звеньев — безынерцион-