

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Хацько Дарині Сергіївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Комп'ютерне моделювання процесів руйнування елементів
конструкцій ракетної техніки

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи втомні тріщини у конструкціях

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Стрельнікова О.О.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 74 с., 3 табл., 21 рис., 2 дод., 40 джерел.

ВТОМНА ТРІЩИНА, ДЕФЕКТ, КІЛЬКІСТЬ ЦИКЛІВ, КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ, МІКРОТРІЩИНА, НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, ПАЛИВНИЙ БАК, ПЕРІОДИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ, РАКЕТНА ТЕХНІКА, ЦИЛІНДР.

Об'єкт дослідження – процеси руйнування конструкцій з мікродефектами.

Мета роботи – комп'ютерне моделювання визначення граничної кількості циклів навантажень на елементи конструкції ракетної техніки при транспортуванні.

Методи дослідження – метод потенціалу, різні модифікації методу граничних елементів та проєкційних методів.

У кваліфікаційній роботі було виконано комплексне дослідження напружено-деформованого стану конструкцій ракетної техніки з урахуванням тріщиноподібних дефектів. Отримано нові результати, які демонструють вплив розмірів і розташування дефектів на довговічність конструкцій. Новизна роботи полягає у запропонованих методиках розрахунку критичної кількості циклів навантаження із застосуванням гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що забезпечує високу точність чисельного моделювання.

Рекомендовано використовувати розроблені методики для прогнозування розвитку тріщин, оцінки зон концентрації напружень та визначення параметрів довговічності конструкцій. Це дозволяє вчасно виявляти зони найбільшого ризику та запобігати аварійним ситуаціям.

Сфера застосування результатів охоплює розробку, транспортування та експлуатацію паливних баків ракетної техніки, що сприяє підвищенню їхньої надійності в умовах реальних експлуатаційних навантажень.

Значимість роботи полягає у забезпеченні безпеки ракетних систем, підвищенні їх експлуатаційної ефективності, а також зниженні витрат, пов'язаних із руйнуванням конструкцій.

У висновках наголошується на важливості продовження досліджень для аналізу взаємодії різнотипних навантажень, зокрема вітрових і ударних, а також впливу плескання рідини на коливання пружних стінок баків. Це сприятиме вдосконаленню передстартової підготовки ракет-носіїв і підвищенню надійності ракетної техніки загалом.

ABSTRACT

Introductory note: 74 pages, 3 tables, 2 figures, 2 appendixes, 40 sources.

CYLINDER, DEFECT, FATIGUE CRACK, FUEL TANK, MICROCRACK, NUMBER OF CYCLES, PERIODIC LOADING, ROCKETRY, STRESS INTENSITY FACTOR, STRESS-STRAIN STATE.

Object of research – fracture processes of structures with microdefects.

Purpose of work – computer modelling to determine the maximum number of load cycles on structural elements of rocketry during transport.

Methods of research – potential method, various modifications of the boundary element method and projection methods.

In the qualification work, a comprehensive study of the stress-strain state of rocketry structures with consideration of crack-like defects was carried out. New results have been obtained that demonstrate the influence of the size and location of defects on the durability of structures. The novelty of the work lies in the proposed methods for calculating the critical number of loading cycles using hypersingular integral equations, which ensures high accuracy of numerical modelling.

It is recommended to use the developed methods to predict the development of cracks, assess stress concentration zones and determine the parameters of structural durability. This allows timely identification of the highest risk areas and prevention of emergencies.

The scope of the results covers the development, transportation and operation of rocket fuel tanks, which contributes to increasing their reliability under real operational loads.

The significance of the work is to ensure the safety of missile systems, increase their operational efficiency, and reduce the costs associated with structural failure.

The conclusions emphasise the importance of continuing research to analyse the interaction of different types of loads, including wind and impact loads, as well as

the effect of liquid splashing on the vibrations of elastic tank walls. This will help to improve the pre-launch training of launch vehicles and increase the reliability of rocketry in general.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	10
Вступ	11
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	13
1.1 Мікротріщини та втомні тріщини	13
1.2 Методи оцінки коефіцієнту інтенсивності напружень	15
1.3 Основні співвідношення механіки суцільного середовища та крихкого руйнування	18
1.4 Змістовна та формальна постановка задачі	22
1.5 Постановка задач дослідження	24
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	26
2.1 Метод визначення зон найбільшої концентрації напружень в елементах ракетної техніки	26
2.2 Методи побудови бази модельних мікрodefектів	27
Висновки за розділом 2	32
3 Програмна реалізація	33
3.1 Платформа ANSYS та мова програмування Python	33
3.2 Алгоритм визначення КІН за умови появи модельної тріщини в зоні найбільшої концентрації напружень	35
3.3 Алгоритм визначення кількості циклів заданого періодичного навантаження на елемент конструкції до підростання модельної тріщини до неприпустимих розмірів при транспортуванні	37
3.4 Опис програми на Python для моделювання появи втомної тріщини	39
3.5 Опис програми для моделювання тріщини та визначення граничної кількості циклів до руйнування конструкції	40
Висновки за розділом 3	42

4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	44
4.1 Визначення кількості циклів заданого періодичного навантаження на елемент конструкції ракетної техніки до підростання модельної тріщини до неприпустимих розмірів	44
4.2 Визначення кількості циклів заданого періодичного навантаження на елемент конструкції ракетної техніки до підростання модельної тріщини до неприпустимих розмірів при транспортуванні	49
Висновки за розділом 4	58
Висновки	60
Перелік джерел посилання	62
Додаток А Лістинг програми мовою Python	66
Додаток Б Лістинг програми у середовищі ANSYS	69

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

г – грам;

Гц – Герц;

КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень;

м – метр;

МГЕ – метод граничних елементів;

МСЕ – метод скінченних елементів;

Н – Ньютон;

НДС – напружено-деформований стан;

Па – Паскаль;

с – секунда.

ВСТУП

Актуальність теми. Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення надійності та безпеки при транспортуванні конструктивних елементів ракетної техніки, що є критично важливим для забезпечення їхньої функціональної цілісності. У контексті сучасних вимог до тривалої та ефективної експлуатації високотехнологічного обладнання, зокрема в авіаційній і ракетній галузях, особливу увагу привертають проблеми, пов'язані з виникненням та зростанням мікродефектів, що можуть утворюватися в процесі транспортування.

Зважаючи на те, що мікродефекти здатні поступово накопичуватися і прогресувати під впливом вібраційних та циклічних навантажень, оцінка їхнього зростання стає важливою складовою забезпечення надійності конструкційних елементів. Безпосередньо для ракетної техніки ці питання мають особливе значення, оскільки такі дефекти можуть спричинити серйозні наслідки, включно з аварійними ситуаціями. Комп'ютерне моделювання процесів зростання мікродефектів дозволяє отримати цінні прогнози щодо того, коли саме елементи можуть вийти з ладу, а також оцінити можливість безпечного транспортування та встановлення конструкційних компонентів.

Розробка моделей для прогнозування зростання мікродефектів під час транспортування є актуальним завданням, що сприятиме підвищенню рівня надійності та довговічності обладнання, мінімізуючи ризики виходу з ладу відповідальних конструкційних елементів ракетної техніки. Отже, тема є актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є комп'ютерне моделювання визначення граничної кількості циклів навантажень на елементи конструкції ракетної техніки при транспортуванні. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «комп'ютерного моделювання процесів руйнування елементів конструкцій ракетної техніки»;
- ознайомитись з методами визначення зон найбільшої концентрації напружень в елементах ракетної техніки;

- побудувати бази модельних мікродефектів;
- розробити метод для визначення граничної кількості циклів навантаження на елементи конструкції;
- розробити програму для моделювання та аналізу тріщин у конструкціях при транспортуванні;
- провести моделювання появи тріщини та її зростання до неприпустимих розмірів;
- проаналізувати отримані результати та визначити граничну кількість навантажень для різних типів дефектів;
- зробити висновки з отриманих результатів.

Об'єктом дослідження є процеси руйнування конструкцій з мікродефектами.

Предметом дослідження є виявлення граничної кількості циклів навантажень на елементи конструкції.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються метод потенціалу, що дозволило звести задачі, що розглядалися до граничних інтегральних рівнянь. Для чисельного розв'язку цих рівнянь застосовані різні модифікації методу граничних елементів та проекційних методів.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на міжнародній конференції «Learning & Teaching: in the World after War» (м. Харків, 8 листопада 2024 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Мікротріщини та втомні тріщини

Мікротріщини – це дрібні пошкодження, які часто залишаються непоміченими під час візуального огляду і можуть бути невидимими без використання спеціальних діагностичних методів. Незважаючи на свій малий розмір, такі тріщини під впливом втомних навантажень можуть поступово зростати, що зрештою призводить до часткового або повного руйнування конструктивних елементів. Втомні тріщини зазвичай розвиваються поблизу несучих поверхонь, часто в результаті корозії, екстремальних температур і повторюваних механічних навантажень.

Корозійні процеси сприяють руйнуванню матеріалів під впливом хімічних реакцій із навколишнім середовищем, найчастіше з вологим повітрям або агресивними хімічними речовинами. Металеві конструкційні елементи, наприклад, схильні до окислення, особливо в умовах підвищеної вологості або при контакті з кислотними розчинами. Результатом корозії стає ослаблення структури матеріалу та зниження його міцності. На рисунку 1.1 показано водоохолоджувальну трубу з втомною корозійною тріщиною [2].

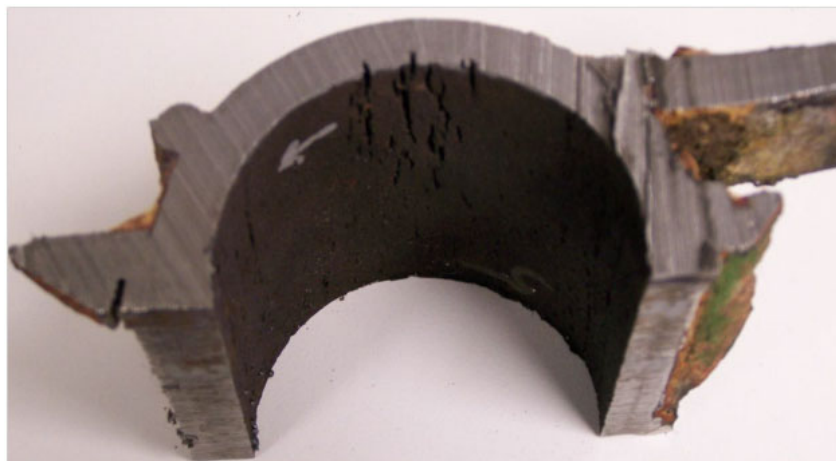


Рисунок 1.1 – Приклад втомної тріщини під дією корозії

Перепади температур призводить до циклічних розширень і скорочень матеріалів, що може викликати накопичення внутрішніх напружень, особливо якщо конструкційний матеріал має різні коефіцієнти термічного розширення в окремих частинах. Приклад втомної тріщини, утвореної в зоні термічного впливу, зображено на рисунку 1.2 [3].

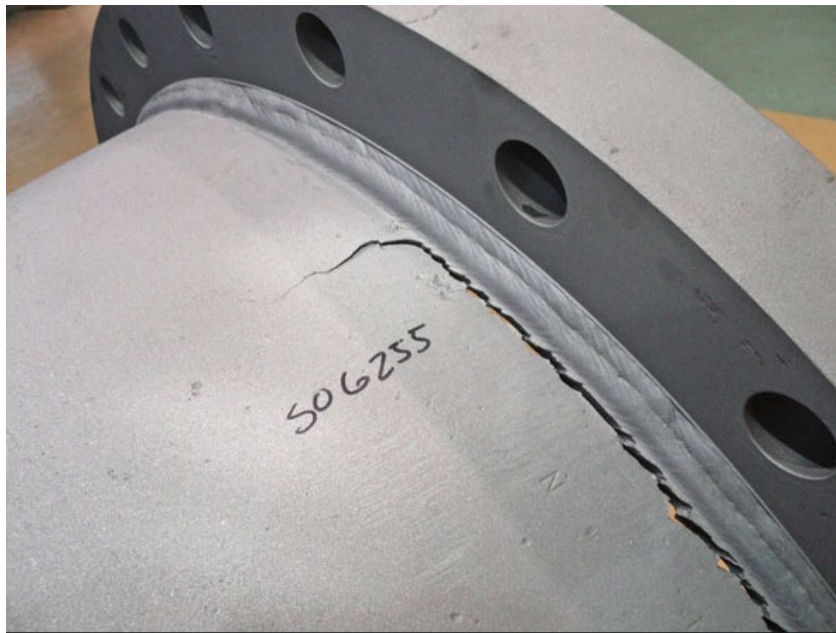


Рисунок 1.2 – Втомна тріщина в зоні термічного впливу

Повторювані механічні навантаження виникають під час регулярного впливу змінних навантажень, наприклад, коливання маси, вібрації та циклічні деформації. Під впливом таких навантажень матеріал конструкції поступово втомлюється, а накопичені пошкодження з часом призводять до утворення мікротріщин. На рисунку 1.3 показано одну з половин зразка, який був випробуваний на втому. Зразок мав отвір авіаційного кріплення. У процесі випробувань тріщина зростала від втоми, яка досягла критичного розміру й призвела до розлому. Світло-сіра зона показує тріщину, а "пляжні знаки" вказують, що тріщина почала рости від перетину отвору та його поглиблення, де виникає найбільша напруга, під дією циклічних навантажень [3].

На початковій стадії зростання мікротріщина може розвиватися повільно, однак, досягнувши критичної довжини, вона здатна призвести до раптового

руйнування. Це руйнування є особливо небезпечним, оскільки може статися несподівано, навіть при номінальних навантаженнях, створюючи значні ризики для безпеки людей та інфраструктури.



Рисунок 1.3 – Втомне руйнування під дією циклічних навантажень

Окрім навантажень під час експлуатації, важливим іншим фактором пошкодження конструкцій є процес транспортування. Під час перевезення інженерних елементів, особливо великих і важких, наприклад, елементів конструкції ракетної техніки, на них діють додаткові механічні впливи, такі як вібрації, удари та нерівномірні навантаження через рух транспорту по складних або нерівних дорогах. У процесі транспортування конструкційні матеріали можуть піддаватися деформаціям, які створюють нові мікротріщини або сприяють поширенню вже існуючих.

1.2 Методи оцінки коефіцієнту інтенсивності напружень

На сьогодні накопичено значний обсяг експериментальних та теоретичних досліджень, присвячених закономірностям розвитку тріщин під дією циклічних навантажень. Вагомий внесок у цю сферу зроблено у численних моног-

рафіях [4–7], а також у наукових статтях, оглядах та нормативних документах [8–11]. Зокрема, було розроблено нормативні інструкції для оцінки залишкового ресурсу елементів гідротурбін з наявністю тріщин [12]. Дослідження, спрямовані на визначення тріщиностійкості нафто- та газопроводів, відображено у [13], а роботи [14–19] містять бази даних і класифікації тріщин у трубопроводах, а також оцінки залишкового ресурсу авіаційного обладнання.

Останні досягнення у теорії тріщин та скупчень включень стали основою сучасних технологій для оцінки залишкового ресурсу матеріалів і конструкцій [18–20]. У дослідженнях вивчено взаємодію поверхневих тріщин, вплив пористих ланцюжків на міцність зварного шва, а також граничні умови для ланцюжків тріщин під дією теплових навантажень [21–23]. Численні дослідження з довговічності конструкцій, які враховують різні типи дефектів, підкреслюють необхідність порівняльного аналізу цих дефектів для точного прогнозування довговічності елементів конструкцій.

Дослідження динамічних процесів в елементах конструкції експериментальними методами призводить до значних матеріальних витрат, небажаних небезпечних наслідків і не дозволяє отримати детальний розподіл напружень, деформацій, переміщень, температур, а також описати виникнення, зростання тріщин, і пошкодження. Тому виникає необхідність у проведенні комп'ютерного моделювання.

Означення. Напружено-деформований стан тіла (НДС) – це фізико-механічний стан матеріального тіла, що характеризується розподілом внутрішніх силових взаємодій (напружень) та геометричних змін (деформацій) у його об'ємі під дією зовнішніх або внутрішніх впливів.

Означення. Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) – це параметр K , що характеризує НДС поблизу вершини тріщини в матеріалі, який зазнає навантаження. Для різних типів деформацій використовують наступні позначення:

- а) режим I (розтяг або відкриття тріщини): K_I ;
- б) режим II (зсув у площині тріщини): K_{II} ;
- в) режим III (зсув перпендикулярно до площини тріщини): K_{III} .

Сьогодні розроблено низку чисельних методів для оцінки КІН. Серед них можна виділити метод вільних елементів Галеркіна [24], метод скінченних елементів для моделювання КІН у балках із тріщинами [25], згладжений метод скінченних елементів для тривимірних тіл [26], розширений метод скінченних елементів [27], Р-версію методу скінченних елементів з контурними інтегральними підходами [28], а також метод граничних елементів для двовимірних тіл із тріщинами [29]. У роботі [30] метод граничних елементів використовувався для розрахунку КІН у функціонально градієнтних пластинах, що є важливим для аналізу матеріалів із просторово змінними властивостями.

Дослідження процесів поширення тріщин в елементах конструкції з дефектами також є критично важливим аспектом аналізу їх НДС. Двовимірну постановку задачі представлено в роботі [31], а експериментальні дослідження зростання тріщин у балках виконано у [32]. Тривимірний аналіз поширення втомних тріщин у зварних сталевих балках із застосуванням глобально-локального числового методу граничних елементів проведено в [33].

Аналіз літературних джерел свідчить про те, що проблема поширення тріщин у реальних конструкціях потребує подальших розробок і вдосконалення чисельних методів, які продемонструють надійність та ефективність при моделюванні розвитку тріщин у складних умовах.

У роботі [34] розроблено наукові методи, критерії та програмне забезпечення для розрахунку стійкості до крихкого руйнування ракетних конструкцій за наявності мікродефектів, що утворюються при транспортуванні ракети-носія. На основі запропонованого підходу для оцінки НДС циліндричної оболонки з періодичною системою отворів отримано критичні руйнівні навантаження та визначено момент виникнення першої тріщини [35, 36].

Комп'ютерне моделювання також дозволило обрати конструкцію мінімальної товщини, яка витримує задані інтенсивні короткочасні навантаження, що є ключовим для підвищення надійності та безпеки конструкцій в реальних умовах експлуатації.

1.3 Основні співвідношення механіки суцільного середовища та крихкого руйнування

Для визначення НДС пружного тіла використовують систему трьох рівнянь еліптичного типу з частинними похідними другого порядку, відомих як рівняння Ламе:

$$\mu \Delta U_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \vartheta = \operatorname{div} U, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

де $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву;

$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коефіцієнт Ламе;

E – модуль Юнга;

ν – коефіцієнт Пуассона;

U – вектор переміщення.

Введемо диференціальний оператор поверхневого напруження в класичній теорії пружності як:

$$T_n(x)U = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} U + \mu (n \times \operatorname{rot} U), \quad (1.2)$$

де n – одиничний вектор нормалі до розглядуваної поверхні.

Припустимо, що на границі Ω_1 задані кінематичні умови для першої крайової задачі, а на границі Ω_2 задані умови статичного навантаження для другої крайової задачі, причому $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. На поверхнях тріщин зазвичай відомі компоненти нормального та дотичного напруження.

Для визначення вектора U формулюємо наступну крайову задачу для тривимірного тіла, обмеженого областю Ω та ослабленого системою тріщин S_i ,

$i = 1, \dots, n$:

$$\mu \Delta U_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

$$U_i(x) = u_{il}(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (1.4)$$

$$T_n(x)U(x) = X(x), \quad x \in \Omega_2, \quad (1.5)$$

$$(T_n(x)u(x) \cdot n(x)) = N_{3i}, \quad (1.6)$$

$$(T_n(x)u(x) \cdot \tau_k(x)) = N_{ki}, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (1.7)$$

Розглянемо крайову задачу (1.3)-(1.7) і запишемо розв'язок у вигляді:

$$U(x) = u_0(x) + u(x),$$

де $u_0(x)$ – це переміщення, які виникли б у твердому тілі без тріщин за однакових поверхневих навантажень. Вони визначаються наступним чином:

$$\mu \Delta u_j^0 + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0, \quad (1.8)$$

$$u_j^0(x) = u_{il}(x), \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega_1, \quad (1.9)$$

$$T_n(x)u_0(x) = X(x), \quad x \in \Omega_2. \quad (1.10)$$

Розв'язок крайової задачі (1.8)-(1.10) можна знайти різними чисельними методами. Серед них варто відзначити метод скінченних елементів (МСЕ) [11] та метод граничних елементів (МГЕ) [12], обидва засновані на використанні методу зважених нев'язок. Невідомі представлені у вигляді рядів на основі скінченних функцій $\{\psi_n\}_{n=1}^{N_1}$, а для тестових функцій використовується той самий базис.

Спочатку розглянемо скінченно-елементне формулювання. Апроксимація

переміщень застосовується у вигляді:

$$u_0 = \{N_u\} \{u_s\}, \quad (1.11)$$

де $\{N_u\}$ та $\{u_s\}$ – функції форми для переміщень і вузлових значень невідомих. Після інтегрування рівнянь і зведення частини об'ємних інтегралів до поверхневих отримуємо скінченно-елементну постановку задачі (1.8)-(1.10) у вигляді:

$$[K_s] \{u_s\} = \{f_s\}, \quad (1.12)$$

де $[K_s]$ – це матриця жорсткості;

$\{f_s\}$ – відомий вектор.

Суттєвою особливістю методу граничних елементів (МГЕ) є використання сингулярних тестових функцій, які задовольняють диференціальне рівняння (1.1) всюди, окрім однієї особливої точки. Для цього як тестові функції використовуються фундаментальний і сингулярний розв'язки рівняння (1.1). Фундаментальний розв'язок пружності отримують з розгляду рівняння (1.1) з правою частиною як дельта-функцією, і він подається у наступній матричній формі:

$$\Gamma_{ij}(x-y) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \delta_{ij} \frac{1}{|x-y|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^3} \right], \quad (1.13)$$

яка називається матрицею Кельвіна-Соміляни. Ця матриця є симетричною, і кожен її стовпець і рядок задовольняють рівнянням статки переміщень (1.1) у довільній точці $x \in E^3$, за винятком випадку, коли $x = y$.

З використанням фундаментального розв'язку (1.13) та диференціального оператора для поверхневої напруги (1.2), сингулярний розв'язок рівнянь (1.1) визначається як:

$$T_n(\partial_{x,n}(x))\Gamma(x-y) = \Gamma_1(x-y), \quad \Gamma_2(x-y) = [T_n(\partial_{y,n}(y))\Gamma(y-x)]. \quad (1.14)$$

Таким чином, $u_0(x)$ можна зобразити як узагальнений потенціал простого шару на поверхні Ω :

$$u_0(x) = \iint_{\Omega} \Gamma(x-y)p_0(y)d\Omega_y, \quad (1.15)$$

де $p_0(y)$ – невідомий вектор густини.

Вектор-функція $u_0(x)$ задовольняє рівнянням Ламе при довільній густині $p_0(y)$, яка є інтегрованою на Ω .

Підставивши вираз (1.15) у граничні умови (1.8)-(1.10), отримуємо систему інтегральних рівнянь:

$$\iint_{\Omega} \Gamma(x-y)p_0(y)d\Omega_y = u_l(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (1.16)$$

$$p_0(x) + \iint_{\Omega} \Gamma_1(x-y)p_0(y)d\Omega_y = X(x), \quad x \in \Omega_2. \quad (1.17)$$

Розглянемо визначення переміщень $u(x)$, трактуючи їх як суму узагальнених пружних потенціалів простого і подвійного шарів. Потенціал подвійного шару розподіляється по поверхнях тріщин S_i , $i = 1, \dots, n$, тоді як потенціал простого шару прикладається до межі поверхні тіла Ω . Отже,

$$u(x) = \iint_S \Gamma_2(x-y)\alpha(y)dS_y + \iint_{\Omega} \Gamma(x-y)p(y)d\Omega_y. \quad (1.18)$$

Завдяки властивостям потенціалів простого і подвійного шарів, вектор-функція $u(x)$ задовольняє рівнянням (1.1). Розглядаючи граничні умови для визначення функції $u(x)$, приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

1.4 Змістовна та формальна постановка задачі

У цій роботі досліджується проблема визначення граничної кількості циклів навантажень на елементи конструкцій ракетної техніки під час транспортування, що є необхідним для забезпечення їхньої надійності та довговічності. В умовах транспортування конструкційні елементи ракет зазнають різних видів циклічних навантажень, таких як вібраційні та ударні, які можуть сприяти утворенню і зростанню мікрodefektів у матеріалах. Ці дефекти з часом накопичуються, призводячи до деградації матеріалу, що в подальшому може викликати руйнування відповідних елементів, ставлячи під загрозу безпечну експлуатацію ракетної техніки.

Основна задача роботи полягає в створенні комп'ютерної моделі, здатної прогнозувати поведінку елементів конструкцій при впливі циклічних навантажень і визначати граничну кількість таких циклів, після якої виникає ризик критичного руйнування. Така модель дозволяє заздалегідь оцінювати стан конструкційних елементів і своєчасно вживати заходів для попередження аварійних ситуацій. Для цього у роботі застосовуються сучасні методи чисельного моделювання, які дозволяють максимально точно відтворити процеси утворення та зростання мікрodefektів, що зумовлюються багаторазовими навантаженнями на матеріали конструкцій.

Засновуючись на цих ідеях, у роботі використовується метод потенціалу, що дає можливість звести задачу до граничних інтегральних рівнянь, які є зручними для моделювання процесів НДС в елементах конструкцій. Для чисельного розв'язання цих рівнянь застосовуються різні модифікації методу граничних елементів та проєкційні методи, що дозволяє підвищити точність отриманих результатів та зробити розрахунки більш ефективними. Використання методу граничних елементів є доцільним, оскільки він забезпечує локалізацію обчислень у зонах, де спостерігається підвищена концентрація напружень.

Після дослідження статичного та динамічного НДС та визначення частот вільних коливань конструкцій за допомогою експериментальних методів або

числових методів скінченних та граничних елементів з'ясовуються зони найбільшої концентрації напружень у конструктивному елементі. Ці зони зазвичай розташовуються поблизу отворів, границь елементів, місць розташування зварних швів. Саме в цих зонах розташовуються модельні тріщини або ланцюжки тріщин, які моделюють пошкодження, що можуть виникнути в результаті циклічних навантажень. Далі розглядається задача визначення кількості циклів, які витримує елемент конструкції до руйнування згідно з обраним критерієм, в цьому дослідженні використано критерій Періса.

Для визначення критичної кількості циклів до руйнування використано залежність Періса

$$\frac{dl}{dN} = \begin{cases} 10^{-20}, & \Delta K < \Delta K_{th}, \\ C(\Delta K)^m, & \Delta K_{th} < \Delta K < K_{IC}, \\ 10^3, & \Delta K > K_{IC}, \end{cases}$$

де l – характерний розмір дефекту;

N – критична кількість циклів;

ΔK_{th} – порогове значення коефіцієнту інтенсивності напружень;

K_{IC} – критичне значення КІН;

K_{max} , K_{min} – максимальний та мінімальний КІН за один цикл навантаження;

m – показник ступеня кривої втоми;

C – характерна стала кривої втоми.

Вважаємо, що навантаження в циклі задовольняють співвідношенню

$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1$. Тоді $\Delta K = K_{max} - K_{min} = 2K_{max}$. Число циклів до руйнування визначе-

но шляхом інтегрування залежності Періса:

$$dN = \frac{1}{C} (\Delta K)^{-m} dl, \quad \Delta K_{th} < \Delta K < K_{IC}.$$

Зауважимо, що при $\Delta K < \Delta K_{th}$ тріщини не розвиваються, а при $\Delta K > K_{IC}$ відбувається лавиноподібне розвинення тріщини, що веде до руйнування елемента конструкції.

Таким чином, формула для обчислення критичного числа циклів має вигляд:

$$N = \frac{1}{C} \int_{l_0}^{l_1} (\Delta K)^{-m} dl, \quad \Delta K = 2K_{max}.$$

1.5 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є комп'ютерне моделювання визначення граничної кількості циклів навантажень на елементи конструкцій ракетної техніки під час транспортування, що дозволить підвищити їхню надійність та безпеку.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд та аналіз сучасного стану досліджень у галузі комп'ютерного моделювання процесів руйнування конструкційних елементів ракетної техніки;
- ознайомитися з методами визначення зон найбільшої концентрації напружень у конструкціях, які використовуються в ракетній техніці, зокрема поблизу отворів, зварних швів та границь елементів;
- розробити базу модельних мікрodefektів, що відображають характерні види пошкоджень, які можуть утворюватися в умовах циклічного навантаження;
- застосувати метод потенціалу та модифіковані чисельні методи граничних елементів для розв'язання граничних інтегральних рівнянь, що описують НДС елементів;
- розробити програму для моделювання та аналізу тріщин у конструкціях при транспортуванні;

- провести моделювання появи тріщини та її зростання до неприпустимих розмірів;
- проаналізувати отримані результати та визначити граничну кількість навантажень для різних типів дефектів;
- визначити кількість циклів навантаження, яку витримує елемент конструкції до руйнування, відповідно до критерію Періса, та оцінити надійність конструкційних елементів під час транспортування.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод визначення зон найбільшої концентрації напружень в елементах ракетної техніки

На основі наявних експериментальних і теоретичних даних запропоновано наступну методичку оцінки довговічності конструкційних елементів. На початковому етапі здійснюється аналіз статичного та динамічного НДС, а також визначаються частоти власних коливань конструкції за допомогою експериментальних або чисельних методів [16–18]. Ці дослідження дозволяють виявити небажані частоти коливань під час транспортування, а також зони найбільшої концентрації напружень у конструкційних елементах. Як правило, такі зони розташовуються поблизу отворів, границь елементів і місць розміщення зварних швів.

Після проведеного аналізу вибираються модельні тріщини, які розміщуються у зонах максимальної концентрації напружень, як показано на рисунку 2.1.

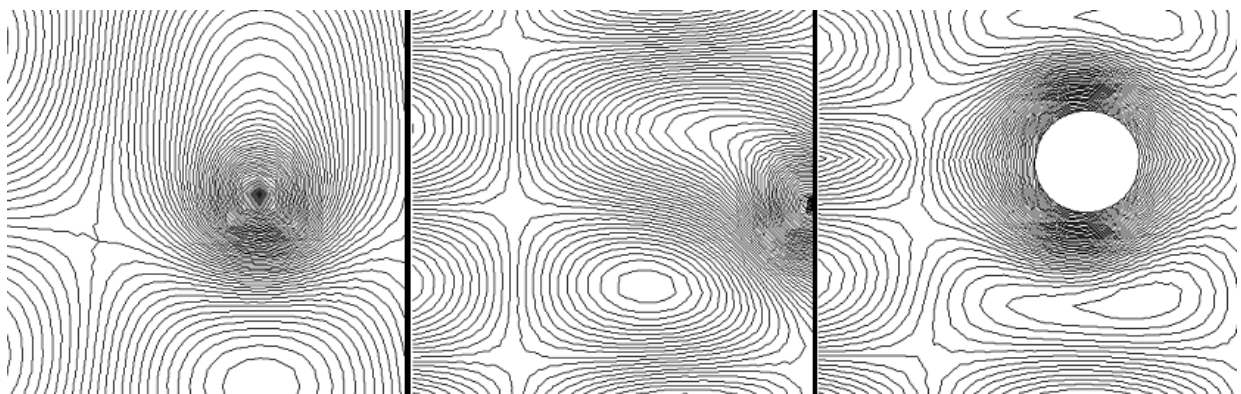


Рисунок 2.1 – Зони найбільшої концентрації напружень

Подальший етап включає застосування відомого підходу [19], суть якого полягає у наступному: спочатку аналізується НДС елемента конструкції без тріщин під дією заданого навантаження, при цьому виникає напруження σ в околицях модельної тріщини, далі припускають, що на берегах розрізів діють

певні задані навантаження, які дорівнюють $-\sigma$, при цьому контур елемента залишається вільним від навантажень. Це дозволяє визначити НДС елемента з тріщиною. Таким чином, НДС елемента конструкції з тріщиною під дією заданого навантаження отримується як сума рішень двох вищеописаних задач.

2.2 Методи побудови бази модельних мікродефектів

Після проведеного аналізу НДС конструкційних елементів обираються модельні тріщини, які розташовують у зонах найбільшої концентрації напружень, які зображено на рисунку 2.2.

Зазначимо, що в зонах, де розташовані зварні шви на рисунку 2.2 (г), наведено модельний ланцюг тріщин, зображений на рисунку 2.2 (е).

Нехай модельна тріщина проходить вздовж контуру L_0 . Позначимо як $(K_i L_i) \dots, i = 1, 2, \dots$ контури отворів всередині елемента конструкції, зображених на рисунках 2.2 (г, д), або границю елемента, на яку виходить тріщина, зображена на рисунку 2.2 (б). Для опису переміщень пружного тіла з використанням інтегральних зображень [19, 20] на контурі L_0 будемо вважати невідомими густини α_1, α_2 , а на контурах $L_i, i = 1, 2, \dots, K$ – густини $\beta_i, \gamma_i, i = 1, 2, \dots, K$.

Позначимо також компоненти одиничної (зовнішньої) нормалі до відповідних контурів як $(n_{j1}, n_{j2}), j = 0, 1, 2, \dots, K$. Припустимо, що елемент конструкції знаходиться під дією заданих зовнішніх навантажень S_{11}, S_{12}, S_{22} . У [19, 20] показано, що невідомі функції α_1, α_2 та $\beta_i, \gamma_i, i = 1, 2, \dots, K$ можна визначити з наступної системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь:

$$M \left\{ \int_{L_0} \frac{\alpha_1(\xi_0) dL_0}{(\xi_0 - x_j)^2} + \sum_{i=1}^K \int_{L_i} [P_1(\xi_i, x_j) \beta_i(\xi_i) + Q_1(\xi_i, x_j) \gamma_i(\xi_i)] dL_i \right\} = n_1^j S_{11} + n_2^j S_{12}, \quad (2.1)$$

$$M \left\{ \int_{L_0} \frac{\alpha_2(\xi_0) dL_0}{(\xi_0 - x_j)^2} + \sum_{i=1}^K \int_{L_i} [P_2(\xi_i, x_j) \beta_i(\xi_i) + Q_2(\xi_i, x_j) \gamma_i(\xi_i)] dL_i \right\} = n_1^j S_{12} + n_2^j S_{22}, \quad (2.2)$$

де $j = 0, 1, 2, \dots, K$;

$$M = \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)};$$

λ і μ – параметри Ламе.

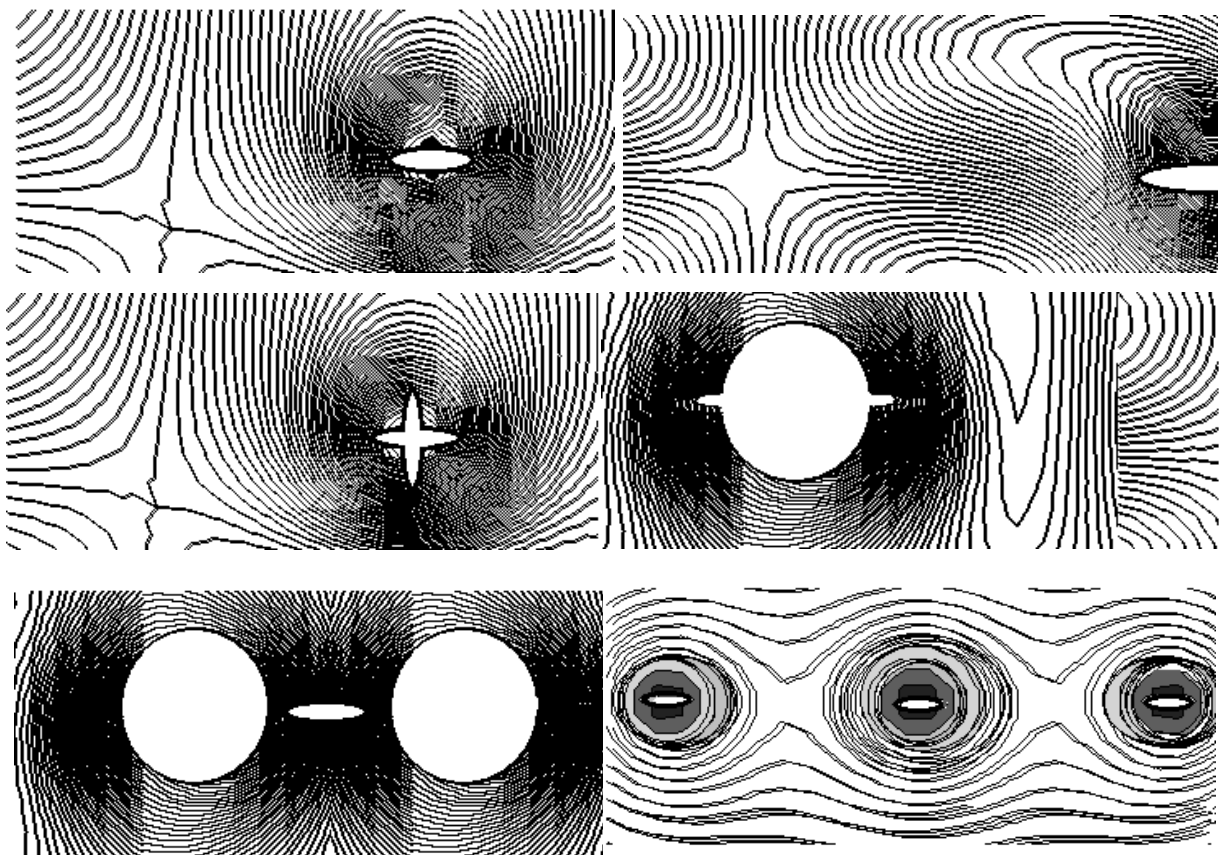


Рисунок 2.2 – Модельні тріщини в зонах найбільшої концентрації

напружень: а) – ізольована тріщина в пружній площині;

б) – тріщина, що виходить на межу півплощини;

в) – хрестоподібна тріщина; г) – дві симетричні тріщини;

д) – тріщина між двома отворами;

е) – ланцюг тріщин у зоні зварного шва

Таким чином, ми маємо систему $2K + 2$ інтегральних рівнянь для $2K + 2$ невідомих функцій $\alpha_1, \alpha_2, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2, \dots, K$. Зауважимо, що перші доданки в інтегральних рівняннях цієї системи є гіперсингулярними складовими [19], а ядра $P_{i,j}^{(1)}(x, \xi), Q_{i,j}^{(1)}(x, \xi), P_{i,j}^{(2)}(x, \xi), Q_{i,j}^{(2)}(x, \xi)$ мають логарифмічні особливості або особливості типу Коші у випадку збігу точок ξ_j та x_j . Числове розв'язання системи (2.1) здійснюється методом граничних елементів [19, 21].

Для коефіцієнтів інтенсивності напружень маємо наступні вирази:

$$k_1 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} (n_1^0 S_{12} + n_2^0 S_{22}) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(x)}{\sqrt{r}}, \quad (2.3)$$

$$k_2 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} (n_1^0 S_{11} + n_2^0 S_{12}) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\sqrt{r}}, \quad (2.4)$$

де r – відстань між вершиною тріщини та точкою спостереження;

G – модуль зсуву;

ν – коефіцієнт Пуассона.

Досліджується розвиток прямолінійних тріщин, розташованих перпендикулярно до напрямку навантаження. У цьому випадку буде ненульовим лише коефіцієнт k_1 . Для визначення довжини l_0 , з якої починається розвиток тріщини, використовується співвідношення:

$$\Delta K = K_{th}, \quad (2.5)$$

де K_{th} – порогове значення коефіцієнта інтенсивності напружень.

За критерієм Періса тріщина стабільна, якщо:

$$\Delta K < \Delta K_{th},$$

де ΔK – амплітуда коефіцієнта інтенсивності напружень;

ΔK_{th} – порогове значення амплітуди КІН, залежне від властивостей матеріалу.

Тріщини, що мають початковий розмір менший за l_0 , згідно з критерієм Періса, не розвиваються.

Зазначимо, що зазвичай тріщини розміром більше ніж 0,005 м вважаються неприпустимими. Тобто, після проведення планових оглядів, елементи конструкцій з такими тріщинами підлягають ремонту або модернізації [8]. Таким чином, цікаво визначити кількість циклів, за яких тріщина зросте від початкового розміру, обчисленого за формулою (2.5), до кінцевого розміру $l_1 = 0,005$ м. Також зазначимо, що значення ΔK має задовольняти умову:

$$\Delta K < K_{1C}, \quad (2.6)$$

інакше відбудеться лавиноподібне зростання тріщини.

Розглянемо наступні модельні тріщини:

- дефект 1: ізольована тріщина в пружній площині, яка зображена на рисунку 2.2 (а);
- дефект 2: тріщина, що виходить на межу півплощини, і зображена на рисунку 2.2 (б);
- дефект 3: хрестоподібна тріщина, яка зображена на рисунку 2.2 (в);
- дефект 4: дві симетричні тріщини, розташовані біля отвору, і зображені на рисунку 2.2 (г);
- дефект 5: тріщина між двома отворами, яка зображена на рисунку 2.2 (д);
- дефект 6: ланцюг тріщин у зоні зварного шва, який зображен на рисунку 2.2 (е).

Наведемо сингулярні інтегральні рівняння для визначення невідомих густин α_1 , α_2 .

Для ізольованої тріщини довжиною $2l$, зображеного на рисунку 2.2 (а),

маємо таку систему гіперсингулярних рівнянь [20]:

$$M \int_{-l}^l \frac{\alpha_1(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi = S_{12}, \quad M \int_{-l}^l \frac{\alpha_2(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi = S_{22}, \quad (2.7)$$

Для тріщини, перпендикулярної до межі півплощини, що зображено на рисунку 2.2 (б), отримано гіперсингулярне інтегральне рівняння у вигляді:

$$\int_a^b \alpha_2(\xi) \left[-\frac{1}{(\xi-x)^2} + \frac{1}{(\xi+x)^2} - \frac{12\xi}{(\xi-x)^3} + \frac{12\xi^2}{(\xi-x)^4} \right] d\xi = p(x), \quad p(x) = \frac{S_{22}}{M}. \quad (2.8)$$

Задача визначення концентрації напружень в елементі конструкції з технологічним отвором радіуса R та двома симетричними тріщинами довжиною l , які виходять на межу отвору, зводиться до розв'язання сингулярного рівняння [19]:

$$\int_0^l K(x, \xi) \alpha_2(\xi) d\xi = \pi S_{22}, \quad (2.9)$$

де $K(x, \xi) = P(x, \xi) + S(x, \xi)$:

$$\begin{aligned} P(x, \xi) &= \frac{1}{x-\xi} + \frac{\lambda}{1+\lambda\xi} + \frac{2(\xi^2 + 4x\xi - x^2) + 2\lambda\xi(\xi^2 + 9x\xi + 6x^2)}{2(1+\lambda\xi)^2(1+\lambda x)(x+\xi+\lambda x\xi)^3} + \\ &+ \frac{2\lambda^2 x\xi(4\xi^2 + 12x\xi + 3x^2) + 9\lambda^3 x^2\xi^2(\xi+x) + 3\lambda^4 x^3\xi^3}{2(1+\lambda\xi)^2(1+\lambda x)(x+\xi+\lambda x\xi)^3}; \\ S(x, \xi) &= \frac{\lambda}{2(1+\lambda\xi)} + \frac{\lambda[3x^2 - 2x\xi - \xi^2 + \lambda(x^3 - x^2\xi - 7x\xi^2 - \xi^3)]}{2(1+\lambda\xi)^2(1+\lambda x)(x+\xi+\lambda\xi)^2} - \\ &- \frac{\lambda[\lambda^2 x\xi(3\xi^2 + 8x\xi + x^2) + 3\lambda^3 x^2\xi^2(\xi+x) + \lambda^4 x^3\xi^3]}{2(1+\lambda\xi)^2(1+\lambda x)(x+\xi+\lambda\xi)^2}. \end{aligned}$$

Висновки за розділом 2

У другому розділі кваліфікаційної роботи було проведено дослідження методів визначення зон найбільшої концентрації напружень у конструкційних елементах ракетної техніки. На основі експериментальних та теоретичних даних запропоновано методику оцінки довговічності конструкцій, яка включає аналіз статичного та динамічного напружено-деформованого стану та визначення частот власних коливань конструкцій. Проведено ідентифікацію зон з максимальною концентрацією напружень, що зазвичай локалізуються поблизу отворів, границь елементів або зварних швів.

Дослідження включали вибір модельних тріщин, розміщених у критичних зонах напружень, а також аналіз їх впливу на НДС конструкцій. Для моделювання тріщин застосовано інтегральні рівняння, що дозволяють визначити густини напружень на їхніх берегах. Особливу увагу приділено моделюванню тріщин різної конфігурації, включно з ізольованими дефектами, тріщинами поблизу меж півплощини, хрестоподібними тріщинами, дефектами біля отворів та ланцюгами тріщин у зонах зварних швів.

Досліджено методику чисельного розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь для аналізу тріщин різних типів. Наведено критерії стабільності тріщин на основі значень коефіцієнтів інтенсивності напружень, що дозволяє оцінювати умови їхнього розвитку чи стабільності. Визначено критичні розміри тріщин і кількість циклів до їхнього зростання до неприпустимих розмірів.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Платформа ANSYS та мова програмування Python

ANSYS – це програмна платформа для чисельного аналізу в галузях інженерії та науки, яка забезпечує моделювання складних фізичних явищ, таких як механічні напруження, теплові процеси, електромагнітні поля, аеродинаміка, гідродинаміка тощо [37]. Вона широко застосовується у машинобудуванні, авіації, будівництві, енергетиці, біомедицині та інших сферах, де необхідно аналізувати поведінку фізичних систем під впливом різноманітних факторів.

Основою ANSYS є метод скінченних елементів, який дозволяє розділяти складну систему на простіші елементи та аналізувати її поведінку під навантаженнями. Програма підтримує широкий спектр типів елементів, включаючи 1D балки, 2D пластини, 3D тверді тіла, оболонки та композитні матеріали. Ця універсальність дає змогу вирішувати завдання з аналізу напружень, деформацій, втрати міцності, теплопередачі, а також аналізувати розподіл потоків у рідинах і газах.

Однією з ключових можливостей ANSYS є мультифізичне моделювання, яке дозволяє інтегрувати кілька фізичних явищ у межах одного аналізу. Програма також підтримує розширену базу матеріалів із заданими механічними, термічними та електромагнітними властивостями, що дозволяє моделювати реальні умови експлуатації. Крім того, користувачі можуть додавати власні матеріали, включаючи нелінійні, анізотропні та залежні від часу.

Функціональність ANSYS включає у себе аналіз механіки руйнування, моделювання тріщин і оцінку їхнього впливу на довговічність конструкцій. Програма дозволяє розраховувати коефіцієнти інтенсивності напружень, прогнозувати розвиток тріщин і їхній вплив на міцність матеріалу. Додатково включено можливість виконувати аналіз втомної міцності, що дозволяє оцінювати довговічність конструкцій під впливом циклічних навантажень.

Python є мовою програмування, що вирізняється простотою синтаксису,

високою продуктивністю і широким спектром застосувань [38]. Однією з головних переваг Python є його багатий екосистемний набір бібліотек, які дозволяють розробникам ефективно вирішувати складні задачі у різних галузях науки та техніки. У рамках цього дослідження Python було обрано як інструмент програмування для чисельних розрахунків з використанням спеціалізованих бібліотек, таких як NumPy та SciPy.

NumPy є бібліотекою для роботи з багатовимірними масивами даних, виконання високопродуктивних операцій лінійної алгебри та реалізації математичних функцій [39]. Її висока ефективність забезпечується використанням оптимізованого коду на низькому рівні, що дозволяє проводити обчислення швидко навіть для великих обсягів даних. У даному дослідженні NumPy використовується для створення та обробки матриць, що є базовими структурами для розв'язання інтегральних рівнянь.

SciPy є ще однією важливою бібліотекою, яка розширює можливості Python у чисельних методах [40]. Вона включає реалізації спеціальних функцій, таких як еліптичні інтеграли, які широко використовуються в теоретичній і прикладній механіці. У цьому дослідженні функції SciPy забезпечують точне й ефективно обчислення значень еліптичних інтегралів першого та другого роду, що є одним із етапів у побудові матриці коефіцієнтів.

Python також підтримує високий рівень гнучкості й модульності. Це дозволило структурувати програму у вигляді незалежних функцій, що спрощує тестування, налагодження та подальше вдосконалення коду.

Вибір Python для цього дослідження також обумовлений його популярністю серед науковців. Python є де-факто стандартом для чисельного моделювання, машинного навчання та обробки даних, що сприяє уніфікації методів і забезпечує можливість легкої інтеграції розроблених моделей у більші системи. Простота синтаксису Python сприяє швидкому впровадженню та адаптації розробок, що є критично важливим у наукових дослідженнях, де інколи необхідно швидко перевіряти нові ідеї та алгоритми.

3.2 Алгоритм визначення КІН за умови появи модельної тріщини в зоні найбільшої концентрації напружень

Невідомі функції α_1 , α_2 визначаються з системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь (2.1) та (2.2). Для визначення КІН використовується наступний алгоритм.

Крок 1. На першому етапі слід задати форму та розміри елемента конструкції, включно з характеристиками тріщин. Необхідно визначити положення тріщин відносно границь елемента, враховуючи їх довжину, орієнтацію та взаємне розташування.

Крок 2. Залежно від розташування тріщини та геометричних особливостей елемента конструкції вибирається відповідна аналітична або наближена формула для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень.

Крок 3. Визначається значення напруження σ , що діє на конструкцію, та інші параметри, такі як радіус кругового отвору R , відстань між центрами отворів d , або кут нахилу тріщини θ , залежно від конкретного випадку.

Крок 4. Для кожного випадку положення тріщини параметр F , що враховує геометричні та механічні особливості конструкції.

Для ізольованої тріщини в нескінченній площині, яку представлено на рисунку 2.2 (а), $F = 1$.

Для тріщини, що виходить на границю області, F залежить від кута нахилу θ , наприклад, для випадку на рисунку 2.2 (б) $F = 1,1215$ для $\theta = 90^\circ$.

Для тріщини на краю кругового отвору F обчислюється за наступною формулою

$$F = \sqrt{\frac{1+0,5\xi}{1+\xi}} \left[1 + \frac{0,2\xi}{(1+\xi)^3} \right] \left[1 + \frac{1}{2\xi^2 + 1,93\xi + 0,539} + \frac{1}{2(1+\xi)} \right], \quad (3.1)$$

$$\text{де } \xi = \frac{l}{R};$$

l – довжина тріщини;

R – радіус кругового отвору.

Для хрестової тріщини, зображеної на рисунку 2.2 (в), $F = 0,8636$.

У разі тріщин між двома круговими отворами з рівними радіусами, на лінії, що з'єднує центри кругів, представлених на рисунку 2.2 (г), параметр F визначається багаточленом

$$F = 1,08899 + 0,4369\xi - 1,77302\xi^2 + 9,21212\xi^3 - 15,8689\xi^4 + 9,48718\xi^5, \quad (3.12)$$

$$\text{де } \xi = \frac{l}{R};$$

$$b = d - 2R;$$

l – половина довжини тріщини;

d – відстань між центрами кругових отворів;

R – радіус кругового отвору.

Для ланцюжка тріщин параметр, представлених на рисунку 2.2 (е),

$$F = \sqrt{\frac{d}{\pi} \tan \frac{\pi l}{d}}, \quad (3.13)$$

де d – відстань між тріщинами;

l – половина довжини тріщини.

Крок 5. Розрахунок коефіцієнта інтенсивності напружень. На основі обраної моделі і значення параметра F коефіцієнт k_1 обчислюється за узагальненою формулою

$$k_1 = F\sigma\sqrt{\pi l}. \quad (3.14)$$

Обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень використовуються для оцінки міцності конструкції, прогнозування поширення тріщин і визначення безпечного рівня навантажень.

3.3 Алгоритм визначення кількості циклів заданого періодичного навантаження на елемент конструкції до підростання модельної тріщини до неприпустимих розмірів при транспортуванні

Припускаємо, що при транспортуванні конструкції відбулося N^* циклів навантаження. Розглянемо відрізок $[\lambda_{th} + \varepsilon, \lambda_{K_{1C}}]$, де λ_{th} є значенням, при якому $\Delta K = \Delta K_{th}$, а $\lambda_{K_{1C}}$ є значенням, при якому $\Delta K = K_{1C}$, ε – точність обчислень.

Розглянемо два можливих формулювання оберненої задачі.

Перше формулювання. Треба знайти розмір λ^* , до якого піросла тріщина під час транспортування. Вважаємо при цьому, що $K_{1C} > \Delta K > \Delta K_{th}$, тобто розвинення тріщини відбувалось.

Розглянемо функцію

$$F(\lambda) = N(\lambda) - N^*, \quad N(\lambda) = \frac{1}{C} \int_{\lambda_{th} + \varepsilon}^{\lambda} (\Delta K - \Delta K_{th})^{-m} dl \quad (3.15)$$

на відрізку $[\lambda_{th} + \varepsilon, \lambda_{K_{1C}}]$.

Маємо $F(\lambda_{th+\varepsilon}) = N(\lambda_{th+\varepsilon}) - N^*, \quad N^* < 0$. Припускаємо, що $N(\lambda_{K_{1C}}) > N^*$.

Тоді

$$F(\lambda_{K_{1C}}) = N(\lambda_{K_{1C}}) - N^* > 0. \quad (3.16)$$

Зауважимо, що

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{C} (\Delta K(\lambda) - \Delta K_{th})^{-m} > 0, \quad (3.17)$$

тобто функція $F(\lambda)$ зростає на $[\lambda_{th} + \varepsilon, \lambda_{K_{1C}}]$.

В цих умовах існує єдиний корінь рівняння $F(\lambda) = 0$ на відрізку $[\lambda_{th} + \varepsilon, \lambda_{K_{1C}}]$, якій і є розміром λ^* . Для числового визначення цього кореню будемо застосовувати метод дихотомії [27].

Друге формулювання. При транспортуванні конструкції відбулось N^* циклів навантаження, за які тріщина підросла максимально допустимого розміру l^* . Треба знайти початковий розмір тріщини.

Розглянемо функцію

$$G(\lambda) = N^* - N(\lambda), \quad N(\lambda) = \frac{1}{C} \int_{\lambda}^{l^*} (\Delta K - \Delta K_{th})^{-m} dl \quad (3.18)$$

на відрізку $[\lambda_{th} + \varepsilon, l^*]$. Функція $G(\lambda)$ є зростаючою на даному відрізку.

Маємо $G(\lambda_{th} + \varepsilon) < 0$ та $G(l^*) < 0$. Тому існує єдиний корінь функції $G(\lambda)$ на відрізку $[\lambda_{th} + \varepsilon, l^*]$. Цей корінь і є початковим розміром тріщини. Для числового визначення кореню будемо застосовувати метод дихотомії [27].

3.4 Опис програми на Python для моделювання появи втомної тріщини

Програмна реалізація роботи була поділена на дві частини, кожна з яких відповідає певному етапу дослідження. На першому етапі було виконано моделювання процесу росту тріщини для визначення кількості циклів, необхідних для зростання тріщини від нульового до її початкового розміру $l_1 = 0,006$ м. Код програми, що реалізує цей розрахунок, наведено у Додатку А. Важливо зазначити, що згідно з [12], дефекти, розміри яких не перевищують зазначеного значення, вважаються допустимими. Програма написана мовою Python із використанням бібліотек NumPy та SciPy для обчислень.

Програма складається з кількох функціональних модулів, кожен з яких виконує окрему частину завдання. В основу покладено ідею дискретизації інтегрального рівняння, побудови матриці коефіцієнтів, а також чисельного розв'язання системи рівнянь для визначення невідомих параметрів. Нижче подано структурований опис ключових частин програми.

Перший модуль програми відповідає за ініціалізацію констант та визначення вузлів і ваг для обчислень методом Гаусса. Функція `gauss_weights_nodes` задає вузли й ваги Гаусса для інтегрування з фіксованою кількістю точок (у цьому випадку шість). Це дозволяє з високою точністю виконувати чисельне інтегрування в локальних координатах.

Другий модуль виконує ініціалізацію матриць для подальших обчислень. Функція `initialize_matrix` створює нульові матриці необхідного розміру для матриці коефіцієнтів та мас. Це забезпечує базову структуру для подальшого заповнення значеннями, обчисленими в процесі дискретизації інтегрального рівняння.

Основним функціональним блоком програми є функція `compute_matrix`, яка виконує чисельне обчислення матриці коефіцієнтів для дискретизованого інтегрального рівняння. Вона реалізує подвійний цикл по вузлах і елементах, що дозволяє послідовно обчислювати кожен елемент матриці. У процесі обчислень використовуються еліптичні інтеграли першого та другого роду, які обчи-

слюються за допомогою функцій `ellipk` і `ellipe` з бібліотеки `SciPy`. Враховано обробку можливих особливостей, таких як ділення на нуль, що забезпечує стабільність алгоритму.

Окремий модуль, представлений функцією `compute_geometry`, визначає геометричні параметри вузлів і елементів. Він реалізує розподіл радіусів та висот вузлів залежно від їхнього індексу. Цей підхід дозволяє адаптивно задавати параметри геометрії залежно від області обчислень, забезпечуючи гнучкість програми.

Ще один допоміжний модуль – функція `gauss_geometry`. Вона задає параметри геометрії вузлів у локальних координатах. Зокрема, функція визначає координати радіусів і висот вузлів, а також коефіцієнти для обчислень. Використання лінійного розподілу значень для цих параметрів дозволяє ефективно задавати початкові умови для обчислень.

Фінальна частина програми є основним блоком, де визначаються вхідні параметри задачі, такі як кількість вузлів, кількість елементів і властивості матеріалів. Після цього викликаються основні функції для побудови матриці коефіцієнтів, а результати виводяться у вигляді матриці.

3.5 Опис програми для моделювання тріщини та визначення граничної кількості циклів до руйнування конструкції

На другому етапі дослідження було зроблено припущення, що тріщина початкового розміру $l_1 = 0,006$ м розташована у найбільш навантаженій зоні реальної конструкції. Ця конструкція транспортується з місця виготовлення до місця старту, що є важливим аспектом аналізу її експлуатаційної надійності. Для оцінки поведінки такої конструкції було проведено моделювання з використанням програмного забезпечення `ANSYS`, відповідний код наведено у Додатку Б.

Програма складається з декількох взаємопов'язаних етапів. Структура програми охоплює створення геометричної моделі, задання матеріальних влас-

тивостей, розрахунок напружено-деформованого стану, оцінку втомного руйнування, а також отримання та обробку результатів.

На першому етапі здійснюється визначення геометричних параметрів моделі. Радіус, довжина та товщина оболонки задаються як базові величини, які масштабуються за допомогою відповідних коефіцієнтів. Особливу увагу приділено параметрам тріщини: її форма, розмір і розташування задаються так, щоб точно відтворити умови експлуатації. Тріщина розміщується в зоні максимальних напружень, що дозволяє дослідити найкритичніші сценарії руйнування. Геометрична модель формується через визначення контрольних точок, ліній і поверхонь, які згодом об'єднуються у тривимірну мережу.

Другий етап пов'язаний із заданням механічних властивостей матеріалу. У моделі враховуються модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона, які визначають пружні характеристики. Також використовуються складніші залежності, які описують нелінійні деформації та зміну механічних характеристик під дією навантажень. Ці властивості є ключовими для правильного моделювання поведінки матеріалу, особливо в області тріщини.

Третій етап включає побудову скінченно-елементної моделі. Використовується тривимірна сітка, створена за допомогою елементів певного типу, зокрема, тетраедричних або шестигранних елементів залежно від складності геометрії. Розмір елементів регулюється, щоб досягти більшої точності в критичних областях, зокрема поблизу вершини тріщини. Для цієї мети застосовуються локальні системи координат, які дозволяють більш точно відтворити напружено-деформований стан у зоні дефекту.

На четвертому етапі виконується розв'язання задачі. Задається прикладене навантаження, яке моделює експлуатаційні умови, наприклад, внутрішній тиск у циліндричній оболонці. У процесі аналізу обчислюються напруження, деформації та інші характеристики, що є необхідними для подальшої оцінки міцності.

П'ятий етап присвячений обчисленню коефіцієнта інтенсивності напружень. Використовуються аналітичні залежності, які враховують геометричні

параметри моделі та механічні властивості матеріалу. Це дозволяє оцінити ступінь концентрації напружень поблизу тріщини та визначити критичні умови для її поширення.

Шостий етап включає виконання втомного аналізу. Для цього враховуються циклічні навантаження, а також характеристики матеріалу, пов'язані з його втомною міцністю, такі як $S-N$ криві. Важливим аспектом цього етапу є визначення еквівалентних змінних напружень, які дозволяють оцінити пошкодження, що накопичується під час циклічного навантаження.

Заключний етап передбачає отримання та обробку результатів. Здійснюється побудова графіків, які ілюструють розподіл напружень, деформацій, пошкоджень та інші ключові параметри. Виконується обчислення інтегралу, який характеризує енергію, необхідну для поширення тріщини. Усі результати зберігаються для подальшого аналізу, візуалізації та документування.

Висновки за розділом 3

У цьому розділі було здійснено аналіз методів моделювання напружено-деформованого стану конструкцій із тріщинами, а також розроблено алгоритми визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень і кількості циклів навантаження до розвитку тріщини до критичних розмірів.

Було розглянуто алгоритм визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень у разі появи модельної тріщини в зоні найбільшої концентрації напружень. На першому етапі аналізу визначаються геометричні характеристики конструкції та тріщини, зокрема її довжина, орієнтація, розташування щодо границь елемента чи інших структурних елементів. Залежно від специфіки задачі обираються відповідні аналітичні або наближені формули для розрахунку КІН, а також параметри, що враховують геометричні та механічні особливості конструкції. Для кожного випадку тріщини було запропоновано конкретні за-

лежності для розрахунку КІН. Було наведено формулу для визначення коефіцієнти напружень для різних типів дефектів.

Було розроблено алгоритм визначення кількості циклів періодичного навантаження, необхідного для зростання тріщини до критичних розмірів. На основі аналізу циклічних напружень та їх впливу на матеріал було розглянуто два можливі сценарії. Перший сценарій передбачав обчислення розміру тріщини після заданої кількості циклів навантаження, а другий – визначення початкового розміру тріщини, яка за певну кількість циклів досягне критичних розмірів. Для цього застосовано чисельні методи, зокрема метод дихотомії, що забезпечує високу точність обчислень навіть за умов нелінійної поведінки матеріалу та складної геометрії конструкцій. Було визначено граничні умови для зростання тріщини, такі як коефіцієнт інтенсивності напружень і його порогове значення.

Крім того було проведено комплексний аналіз методів моделювання та чисельного розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій з урахуванням тріщин і їх впливу на довговічність елементів. Розглянуто використання програмного забезпечення ANSYS для багатофізичних моделювань, зокрема для оцінки напружень, моделювання тріщин і розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень. Особлива увага приділялася моделям, що дозволяють враховувати кілька фізичних явищ одночасно, а також створенню геометричних моделей, визначенню матеріальних характеристик і розрахунку локалізованих напружень у критичних зонах.

У межах дослідження було також розроблено алгоритми на основі мови програмування Python, що використовували спеціалізовані бібліотеки, такі як NumPy та SciPy, для дискретизації інтегральних рівнянь, побудови матриць коефіцієнтів і розв'язання систем рівнянь. Ці алгоритми забезпечили точність обчислень завдяки застосуванню методів Гаусса для інтегрування, використанню еліптичних інтегралів та стабільним чисельним підходам для розв'язання задач механіки руйнування.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Визначення кількості циклів заданого періодичного навантаження на елемент конструкції ракетної техніки до підростання модельної тріщини до неприпустимих розмірів

Числові розв'язки гіперсингулярних рівнянь (2.1) та (2.2) були отримані із використанням 80 граничних елементів, для яких застосовувалася постійна апроксимація густини всередині кожного елемента [21, 22]. Цей підхід забезпечив необхідну точність і стабільність числових обчислень.

На рисунку 4.1 наведено результати порівняння числових та аналітичних розв'язків для гіперсингулярних рівнянь. Зокрема, на рисунку 4.1 (а) зображено розв'язки рівняння (2.7), а на рисунку 4.1 (б) – рівняння (2.8). Суцільними лініями позначені аналітичні розв'язки, тоді як числові результати представлені у вигляді точок.

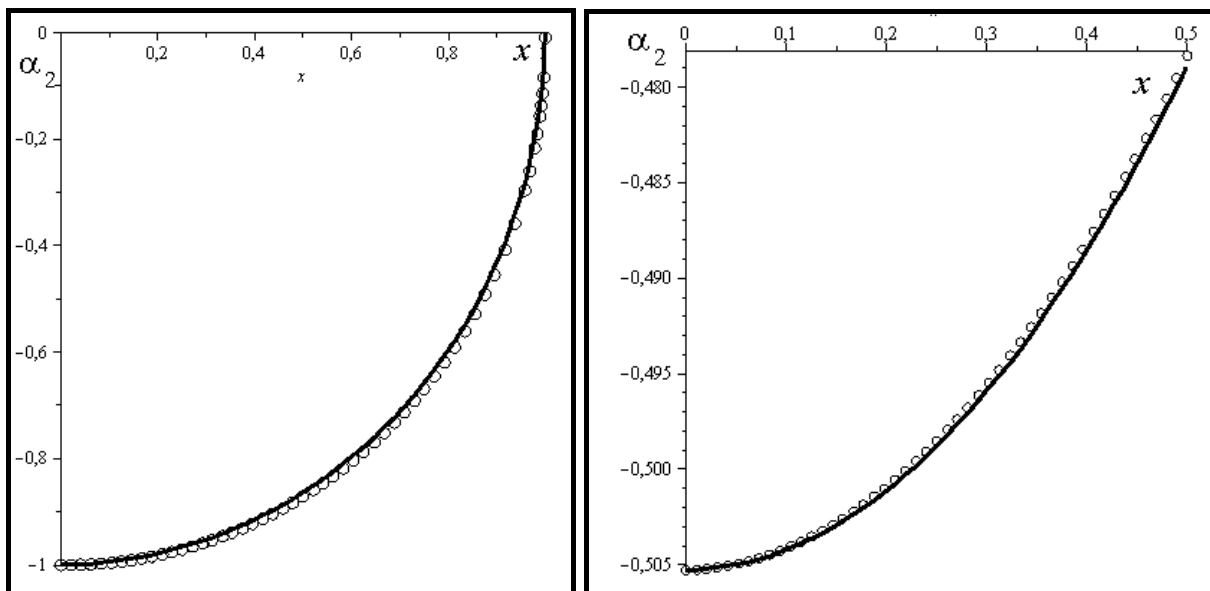


Рисунок 4.1 – Порівняння числових та аналітичних розв'язків:

а) – для рівняння (2.7); б) – для рівняння (2.8)

Проведений аналіз показує, що числові розрахунки узгоджуються з аналітичними розв'язками з високою точністю, яка у процесі обчислень становила $\epsilon = 10^{-3}$. Це свідчить про ефективність обраного методу та його придатність для вирішення подібних задач.

На сьогодні існує велика кількість наближених аналітичних формул для визначення коефіцієнтів « K -тарировки». У межах цього дослідження були відібрані ті аналітичні залежності, які найкраще відповідають числовим даним, отриманим шляхом розв'язання систем гіперсингулярних інтегральних рівнянь (2.1) та (2.2).

На рисунку 4.2 наведено порівняння числових даних (позначені суцільними лініями) та аналітичних результатів (відмічені крапками) для множників « K -тарировки», що відповідають дефектам типу 1-6. Графіки показують високий рівень відповідності між обчисленнями. Числові розрахунки виконувалися із застосуванням 50 граничних елементів на контурі тріщини та 200 граничних елементів на колах.

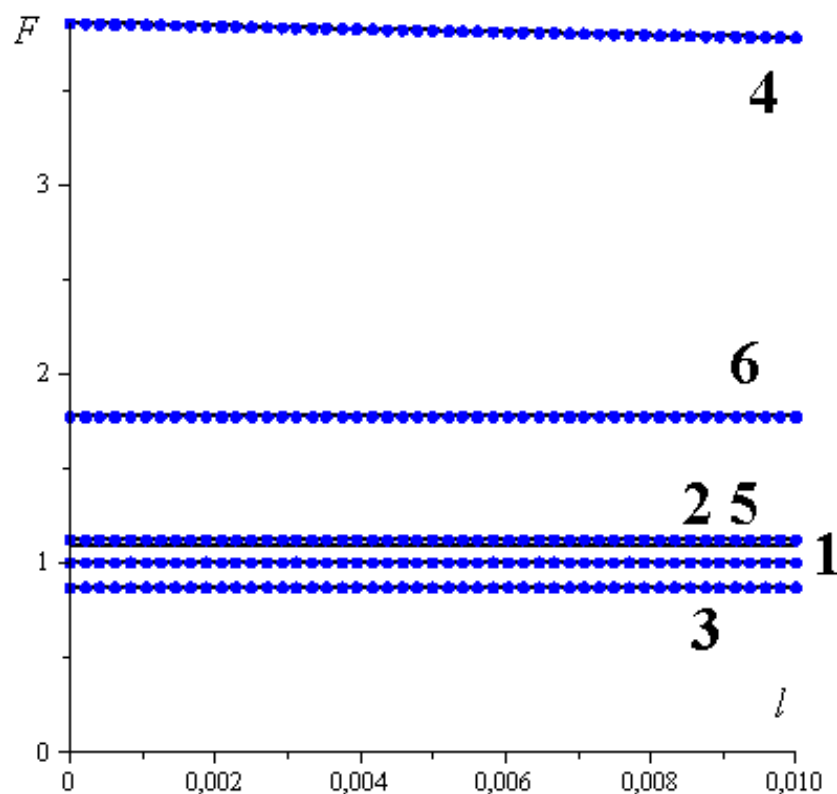


Рисунок 4.2 – Числові та аналітичні значення множників « K -тарировки»

Отримані результати стали основою для вибору цих аналітичних виразів під час побудови бази модельних тріщин. Варто підкреслити, що для тріщин з малими розмірами значення множників « K -тарировки» залишаються майже незмінними по всій довжині тріщини. Це значно спрощує процес аналізу та моделювання.

Для оцінки кількості циклів, необхідних для збільшення тріщин до недопустимих розмірів, використано нормативні документи та експериментальні дані. Відповідно до стандартів [8, 26], допустимі напруження для основного металу становлять $\sigma_0 = 147$ МПа, а для зварного шва – $\sigma_w = 95$ МПа. У цьому дослідженні було прийнято, що $\sigma = \alpha\sigma_0$ для тріщин в основному металі та $\sigma = \alpha\sigma_w$ для тріщин у зоні зварного шва. Розглянуто коефіцієнти навантаження $\alpha = 1$ і $\alpha = 0,1$ для обчислення граничних розмірів тріщин, за яких вони не розвиваються.

Дослідження виконано для матеріалу з такими характеристиками:

- константа кривої втоми $C = 3,2 \cdot 10^{-11}$ МПа·м;
- показник степеня кривої втоми $m = 3,09$;
- критичний коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{IC} = 49$ МПа·м^{0,5};
- порогове значення КІН $\Delta K_{th} = 49$ МПа·м^{0,5}.

Значення K_{IC} та ΔK_{th} були визначені на ВАТ «Турбоатом» за допомогою розрахунково-експериментального методу з урахуванням якості металу [26].

На рисунку 4.3 зображені залежності КІН від довжини тріщини l :

- цифрами «1» позначено залежності при $\alpha = 1$;
- цифрами «2» – при $\alpha = 0,1$;
- цифрами «3» вказано порогові значення ΔK_{th} ;
- цифрами «4» – критичні значення K_{IC} .

На рисунку 4.3 (а) показано КІН для ізольованої тріщини в пружній площині. Рисунок 4.3 (б) демонструє КІН для тріщини в півплощині. Рисунок 4.3 (в) ілюструє зміну КІН для тріщини з дефектом 3, що виходить із кругового

отвору радіусом $R = 0,01$ м, а рисунок 4.3 (г) описує дефект 4. На рисунку 4.3 (д) зображено зміну КІН для тріщини між двома круговими отворами рівних радіусів (дефект 5), де $b = 0,12$ м. Нарешті, рисунок 4.3 (е) демонструє КІН для ланцюжка тріщин (дефект 6). КІН для кожної тріщини розраховано за формулою (3.14), де F визначено для кожного виду дефекту окремо в пункті 3.2.

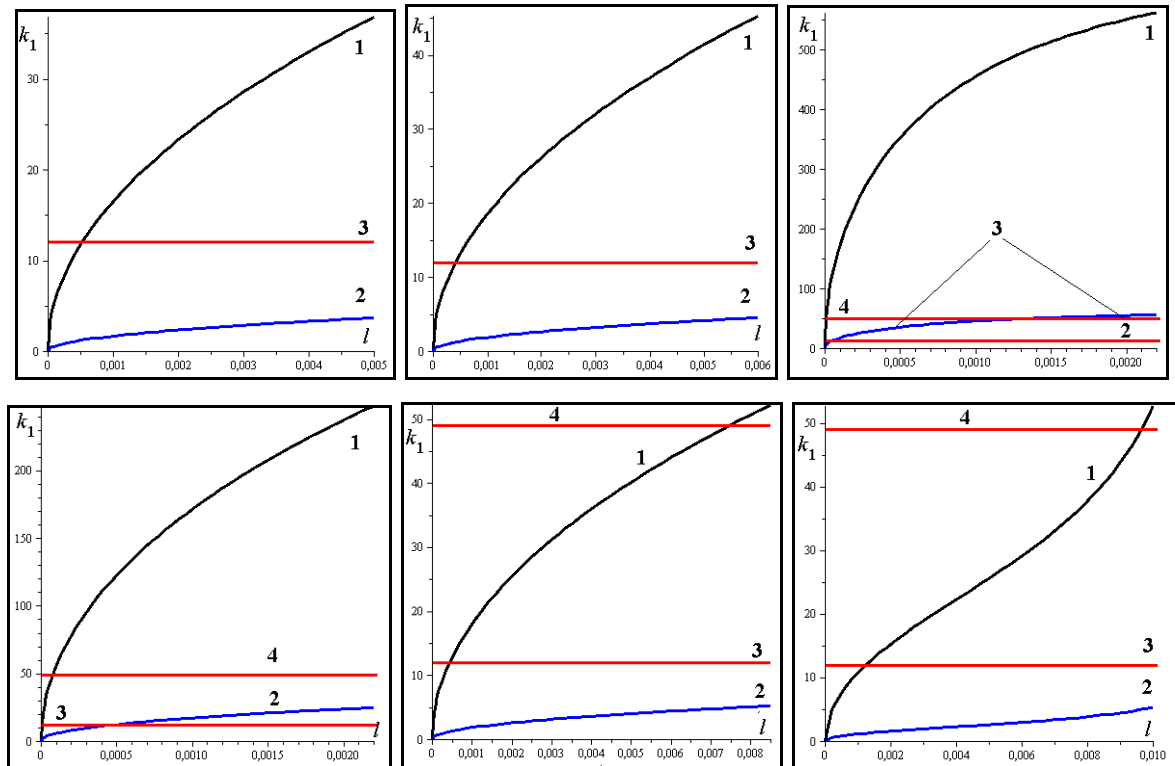


Рисунок 4.3 – Залежності КІН від довжини тріщини l для:

- а) – ізольованої тріщини в пружній площині;
- б) – тріщини, що виходить на межу півплощини;
- в) – хрестоподібної тріщини; г) – двох симетричних тріщин;
- д) – тріщини між двома отворами;
- е) – ланцюга тріщин у зоні зварного шва

Визначимо початкові розміри тріщин для навантажень $\sigma = \sigma_0 = 147$ МПа для основного металу та $\sigma = \sigma_w = 95$ МПа для тріщин, розташованих у зоні зварних швів. Розрахунки показали такі значення:

– $l_0 = 0,0005$ м для ізольованої тріщини в зоні основного металу;

- $l_0 = 0,0012$ м для ланцюжка тріщин у зоні зварного шва;
- $l_0 = 0,0002$ м для тріщин поблизу технологічного отвору в основному металі.

Згідно з критерієм Періса, тріщини, початковий розмір яких менший за ці значення, не розвиваються.

Обчислимо кількість циклів навантаження для кожного із зазначених дефектів, якщо довжина тріщини змінюється від початкового значення l_0 до кінцевого $l_1 = 0,005$ м або до значення, яке є неприпустимим згідно з критерієм $K > K_{IC}$. Результати наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Кількість циклів навантаження

№ дефекту	l_0 , м	l_1 , м	Кількість циклів
1	0,0005	0,005	8485
2	0,0012	0,005	2647
3	0,0002	0,003	413

Для коефіцієнта навантаження $\alpha_0 = 0,1$ (криві 2) встановлено, що для дефектів 1, 2, 5, 6 розвинення тріщин не спостерігається. Ці результати відображені в таблицях 4.2 та 4.3.

Тріщини з розмірами, меншими за $l_1 = 0,006$ м, вважаються допустимими дефектами згідно з нормативами [12]. Частота навантаження становить $\omega = 3,45$ Гц.

Результати, наведені в таблицях 4.2 та 4.3, демонструють, що розвиток тріщин насамперед залежить від рівня прикладеного навантаження. Якщо цей рівень менший за 0,1 від номінального, то розвиток дефектів 1, 2, 5, 6 не спостерігається. Тріщини поблизу технологічних отворів викликають значну концентрацію напружень, що призводить до лавиноподібного руйнування конструкцій.

Таблиця 4.2 – Характеристика руйнування для різних дефектів при $\alpha_0 = 1$

№ дефекту	l_0 , м	l_1 , м	N , цикл	T , год
1	0,00054	0,003	$0,13 \cdot 10^9$	1,266
2	0,00043	0,006	$0,92 \cdot 10^8$	0,848
3	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,75 \cdot 10^{-4}$	67	0
4	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$0,75 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^6$	0
5	0,0005	0,003	$0,26 \cdot 10^7$	0,020
6	0,0012	0,003	$0,94 \cdot 10^8$	0,087

Таблиця 4.3 – Характеристика руйнування для різних дефектів при $\alpha_0 = 0,1$

№ дефекту	l_0 , м	l_1 , м	N , цикл	T , год
1	Тріщини не розвиваються			
2	Тріщини не розвиваються			
3	0,0004	0,0012	850	0
4	0,0006	0,0060	$0,78 \cdot 10^6$	0,007
5	Тріщини не розвиваються			
6	Тріщини не розвиваються			

4.2 Визначення кількості циклів заданого періодичного навантаження на елемент конструкції ракетної техніки до підростання модельної тріщини до неприпустимих розмірів при транспортуванні

Розглянемо розвиток тріщини для дефекту 1. Як свідчать дані таблиць 4.2 та 4.3, розвинення тріщини починається з початкового розміру $\lambda_{th} = 0,00054$ м. Рівень навантаження приймаємо рівним $\sigma_0 = 147$ МПа, а частота навантаження $\omega = 3,45$ Гц. Час транспортування вважався рівним 240 годин, що відповідає кількості циклів $N = 240 \cdot 3600 \cdot 3,45 = 2980800$. Визначимо, до якого розміру збільшилася тріщина, якщо її початковий розмір дорівнював 0,00054 м.

Спочатку обчислимо $\lambda_{K_{1C}}$ за формулою

$$\lambda_{K_{1C}} = \frac{K_{1C}^2}{4\pi\sigma^2}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо $\lambda_{K_{1C}} = 0,0088$ м.

Перше наближення до λ^* , згідно з методом дихотомії, становить

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{th} + \varepsilon + \lambda_{K_{1C}}}{2} = 0,00467 \text{ м.}$$

Відповідна кількість циклів дорівнює $N = 1,373 \cdot 10^8$. Наступне наближення:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_{th} + \varepsilon + \lambda_1}{2} = 0,002605 \text{ м.}$$

Після 40 ітерацій було встановлено, що за 2937183 циклів кінцевий розмір тріщини становив 0,000540102 м. Таким чином, зростання тріщини за таку кількість циклів склало $1,02 \cdot 10^{-7}$ м, що свідчить про практично відсутнє збільшення тріщини.

Для цього дефекту припустимо, що за $2,9 \cdot 10^6$ циклів тріщина збільшилася до розміру $l^* = 0,006$ м. З'ясуємо, з якого початкового розміру почалося розвинення тріщини. Перше наближення обчислюється за формулою

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{th} + \varepsilon + l^*}{2} = 0,00177 \text{ м.}$$

Кількість циклів, необхідна для досягнення цього розміру, становить

$N = 50511$. Після 40 ітерацій встановлено, що розмір $0,006$ м досягається за $5 \cdot 10^6$ циклів, якщо початковий розмір тріщини становив $0,000596$ м.

Таким чином, визначено, що початковий розмір дефекту має суттєве значення для прогнозування критичної кількості циклів. Це свідчить про необхідність врахування точних параметрів початкового стану матеріалу для оцінки довговічності конструкції.

Геометричні параметри паливного бака визначалися на основі тривимірної спрощеної моделі, що являє собою циліндр із двома днищами, кожне з яких складається з двох секторів кола різного радіусу. До конструкції також додано два рівновіддалені від країв циліндричної частини кільця для кріплення. Геометрична модель паливного бака представлена на рисунку 4.4.

Основні геометричні параметри включають:

- діаметр циліндричної частини $D = 1342$ мм;
- довжина циліндричної частини $l = 4540$ мм;
- діаметр меншого сектора $r_1 = 500$ мм;
- діаметр більшого сектора $r_2 = 1700$ мм;
- товщина стінки бака $h = 1,5$ мм;
- загальна довжина моделі $L = 5384$ мм;
- кільця мають прямокутний переріз розміром 150×30 мм.

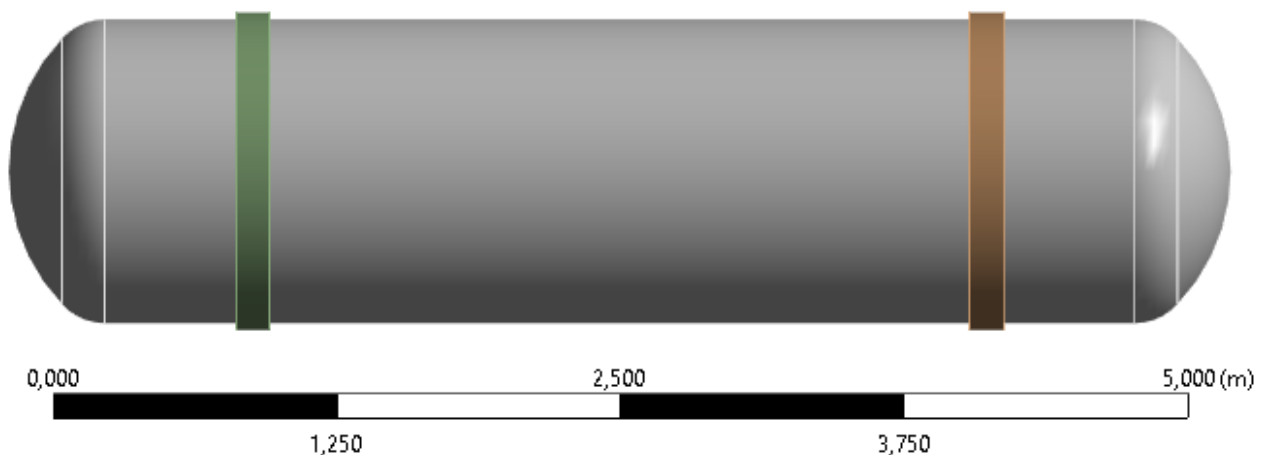


Рисунок 4.4 – Геометрична модель паливного бака

Фізичні параметри визначені для матеріалу бака та заповнювача. Матеріал бака – алюмінієвий сплав АМгб, який характеризується такими властивостями:

- густина матеріалу $\rho_s = 2640 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- модуль Юнга $E = 71 \text{ ГПа}$;
- коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$;
- межа плинності $\sigma_T = 280 \text{ МПа}$;
- межа міцності $\sigma_B = 310 \text{ МПа}$.

Як заповнювач обрано азотну кислоту HNO_3 із густиною $\rho_l = 1513 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Вважалось, що бак розташований горизонтально і повністю заповнений окислювачем для ракетного палива. Рух бака до місця старту відбувається автомобільним або залізничним транспортом. Відсутність вільної поверхні заповнювача дозволяє виключити вплив плескання на виникнення додаткових навантажень. Оскільки бак є крихким, його необхідно закріпити за допомогою двох потужних кілець, виготовлених із того ж матеріалу, що й бак, які жорстко зафіксовані по контуру.

У стаціонарному стані бак зазнає навантажень, зумовлених виключно земною гравітацією. Ці навантаження виникають через вагу самого бака і рідини, що знаходиться в ньому. Прискорення земного тяжіння дорівнює $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, що відповідає тиску $9,81 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

У процесі транспортування на бак діють нестационарні циклічні навантаження, пов'язані зі швидкістю руху та якістю дорожнього або залізничного полотна. Розподіл навантажень має вигляд випадкового процесу, зображеного на рисунку 4.5 (а). Однак цей розподіл може бути отриманий лише експериментально. Через недоступність експериментальних даних було використано стаціонарний циклічний розподіл як спрощену модель, зображену на рисунку 4.5 (б).

Для визначення напружено-деформованого стану паливного бака спочатку виконано розрахунок розподілу напружень для конструкції без дефектів. Модель побудована на основі тетрадральної скінченно-елементної сітки, яка включає 460 тисяч елементів. Зображення такої моделі наведено на рисунку 4.6. Результати моделювання показали розподіл еквівалентних напружень, максимальне значення яких становило 19,2 МПа. Цей максимум спостерігається в зоні перегину конструкції, тоді як мінімальні значення очікувано локалізуються в областях кілець закріплення бака. Візуалізацію результатів наведено на рисунку 4.7.

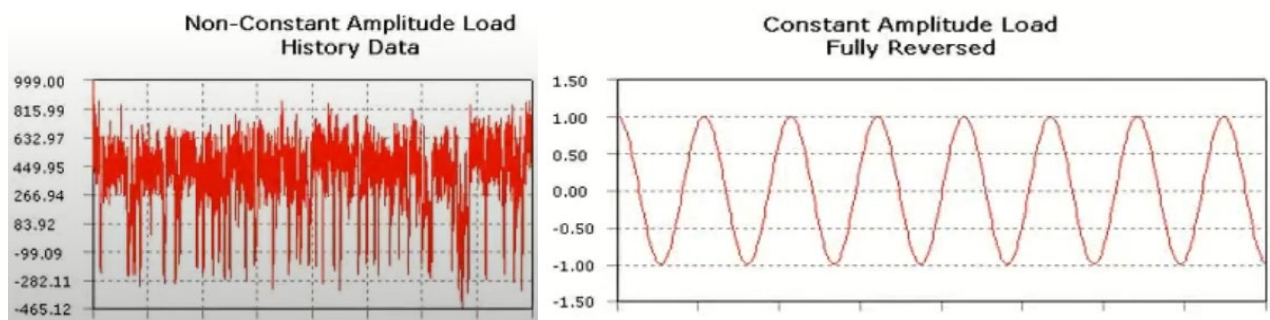


Рисунок 4.5 – Види розподілу циклічних навантажень:

а) – зі змінною амплітудою; б) – із постійною амплітудою

Максимальні напруження в конструкції значно нижчі за межу плинності матеріалу, що свідчить про достатній запас міцності бака і дозволяє прогнозувати тривалий термін експлуатації. Втомний аналіз із циклічним навантаженням амплітудою від -1 до 1 показав, що конструкція здатна витримувати більше 10^8 циклів, що забезпечує можливість безпечного транспортування на великі відстані.

Розглянуто розрахунок міцності паливного бака першого ступеня ракетноносія за наявності дефекту в процесі транспортування. Як показали результати попередніх розрахунків, конструкція без дефектів має достатню міцність і довговічність. Проте, у більшості випадків конструкції містять зварні шви, які за певних умов можуть бути навіть міцнішими за основний матеріал. Виникає необхідність дослідити вплив дефекту, наприклад, тріщини, у поперечному звар-

ному шві, розташованому в зоні максимальних напружень.

У межах існуючої скінченно-елементної моделі в область найбільшого напруження була введена напівеліптична тріщина з розмірами радіусів $a = 3$ мм і $b = 0,3$ мм, розташована вздовж твірної оболонки бака. На рисунках 4.8-4.10 представлено вигляд тріщини на моделі поливного бака.

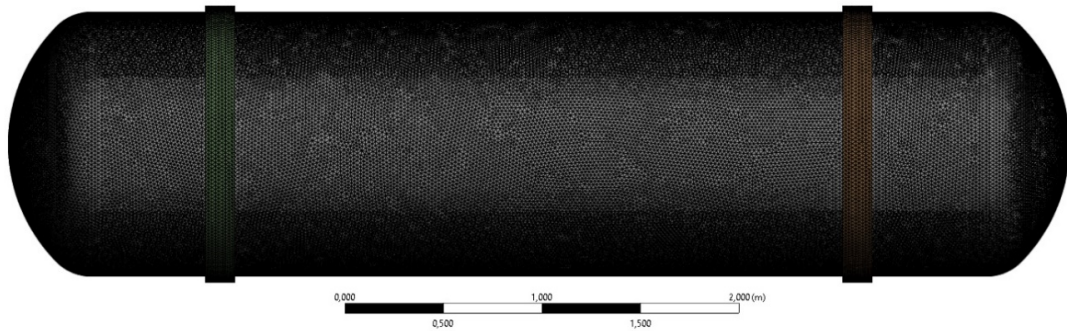


Рисунок 4.6 – Скінченно-елементна модель

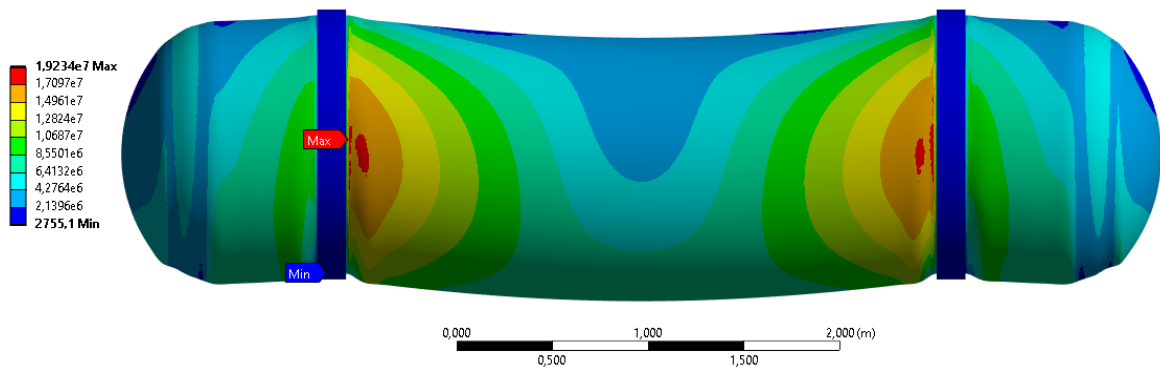


Рисунок 4.7 – Розподіл еквівалентних напружень

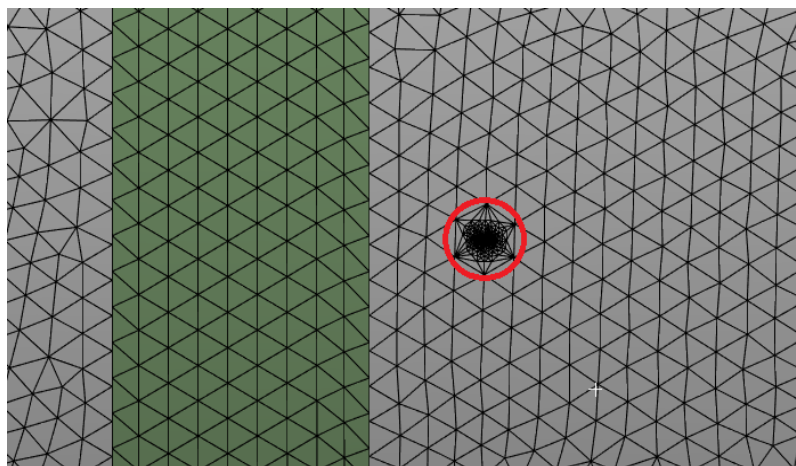


Рисунок 4.8 – Локалізація тріщини на скінченно-елементній сітці

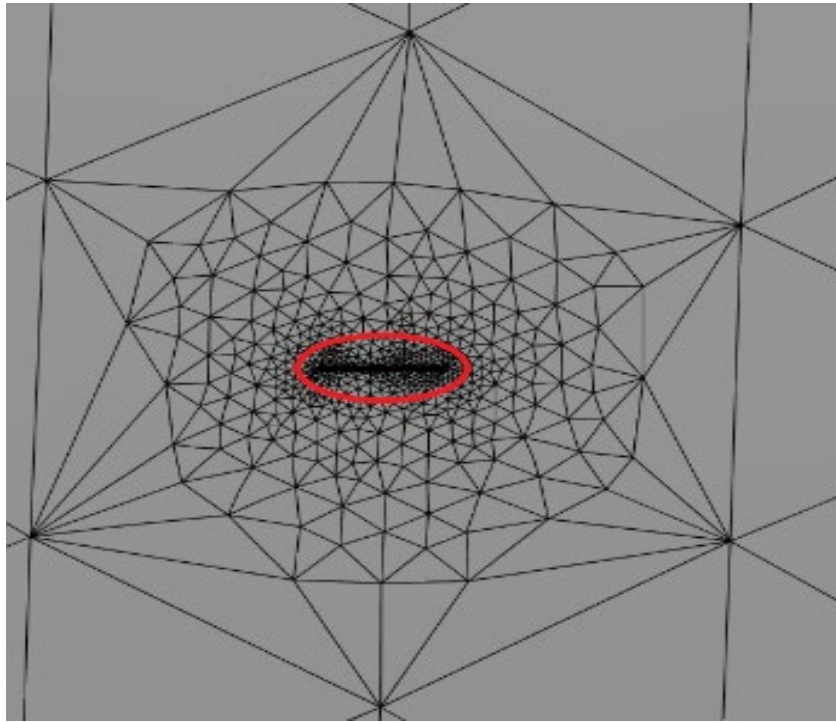


Рисунок 4.9 – Збільшений вигляд області тріщини

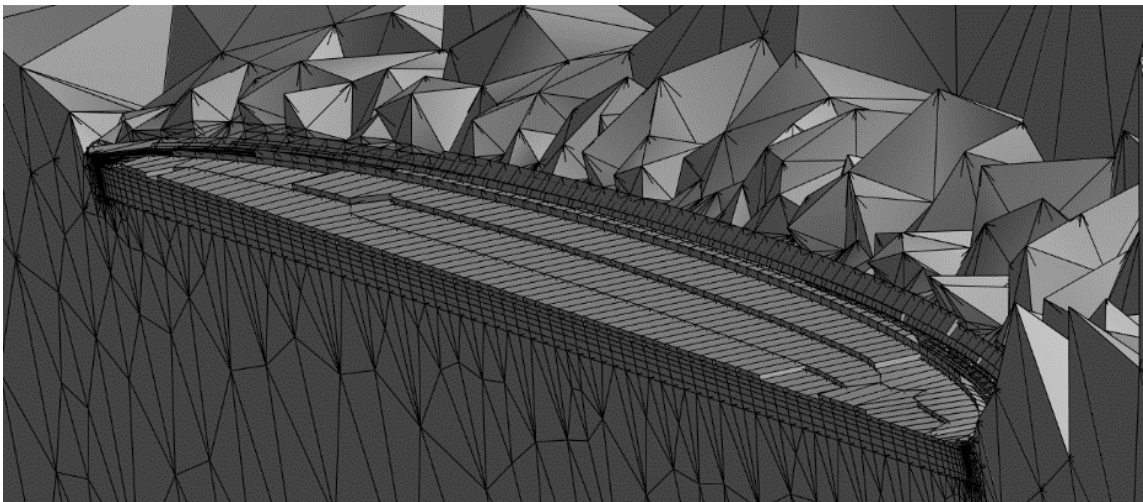


Рисунок 4.10 – Тривимірна скінченно-елементна модель оболонки з тріщиною

Отриманий розподіл еквівалентних напружень для конструкції з тріщиною загалом подібний до варіанту без тріщини. Проте в околі дефекту спостерігається різкий сплеск напружень, максимальне значення яких досягло 217,8 МПа. При цьому рівень і місце розташування мінімальних напружень залишилися незмінними, що показано на рисунку 4.11.

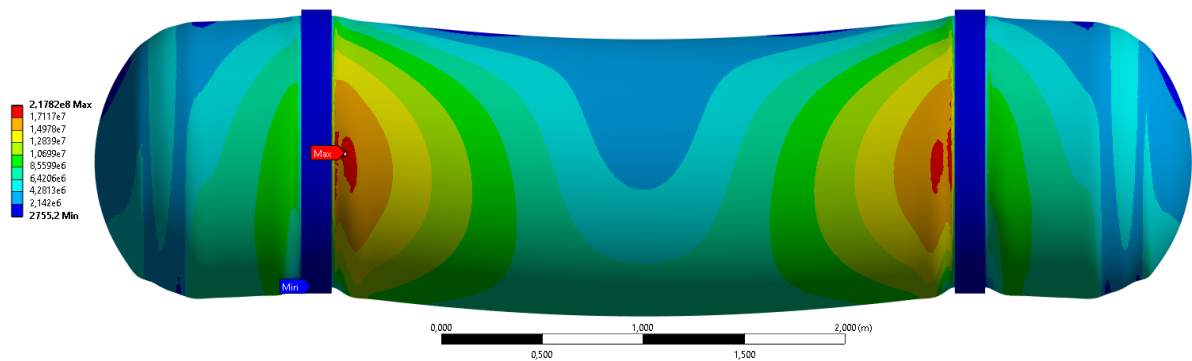


Рисунок 4.11 – Розподіл еквівалентних напружень

Розглянуто околицю тріщини на поверхні паливного бака, що показано на рисунку 4.12. Встановлено, що сплески напружень виникають у зоні контакту фронту тріщини із зовнішньою поверхнею оболонки. Максимальне значення напружень досягає 217,8 МПа і розташоване майже по центру лінії фронту тріщини, як зображено на рисунку 4.13. На рисунку 4.14 наведено розподіл еквівалентних напружень по нижній поверхні тріщини.

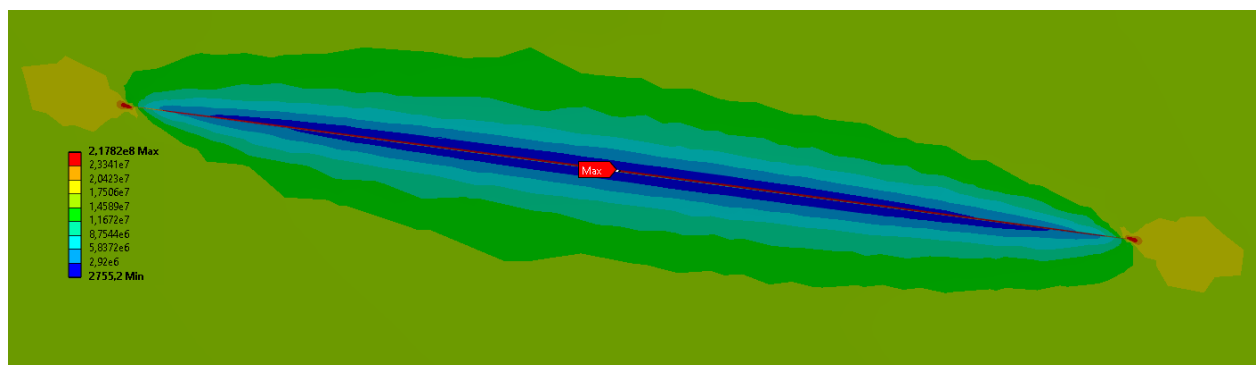


Рисунок 4.12 – Розподіл еквівалентних напружень в околі тріщини

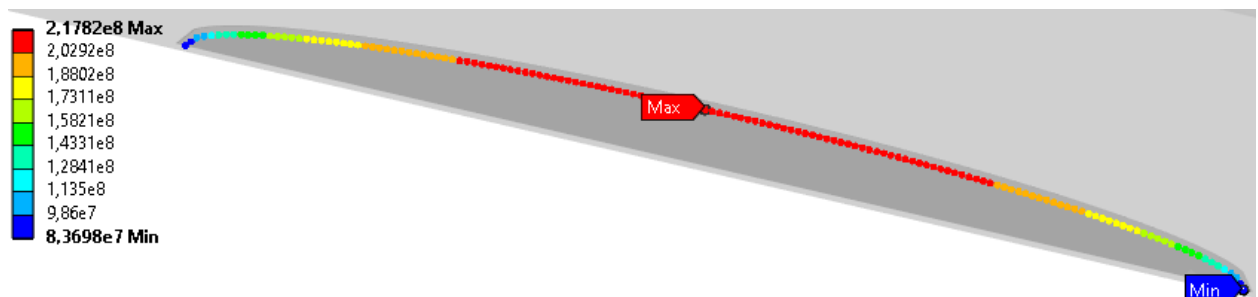


Рисунок 4.13 – Розподіл еквівалентних напружень по фронту зростання тріщини

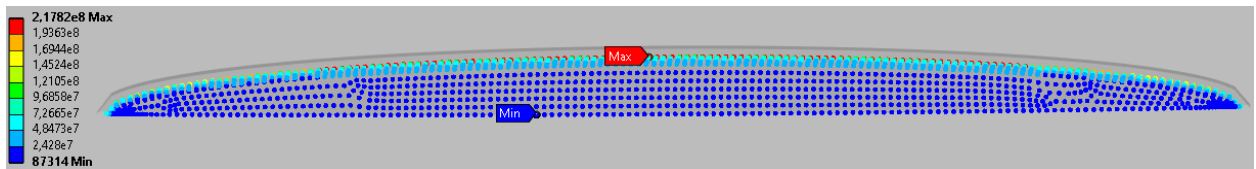


Рисунок 4.14 – Розподіл еквівалентних напружень по нижній поверхні тріщини

Для оцінки швидкості розсіювання енергії під час зростання тріщини використано розподіл значень J -інтеграла вздовж фронту тріщини, що наведено на рисунку 4.15. Цей підхід дозволяє більш детально дослідити механізми накопичення енергії в області дефекту та оцінити перспективи його подальшого розвитку.

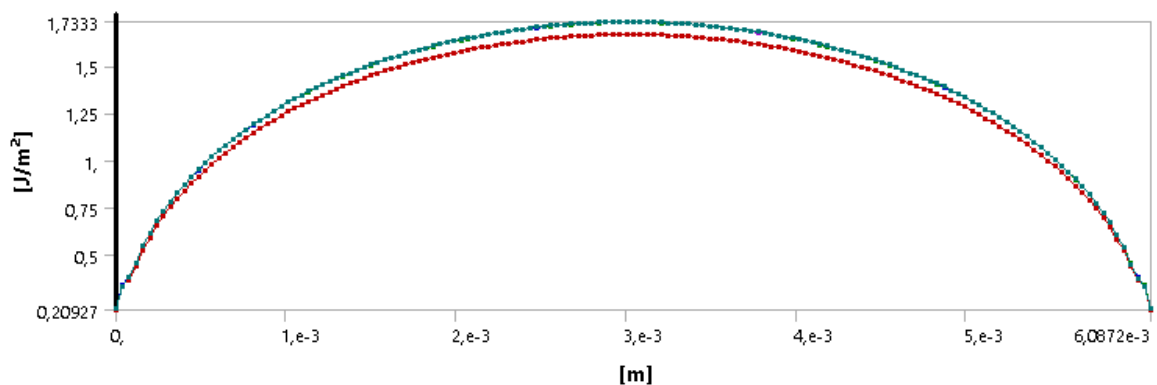


Рисунок 4.15 – Розподіл значень J -інтеграла вздовж фронту тріщини

Втомний аналіз, виконаний під дією циклічного навантаження амплітудою від -1 до 1 , показав високу довговічність оболонки поза зоною тріщини. У таких умовах конструкція здатна витримувати понад 10^8 циклів до початку руйнування. Проте в області тріщини відзначається значне скорочення терміну служби. Як видно з результатів, представлених на рисунку 4.16, кількість циклів до руйнування суттєво знижується в найбільш навантажених ділянках фронту тріщини і становить лише 18430 циклів. Хоча це може бути достатньо для транспортування конструкції на короткі відстані, тривалі перевезення створюють ризик виникнення руйнувань у зоні дефекту. Це може призвести до лави-

ноподібного розростання тріщини всередину оболонки, що викличе розгерметизацію бака та повне його руйнування.

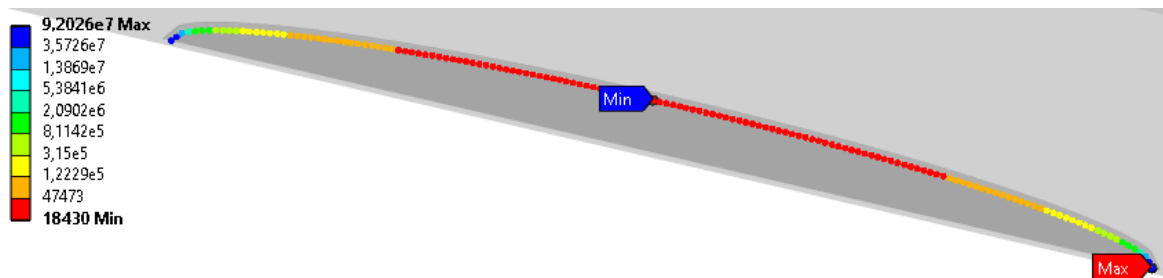


Рисунок 4.16 – Розподіл кількості циклів до руйнування

Слід також зазначити, що розрахунки виконані за умов рівномірного циклічного навантаження. У реальних умовах, коли можливі нестационарні навантаження, ситуація може суттєво погіршитися. Наприклад, один цикл підвищеного навантаження, спричинений ударом через вибоїну дорожнього полотна або різким гальмуванням транспорту, може повністю зруйнувати залишкову міцність і витривалість конструкції. Це підкреслює критичну важливість урахування нестационарних навантажень у процесі проектування і транспортування паливних баків.

Висновки за розділом 4

У цьому розділі було проведено комплексне дослідження розвитку тріщин у конструкціях ракетної техніки під дією циклічних навантажень, що виникають під час транспортування. Аналіз базувався на чисельному моделюванні за допомогою скінченно-елементного методу та враховував як початкові дефекти конструкцій, так і параметри навантаження. Для моделювання напружено-деформованого стану було використано характеристики алюмінієвого сплаву АМг6 із межею плинності 280 МПа, межею міцності 310 МПа і модулем Юнга 71 ГПа.

У дослідженні було визначено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень для різних типів дефектів, включаючи ізольовані тріщини, ланцюжки тріщин у зонах зварних швів і тріщини поблизу технологічних отворів. Початкові розміри тріщин, за яких їх розвиток не відбувається, становили 0,0005 м для ізольованих тріщин в основному металі, 0,0012 м для тріщин у зоні зварних швів і 0,0002 м для тріщин поблизу технологічного отвору. При навантаженні 147 МПа для основного металу і 95 МПа для зварного шва кількість циклів до досягнення критичного розміру становила 8485 циклів для ізольованих тріщин, 2647 циклів для ланцюжка тріщин у зварному шві та 413 циклів для тріщин поблизу технологічного отвору.

Результати показали, що в конструкціях без дефектів максимальні напруження не перевищували 19,2 МПа, що значно нижче за межу плинності матеріалу, забезпечуючи високу довговічність і надійність. Водночас введення напіреліптичних тріщин у зонах концентрації напружень призводило до значного локального підвищення напружень, зокрема до значення 217,8 МПа, що наближається до межі міцності матеріалу. Аналіз J -інтеграла показав, що зони поблизу фронту тріщини є критичними для її зростання, а кількість циклів до руйнування в цих зонах може скорочуватися до 18430 циклів. Було також встановлено, що рівень навантаження, менший за 0,1 номінального, суттєво сповільнює або повністю зупиняє розвиток тріщин у багатьох типах дефектів.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було здійснено комплексне дослідження напружено-деформованого стану конструкцій ракетної техніки з урахуванням наявності тріщиноподібних дефектів та їх впливу на довговічність конструкцій під дією циклічних навантажень. Розроблено метод розрахунку критичної кількості циклів навантаження, необхідної для розвитку тріщин до неприпустимих розмірів, що дозволяє передбачити поведінку конструкцій в умовах експлуатації та транспортування. Для цього використано критерій Періса, який дає змогу визначати коефіцієнт інтенсивності напружень залежно від розміру тріщини та рівня навантаження. Особлива увага приділялася дефектам, розташованим у зонах концентрації напружень, таких як отвори, зварні шви та границі конструктивних елементів.

Отримані результати відповідають сучасному рівню наукових і технічних знань у галузі механіки руйнування та чисельного моделювання. Запропоновані нові методики розрахунку КІН для тріщин різних типів та алгоритми прогнозування їх розвитку базуються на застосуванні гіперсингулярних інтегральних рівнянь, методу скінченних і граничних елементів, що забезпечує високу точність чисельних розрахунків. Проведено детальний аналіз втомного руйнування елементів паливного бака, зокрема розраховано залежність кількості циклів до руйнування від геометричних характеристик тріщин і рівня прикладених навантажень. Установлено, що навіть малі дефекти у критичних зонах можуть значно скоротити термін експлуатації конструкцій. Наприклад, для ізольованої тріщини в основному металі початковий розмір 0,0005 м призводить до руйнування за 8485 циклів при середньому навантаженні 147 МПа, тоді як для ланцюжка тріщин у зоні зварного шва цей процес триває лише 2647 циклів.

Розроблені методики та програмне забезпечення дозволяють оцінювати міцність конструкцій під час транспортування, виявляти зони найбільшого ризику та передбачати можливі сценарії руйнування. Практичне значення отриманих результатів полягає у забезпеченні надійності та безпеки транспортуван-

ня й експлуатації паливних баків ракетної техніки. Чисельні дані, отримані в роботі, дозволяють розробляти рекомендації щодо вдосконалення конструкцій та їх експлуатаційних характеристик, що особливо актуально для транспортних і передстартових умов.

Науково-технічна значущість роботи полягає в обґрунтуванні нових підходів до аналізу напружено-деформованого стану конструкцій, вивченні взаємодії мікрodefektів із навантаженнями та розробці методів підвищення довговічності елементів конструкцій. Соціально-економічна значущість полягає у зниженні ризиків руйнування під час експлуатації, що сприяє підвищенню безпеки та економічної ефективності ракетних систем.

Доцільність продовження досліджень визначається необхідністю вивчення взаємодії навантажень різної природи, включно з вітровими та ударними впливами, на конструкції в передстартовий період. Особливу увагу слід приділити дослідженню ефектів плескання рідини та їх взаємодії з коливаннями пружних стінок баків, що дозволить покращити передстартову підготовку ракет-носіїв.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Khatsko D. Computer simulation of the destruction processes of rocket technology structural elements // III International youth scientific & practical conference «Learning & teaching: in the world after war»: зб. матеріалів форуму (м. Харків, 8 листопада 2024 р.). Харків. 2024. С. 219.
2. Corrosion fatigue cracking paper. TesTex Website. URL: <https://testex-ndt.com/articles/corrosion-fatigue-cracking-paper/> (дата звернення: 02.01.2025).
3. Fatigue physics – metal fatigue life prediction. URL: <https://fatigue-life.com/fatigue-physics/> (дата звернення: 02.01.2025).
4. Андрейкив А., Дарчук А. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. Київ : Наук. думка, 1987. 404 с.
5. Махутов Н. А. Деформаційні критерії руйнування і розрахунків елементів конструкцій на усталеність. Київ : Наук. думка, 1981. 272 с.
6. Панасюк В. В. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Київ : Наук. думка, 1971. 278 с.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Розподілення напружень навколо тріщин у пластинах і оболонках. Київ : Наук. думка, 1976. 444 с.
8. Stašević M. Attachment estimates century construction of the tower installations for oil and gas exploration. Doctoral thesis. University of Novi Sad. Faculty of Technical Sciences. 2014. 168 с.
9. Xu B. B., Gao X. W., Jiang W. W. Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. P. 218.
10. Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections / P. Bertolini, M. A. Eder, L. Taglialegne, P. S. Valvo. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 137. P. 527–540.
11. Rokach V. Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations. *CoRR*. 2019. Abs/1903.11401.
12. Розрахунок залишкового ресурсу елементів проточної частини гідротурбін ГЕС та ГАЕС: Методичні вказівки / Кантор Б., Стрельнікова О. [та ін.].

(СОУ-НМЕВ 40.1–21677681–51:2011). Київ : Міністерство енергетики та вугільної промисловості України, 2011. 76 с.

13. Zong L., Shi G. Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. *Advances in Bridge Engineering*. 2021. Vol. 2(4). P. 1–17.

14. Bettayeb M., Bouali E., Abdelbaki N. Establishment of a database and a classification of the defects in the metal of pipes according to their severity. *Procedia Engineering*. 2012. Vol. 42. P. 607–615.

15. Abdelbaki N., Bouali E., Gaceb M. Study of defect admissibility in gas pipelines based on fracture mechanics. *J. Eng. Sci. Tech. (JESTEC)*. 2009. Vol. 4. P. 111–121.

16. Zong L., Shi G. Three-dimensional fatigue crack propagation analysis of welded steel beam based on global-local numerical model. *Advances in Bridge Engineering*. 2021. Vol. 2(4). P. 1–17.

17. Torsion response of cracked steel shaft / Lessenden S. J., Pissot S. P. [та ін.]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2006. Vol. 30. P. 734–747.

18. Residual life estimation of cracked aircraft structural components / Maksimović M. S., Vasović I. V. [та ін.]. *FME Transactions*. 2018. Vol. 46. P. 124–128.

19. Serenza E. N., Suarez O. A. G., Rossi G. A study about SIF estimation using XFEM. *Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Foz do Iguaçu/PR*. Brazil. 2020. Vol. 1. P. 1–3.

20. Research on low stress high temperature precision shear separation process of metal bars / Ren Y., Dong Y. [та ін.]. *Heavy Machinery*. 2021. Vol. 5. P. 37–41.

21. Yi W., Rao Q., Li Z. A new method for predicting the crack propagation process of brittle rock under thermo-hydro-mechanical loading conditions. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 25–36.

22. Fatigue crack growth versus plastic CTOD in the 304L stainless steel /

Antunes F. V., Ferreira M. S. [та ін.]. *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 214. P. 487–503.

23. Li H. F., Liu Y. Q., Zhang P. Full-stage fatigue crack growth model for metallic materials. *International Journal of Fatigue*. 2023. Vol. 72. P. 254–260.

24. Simionato F., Daros C. H. Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media. *Z Angew Math Mech*. 2019. Vol. 99. P. 139–142.

25. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells / V. Gnitko, A. Karaiev, K. Degtyariov, E. Strelnikova. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. Vol. 126. P. 189–200.

26. Rokach V. Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations. *CoRR*. 2019. Abs/1903.11401. P. 5–9.

27. Palladino S., Esposito L., Ferla P. Functionally graded plate fracture analysis using the field boundary element method. *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11. P. 29–32.

28. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis / Gnitko V., Karaiev A. [та ін.]. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2022. Vol. 134. P. 67–79.

29. Zhang J., Xu R., He Y. Direct computation of 3-D stress intensity factors of straight and curved planar cracks with the P-version finite element method and contour integral method. *Materials*. 2021. Vol. 14(14). P. 27–33.

30. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / Karaiev A., Strelnikova E. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2020. Vol. 11(1). P. 189–195.

31. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method / Karaiev A., Strelnikova E. *Z Angew Math Mech*. 2021. Vol. 101. P. 562–565.

32. Hypersingular integrals in integral equations and inequalities: fundamental review study / Obaiys S. J., Ibrahim R. W., Ahmad A. F. In: *Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications*. 2019. Vol. 151. P. 142–156.

33. Evaluation of tribotechnical characteristics for tribosystems in the presence of fullerenes in the lubricant / Vojtov V. A., Kravtsov A. G., Tsymbal B. M. *Journal of Friction and Wear*. 2020. Vol. 41(6). P. 521–525.

34. Approximate determination of stress intensity factor for multiple surface cracks / Kastratović G., Vidanović N., Grbović A. *FME Transactions*. 2018. Vol. 46. P. 41–47.

35. Zum T. Verformungsverhalten von stahlbetontragwerken unter Betriebsbelastung. *Mitt. Inst. Wekst. Baum*. 1996. Vol. 3. P. 1–195.

36. Розробка програмного забезпечення для обчислювального аналізу розповсюдження тріщин і довговічності конструкцій / Москаленко Р., Зайденварг О., Стрельнікова О., Гнітко В. В збірнику: 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Харків, Україна. 2020. С. 509–514.

37. Ansys. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ansys> (дата звернення: 02.01.2025).

38. Python 3.13.1 documentation. URL: <https://docs.python.org/3/> (дата звернення: 02.01.2025).

39. NumPy documentation. URL: <https://numpy.org/doc/> (дата звернення: 02.01.2025).

40. SciPy documentation. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/> (дата звернення: 02.01.2025).