

Пусть функция $\omega_i(x, y)$, $i = \overline{0, n}$, удовлетворяет условиям:

$\omega_i > 0$ в Ω , $\omega_i = 0$ на $\partial\Omega_i$, $|\nabla\omega_i| = 1$ на $\partial\Omega_i$; тогда функция

$$\omega = \omega_0 \wedge_{\alpha} \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2 \wedge_{\alpha} \dots \wedge_{\alpha} \omega_n \quad (18)$$

будет удовлетворять таким условиям:

$$\omega > 0 \text{ в } \Omega, \quad \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad |\nabla\omega| = 1 \text{ на } \partial\Omega.$$

В соответствии с методом R-функций можно построить структуры решения краевых задач (14), (15) и (16), (17).

Структура решения краевой задачи (14), (15) имеет вид

$$u_0^{(m+1)} = -\omega \frac{f\omega_0^{-1}}{\sum_{k=0}^n \omega_k^{-1}} + \omega^2 \Phi_0^{(m+1)} = \tilde{\varphi}_0 + \omega^2 \Phi_0^{(m+1)} \quad (19)$$

а структура решения краевой задачи (16), (17) имеет вид

$$u_i = \omega_i^{-1} / \sum_{k=0}^n \omega_k^{-1} - \omega D_{\omega}^{(1)}(\omega_i^{-1} / \sum_{k=0}^n \omega_k^{-1}) + \omega^2 \Phi_i = \tilde{\varphi}_i + \omega^2 \Phi_i \quad (20)$$

Здесь $f = E C f_0$ – продолжение в область Ω функции f_0 ($E C$ – оператор продолжения граничных условий); $\Phi_0^{(m+1)}$, Φ_i , $i = \overline{1, n}$, – неопределенные компоненты структуры;

$$D_{\omega}^{(1)} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент в (19), (20) можно воспользоваться любым проекционным методом.

Литература: 1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с. 2. Pearson C.E. A computational method for viscous flow problems // J. Fluid Mech. 1965. 21, №4. P. 611-622. 3. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с. 4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.

Поступила в редколлегию 19.11.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Сидоров Максим Викторович, аспирант каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 702-14-36.

УДК 519.673+519.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К РАСЧЕТУ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ УСТОЙЧИВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

ВЫХОДЦЕВ Е.И.

Рассматривается задача расчета вертикального распространения примеси от приземного источника в нестационарном устойчивом пограничном слое атмосферы. Для приближенного решения этой задачи предлагается использовать метод Галеркина. Предлагаемая вычислительная схема тестируется на модельной задаче, для которой известно точное решение.

Введение

Развитая структура и значительные объемы производства, транспорта и хранения низкотемпературных веществ представляет повышенную опасность для окружающей среды и человека. Существующие методики расчета последствий аварийных ситуаций, связанных с разливами, выбросами и утечками низкотемпературных веществ в окружающую среду, часто дают сильно завышенные результаты, что приводит к дополнительным затратам при составлении плана ликвидации последствий аварии. Поэтому разработка методик, которые давали бы

более точные расчеты, а также позволяли проводить прогностические расчеты для более полного класса внешних условий, является актуальной.

1. Постановка задачи

Вертикальное распространение оседающей примеси от мгновенного источника мощности Q , находящегося на высоте h , описывается полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии [1]

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) + w \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (1)$$

где q – средняя концентрация примеси; w – скорость гравитационного оседания частиц; k_z – вертикальный коэффициент турбулентной диффузии. Уравнение (1) дополняется следующими начальными и краевыми условиями:

$$q|_{t=0} = Q \delta(z-h), \quad (2)$$

$$k_z \frac{\partial q}{\partial z} + (w - \beta)q \Big|_{z=z_0} = 0, \quad k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (3)$$

здесь β – скорость сухого осаждения (характеристика взаимодействия частиц примеси с подстилающей поверхностью); z_0 – параметр шероховатости; $H = H(t)$ – высота верхней границы нестационарного устойчивого пограничного слоя атмосферы; h – высота источника примеси.

Наиболее полный обзор известных точных решений задачи приведен в [1].

Для неоседающей и неосаждающейся примеси ($w = \beta = 0$), а также для неоседающей, но осаждающейся примеси ($w = 0, \beta \neq 0$), при постоянных вертикальном коэффициенте турбулентной диффузии k_z и высоте верхней границы устойчивого пограничного слоя атмосферы H точное решение задачи (1)-(3) может быть легко получено методом разделения переменных. Для первого случая оно имеет вид ($z_0 = 0$)

$$q(z, t) = \frac{Q}{H} + \frac{2Q}{H} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{k_z \pi^2 j^2}{H^2} t} \cos \frac{\pi j h}{H} \cos \frac{\pi j z}{H}, \quad (4)$$

а для второго случая – вид

$$q(z, t) = Q \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(h) \Phi_j(z)}{\|\Phi_j(z)\|^2} T_j(t), \quad (5)$$

где $T_j(t) = e^{-k_z \lambda_j t}$, $\Phi_j(z) = \cos \sqrt{\lambda_j} z + \frac{\beta}{k_z} \sin \sqrt{\lambda_j} z$,

$$\begin{aligned} \|\Phi_j(z)\|^2 &= \frac{H(k_z + \beta)}{2k_z} + \frac{(k_z - \beta)}{4k_z \sqrt{\lambda_j}} \sin 2H\sqrt{\lambda_j} - \\ &- \frac{\beta}{4k_z \sqrt{\lambda_j}} \cos 2H\sqrt{\lambda_j} + \frac{\beta}{4k_z \sqrt{\lambda_j}}, \\ \lambda_j &= \frac{1}{H^2} \left(\pi j - \arctg \frac{k_z}{\beta} \right)^2. \end{aligned}$$

2. Метод решения

Аналитические решения (1)-(3) получены лишь для узкого класса задач, что делает актуальной проблеме разработки эффективных численных методов. Воспользуемся для приближенного аналитического решения задачи (1)-(3) методом Галеркина [2].

Пусть k_z – положительная и ограниченная на $\Omega = (z_0, H)$ функция. Введем в рассмотрение операторы

$$Au \equiv -\frac{d}{dz} \left(k_z \frac{du}{dz} \right), \quad Ku \equiv -w \frac{du}{dz}$$

с областями определения

$$D_A = \left\{ v : v \in V, k_z \frac{dv}{dz} + (w - \beta)v \Big|_{z=z_0} = 0, k_z \frac{dv}{dz} \Big|_{z=H} = 0 \right\},$$

где $V = \left\{ v : v \in W_2^1(\Omega), Av \in L_2(\Omega) \right\}$; $D_K \supseteq D_A$. Через H_A обозначим соответствующее оператору A энергетическое пространство. Скалярное произведение и норма в H_A имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} [u, v] &= \int_{z_0}^H k_z \frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} dz + (\beta - w)uv \Big|_{z=z_0}, \\ [u] &= \int_{z_0}^H k_z \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz + (\beta - w)u^2 \Big|_{z=z_0}. \end{aligned}$$

Под обобщенным решением задачи (1)-(3) будем понимать функцию $q(z, t)$, которая почти при всех $t \in (0, T)$ принадлежит H_A , имеет производную $\frac{\partial q}{\partial t} \in L_2((0, T) \times \Omega)$ и при произвольной $v(z) \in H_A$ почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}, v \right) + [q, v](t) + (Kq, v)(t) = 0, \quad (6)$$

$$(q(z, 0), v) = Q v(h). \quad (7)$$

Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$q_N(z, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \varphi_j(z), \quad (8)$$

где $\varphi_j(z)$ – полная система линейно-независимых функций из H_A .

Подставив (8) в (6) и (7) для определения коэффициентов $c_j(t)$, приходим к системе ОДУ вида

$$\sum_{j=1}^N \frac{dc_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_k) + \sum_{j=1}^N c_j ([\varphi_j, \varphi_k] + (K\varphi_j, \varphi_k)) = 0 \quad (9)$$

с начальными условиями, получаемыми из СЛАУ:

$$\sum_{j=1}^N c_j(0) (\varphi_j(z), \varphi_k) = Q \varphi_k(h), \quad k = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Можно доказать, что задача (9)-(10) однозначно разрешима.

В соответствии с общей методикой построения структур решения краевых задач [3, 4] базисные функции возьмем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \left(1 + \frac{(\beta - w)(H - z)^2(z - z_0)}{k_z(H - z_0)^2} \right) \tau_j(z) - \\ &- \frac{(H - z)(z - z_0)(-2z + z_0 + H)}{(H - z_0)^2} \frac{d\tau_j(z)}{dz}, \end{aligned}$$

где $\tau_j(z)$ – полная система функций (полиномы Лежандра, сплайны и др.).

3. Численные результаты

Численное моделирование было проведено в три этапа. Во всех случаях источник располагался на таких уровнях: $h = \lambda H$, где $\lambda = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$; $H = 150$ м. Скорость сухого осаждения варьировалась в пределах от $5 \cdot 10^{-3}$ до $5 \cdot 10^{-2}$ м/с. Для оседающей неосаждающейся примеси полагалось

$\beta = \gamma w$, где $\gamma = 1, \frac{3}{2}, 2$. Решение ищлось в виде (8), в качестве системы $\tau_j(z)$ были выбраны кубические сплайны. Компьютерное моделирование выполнялось с помощью пакета Mathematica 4.0©.

3.1. Неоседающая и неосаждающаяся примесь ($w = \beta = 0$)

Профили концентрации примеси для этого случая представлены на рис. 1. Как видно, при постоянном (усредненном по высоте) коэффициенте диффузии с течением времени примесь равномерно распределяется по всей толщине пограничного слоя, что соответствует теоретическим результатам (см. выражение (4)). Значения, отличающиеся от предельного значения $\frac{Q}{H}$ менее чем на 10%, устанавливаются примерно начиная с момента времени $\tau_{уст} = 50$ мин. Было также установлено, что равномерное распределение наиболее быстро устанавливается при расположении источника в середине пограничного слоя.

В случаях 3.1 и 3.2 полученное приближенное решение сравнивалось с точным решением вида (4) и (5) соответственно. На сетке сплайнов с шагом 10 отклонение от точного решения в фиксированные моменты времени по норме $L_2(z_0, H)$ составило менее 15%.

3.2. Неоседающая осаждающаяся примесь ($w = 0, \beta \neq 0$)

Профили концентрации примеси для этого случая представлены на рис. 2. При учете скорости сухого осаждения появляется осадок на земле. Часть примеси, находящейся в пограничном слое, с ростом времени диффузии уменьшается и с увеличением β быстро осаждается на землю.

В случаях 3.1 и 3.2 полученное приближенное решение сравнивалось с точным решением вида (4) и (5) соответственно. На сетке сплайнов с шагом 10 отклонение от точного решения в фиксированные моменты времени по норме $L_2(z_0, H)$ составило менее 15%.

3.3. Оседающая осаждающаяся примесь ($w \neq 0, \beta \neq 0$)

Профили концентрации примеси для этого случая представлены на рис. 3. Учет гравитационного оседания приводит к сосредоточению примеси у поверхности земли. Анализ численного решения показывает, что сухое осаждение приводит к сглаживанию профиля концентрации и уменьшает время установления линейного профиля практически по всей толщине пограничного слоя.

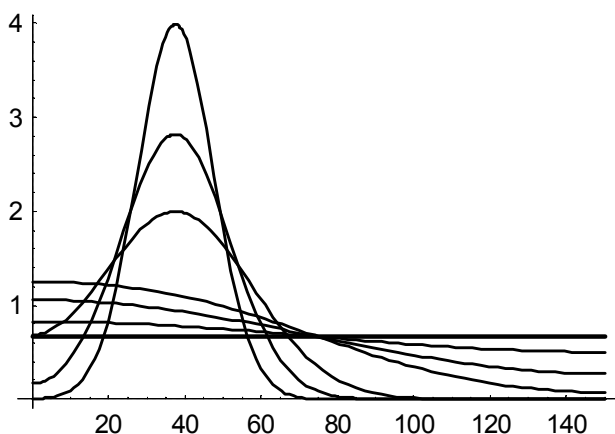


Рис. 1. Эволюция вертикального профиля концентрации ($w = \beta = 0, h = 0,25H$)

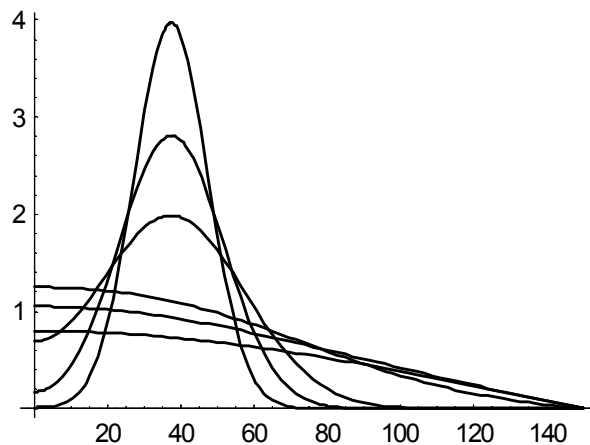


Рис. 2. Эволюция вертикального профиля концентрации ($w = 0, \beta = 0,01, h = 0,25H$)

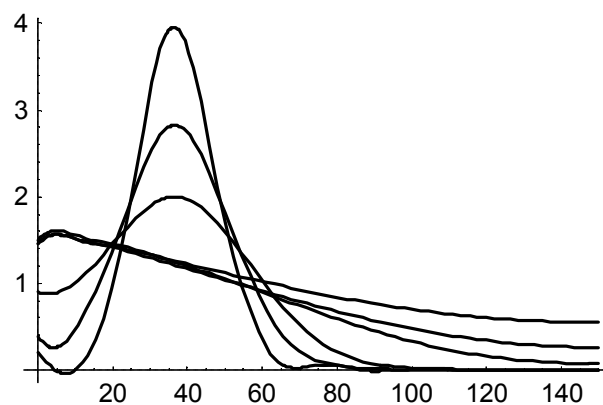


Рис. 3. Эволюция вертикального профиля концентрации ($w = \beta = 0,01, h = 0,25H$)

Выводы

Таким образом, предложен и обоснован приближенный метод расчета вертикального распространения примеси в нестационарном устойчивом пограничном слое атмосферы. Этот метод был протестирован на модельной задаче, для которой известно точное решение. Также получено приближенное решение задачи, для которой точное решение не известно. Полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными [1].

Литература: 1. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1985. 277 с. 2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с. 3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 4. Выходцев Е.И. Построение структур решения краевых задач для уравнения турбулентной диффузии // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 3. С. 55-57.

Поступила в редколлегию 29.10.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Выходцев Евгений Иванович, научный сотрудник кафедры ПМ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика, теория R-функций, компьютерное моделирование. Адрес: Украина, 61058, Харьков, ул. Данилевского, 8, кв.130, тел. 43-87-84.