

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

СИДОРОВ М.В., СТОРОЖЕНКО А.В.

Рассматривается задача расчета фильтрационного течения жидкости под некоторым гидротехническим сооружением. Предлагается приближенный метод ее решения, основанный на совместном применении метода R-функций и вариационных методов.

## 1. Актуальность исследования

Задачи расчета движения жидкостей в пористых средах имеют большое значение при проектировании различных гидротехнических сооружений. Для решения этого класса задач математической физики используются различные точные и приближенные методы: метод Фурье, вариационные методы, методы теории функций комплексного переменного, метод фиктивных областей. Однако для каждого из этих методов имеются существенные ограничения, связанные с геометрией области, поведением коэффициента фильтрации и прочее [1, 2]. В связи с этим разработка приближенных методов решения этого класса задач является актуальной.

## 2. Постановка задачи

Целью данной работы является построение эффективных численных методов расчета фильтрации под гидротехническими сооружениями. Рассмотрим задачу движения несжимаемой жидкости под гидротехническим сооружением (плотиной). На рис. 1 приведена условная, но достаточно общая, схема фильтрации. Здесь  $D$  – область фильтрации,  $D_1$  – подводная часть плотины (флютбет),  $\partial\Omega_4$  – граница водонепроницаемой области,  $\partial\Omega_5$  – шпунт.

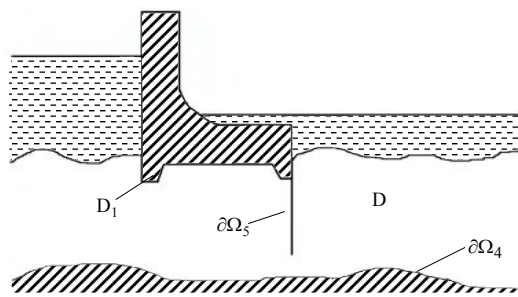


Рис. 1. Общая схема фильтрации

Стационарная фильтрация несжимаемой жидкости описывается в рамках линейного закона Дарси уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{u} = -k(\vec{x}) \nabla h, \quad \vec{x} \in D, \quad (2)$$

где  $u$  – скорость фильтрации;  $k(x, y)$  – коэффициент фильтрации;  $h = y + \frac{p}{\rho g}$  – пьезометрический

напор;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность жидкости, а  $g$  – ускорение силы тяжести.

В плоском случае  $\vec{x} = (x, y)$  из (1), (2) следует уравнение для напора:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(\vec{x}) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(\vec{x}) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad \vec{x} \in D. \quad (3)$$

При численном исследовании задачи удобнее от уравнения (3) для напора  $h(\vec{x})$  перейти к уравнению для функции тока  $\psi(x, y)$  с помощью соотношений

$$u_x = -k(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4)$$

$$u_y = -k(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Тогда для функции тока получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (6)$$

Дополним его соответствующими граничными условиями. На проницаемых участках границы  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_3$  расчётной области  $D$  ставятся однородные условия второго рода:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \quad (7)$$

Условие (7), как следует из (4) и (5), соответствует постоянству напора на  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_3$ . Водоупор  $\partial\Omega_4$ , флютбет  $\partial\Omega_3$  со шпунтом  $\partial\Omega_5$  водонепроницаемы, поэтому нормальная составляющая скорости  $\vec{u}$  на этих участках границы равна нулю. Это приводит к тому, что на  $\partial\Omega_3$ ,  $\partial\Omega_4$  и  $\partial\Omega_5$  функция тока принимает постоянные значения. Для определённости положим, что

$$\psi|_{\partial\Omega_4} = Q, \quad (8)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_5} = 0. \quad (9)$$

Величина  $Q$  задаёт общий расход жидкости.

Основные трудности, возникающие при решении задачи (6)-(9), следующие: неоднородность грунта (коэффициент фильтрации  $k(x, y)$  зависит от координат), границы  $\partial\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  – криволинейны, наличие шпунта  $\partial\Omega_5$ , который может быть не единственен.

## 3. Метод решения

Для решения поставленной задачи (6)-(9) будем применять метод R-функций (пусть шпунт  $\partial\Omega_5$  отсутствует). Выделим область  $\Omega$  (пересечение  $|x| < L$  с  $D$ ), вне которой фильтрация незначительна. На боковых границах  $\Omega$  поставим условие

$$\psi|_{x=\pm L} = 0. \quad (10)$$

Предположим, что известны функции  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$ ,  $\omega_3(x, y)$ ,  $\omega_4(x, y)$ , такие, что:

$$1) \omega_i(x, y)|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (11)$$

$$2) \omega_i(x, y) > 0$$

$$\text{при } (x, y) \in \Omega \cup \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \partial\Omega_j \right) \cup \{x = \pm L\}; \quad (12)$$

$$3) \frac{\partial\omega_i}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_i} = 1, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (13)$$

Такие функции всегда можно построить с помощью аппарата теории R-функций [3].

Тогда функция

$$\varphi_1(x, y) = \frac{Q\omega_2(x, y)}{\omega_2(x, y) + \omega_4(x, y) \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)} \quad (14)$$

обладает свойствами:  $\varphi_1|_{\partial\Omega_2} = 0$ ,  $\varphi_1|_{\partial\Omega_4 \cup \{x = \pm L\}} = Q$ , на  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$  принимает, вообще говоря, произвольные значения.

Значит, задачу (6)-(10) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (15)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \{x = \pm L\}} = \varphi_1|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \{x = \pm L\}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \quad (17)$$

В [3] показано, что краевым условиям

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi|_{\partial\Omega_1}, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) \Big|_{\partial\Omega_2} = \psi|_{\partial\Omega_2} \quad (18)$$

удовлетворяет структура

$$u = \omega_1\Phi_1 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [\psi + \omega_2\Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) - D_1^{(2)}\varphi - \alpha\omega_1\Phi_1 - \alpha\varphi] + \varphi, \quad (19)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределённые компоненты,

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial\omega_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Заменяя в (19)  $\omega_1$  на  $\omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)$ ,  $\omega_2$  на  $\omega_1 \cdot \omega_3$ ,  $\varphi$  на  $\varphi_1$ , при  $\alpha = 0$ ,  $\psi = 0$  получаем структуру решения задач (15)-(17) в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) \Phi_1 + \\ & + \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)}{\omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) + \omega_1 \cdot \omega_3} \times \\ & \times [\omega_1 \cdot \omega_3 \cdot \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) \Phi_1) - \\ & - D_1^{(2)}\varphi_1] + \varphi_1, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределённые компоненты,

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega_1\omega_3) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_1\omega_3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Недостатком структуры (20) является её громоздкость и наличие двух неопределённых компонент  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Решение задачи (16)-(18) можно упростить, если учесть, что условие (18) – естественное.

Легко проверить, что функция

$$\varphi_2(x, y) = \varphi_1(x, y) - \quad (21)$$

$$\frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)}{\omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) + \omega_1 \cdot \omega_3} \cdot D_1^{(2)}\varphi_1(x, y)$$

удовлетворяет условиям (4) и (5). Тогда в задаче (3)-(5) сделаем замену:

$$\psi(x, y) = \varphi_2(x, y) + u(x, y), \quad (22)$$

где  $u(x, y)$  – новая неизвестная функция. Это приводит к задаче

$$-\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = f, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (23)$$

$$u|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \{x = \pm L\}} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad (25)$$

где обозначено

$$f(x, y) = -\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \right) \right]. \quad (26)$$

Введём в рассмотрение оператор краевой задачи (21)-(24), действующий в  $L_2(\Omega)$  по правилу:

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (27)$$

с областью определения

$$D(A) = \{u | u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0\}, \quad (28)$$

где  $\partial\tilde{\Omega} = \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \{x = \pm L\}$ .

Пусть оператор (27) – эллиптический невырожденный. В этом случае можно доказать [4], что оператор  $A$  – положительно определён, условие (24) – главное, (25) – естественное. Значит, функция  $u$  может быть найдена как минимум функционала  $(Au, u) - 2(u, f)$ .

Тогда структуру решения краевой задачи (23)-(24) можно взять в виде:

$$u = \omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) \Phi, \quad (29)$$

где  $\Phi$  – неопределённая компонента.

Для аппроксимации компоненты  $\Phi$  воспользуемся методом Ритца. Замкнув множество  $D(A)$  в метрике, порожденной нормой

$$\|u\|_{H_A}^2 = \iint_{\Omega} \frac{1}{k(x,y)} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \quad (30)$$

получим энергетическое пространство  $H_A$  со скалярным произведением

$$[u, v] = (Au, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{k(x,y)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \quad (31)$$

Выберем систему координатных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $\tilde{\omega}\varphi_i \in H_A, i = 1, \dots, n$ ;
- 2) при любом  $n$  система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  линейно-независима;
- 3) система  $\tilde{\omega}\varphi_1, \tilde{\omega}\varphi_2, \dots, \tilde{\omega}\varphi_n$  полна в  $H_A$ .

Неопределённую компоненту  $\Phi$  представим в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i. \quad (32)$$

Согласно методу Ритца для коэффициентов  $c_1, \dots, c_n$ , получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n [\tilde{\omega}\varphi_i, \tilde{\omega}\varphi_j] c_i = (f, \varphi_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (33)$$

где обозначено  $\tilde{\omega}(x,y) = \omega_2 \cdot \omega_4 \wedge_{\alpha} \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)$ .

Если область  $\Omega$  может быть (при подходящем выборе системы координат) заключена в горизонтальную полосу  $0 \leq y \leq H$ , то в качестве координатной системы можно выбрать

$$\varphi_{mn}(x,y) = P_m\left(\frac{x}{L}\right) P_n\left(\frac{2y}{H} - 1\right), \quad (35)$$

где  $P_k(t)$  – полиномы Лежандра. Они образуют полную ортогональную на  $[-1, 1]$  систему

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k]. \quad (35)$$

Тогда 
$$u(x,y) = \sum_{m+n=0}^N c_{mn} \tilde{\omega}\varphi_{mn}(x,y). \quad (36)$$

#### 4. Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент был проведён для случаев, когда шпунты отсутствуют, а флютбет имеет прямоугольное сечение. Для расчётов выбрано  $L = 3$ , а высота водопроницаемого слоя  $H = 1$ . Рассмотрены случаи различного заглубления флютбета ( $h = 0,25$  и  $h = 0,5$ ) с постоянной шириной, равной 1. Было принято, что границы  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_3$  – плоские. Рассмотрены случаи, когда водоупор  $\partial\Omega_4$  – плоский и неплоский. Во всех случаях коэффициент фильтрации принимался постоянным  $k(x,y) = 1, Q = 1$ .

1 случай. Заглубление флютбета  $h = 0,25$ , водоупор плоский. В этом случае

$$\begin{aligned} \omega_1 \cdot \omega_3 &= 1 - y, \quad \omega_2 = -(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2), \\ \omega_4 &= y, \quad D_1^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial y}, \\ \varphi_1(x,y) &= \frac{-(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2)}{-(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) + y \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2)}, \\ \varphi_2(x,y) &= \varphi_1(x,y) + \\ &+ \frac{(1 - y) \cdot (y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) \cdot y \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2)}{(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) \cdot y \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2) + (1 - y)} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

На рис. 2 приведена картина линий уровня ( $\delta\varphi = 0,1$ ) приближённого решения для  $N = 5$  (21 базисная функция).

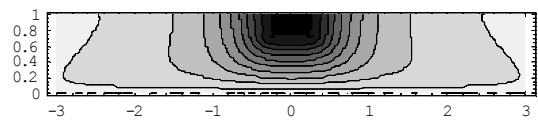


Рис. 2. Линии уровня функции тока

2 случай. Заглубление флютбета  $h = 0,5$ , водоупор плоский. В этом случае

$$\begin{aligned} \omega_1 \cdot \omega_3 &= 1 - y, \quad \omega_2 = -(y - 0,5) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2), \\ \omega_4 &= y, \quad D_1^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial y}, \\ \varphi_1(x,y) &= \frac{-(y - 0,5) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2)}{-(y - 0,5) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) + y \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2)}; \\ \varphi_2(x,y) &= \varphi_1(x,y) + \\ &+ \frac{(1 - y) \cdot (y - 0,5) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) \cdot y \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2)}{(y - 0,5) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) \cdot y \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2) + (1 - y)} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведена картина линий уровня ( $\delta\varphi = 0,1$ ) приближённого решения для  $N = 5$  (21 базисная функция).

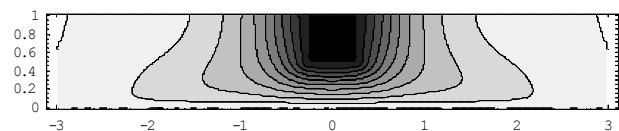


Рис. 3. Линии уровня функции тока

3 случай. Заглубление флютбета  $h = 0,25$ , водоупор неплоский. В этом случае

$$\begin{aligned} \omega_1 \cdot \omega_3 &= 1 - y, \quad \omega_2 = -(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2), \\ \omega_4 &= y - \frac{1}{24}x - \frac{1}{8}, \quad D_1^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial y}, \\ \varphi_1(x,y) &= \\ &= \frac{-(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2)}{-(y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2) + \left( y - \frac{1}{24}x - \frac{1}{8} \right) \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9 - x^2)}. \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x, y) = \varphi_1(x, y) + \frac{(1-y) \cdot (y-0,75) \wedge_{\alpha} (0,25-x^2) \cdot \left(y - \frac{1}{24}x - \frac{1}{8}\right) \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9-x^2)}{(y-0,75) \wedge_{\alpha} (0,25-x^2) \cdot \left(y - \frac{1}{24}x - \frac{1}{8}\right) \wedge_{\alpha} \frac{1}{9}(9-x^2) + (1-y)} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

На рис. 4 приведена картина линий уровня ( $\delta\varphi = 0.1$ ) приближённого решения для  $N = 5$  (21 базисная функция).

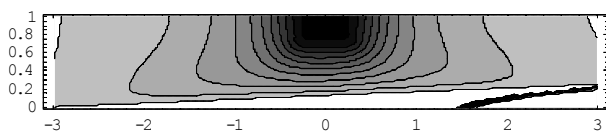


Рис. 4. Линии уровня функции тока

## 5. Выводы

*Сравнение с аналогами.* Полученные приближенные решения сравнивались с решениями, полученными П.Н. Вабищевичем в [1, 5] с помощью метода фиктивных областей. Результаты согласуются.

Преимущества предлагаемого метода по сравнению с существующими следующие:

– более высокая точность по сравнению с методом фиктивных областей (поскольку геометрия области учитывается точно);

– решение получается в аналитическом виде. Это облегчает его дальнейшее использование при нахождении поля скоростей и различных технических характеристик гидросооружения, чем определяется *практическая значимость* исследования.

**Литература:** 1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с. 2. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с. 3. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 511 с. 5. Вабищевич П.Н., Гассиев Р.В. Численное решение задач напорной фильтрации под гидротехническим сооружением // ЖВМ и МФ, 1987. Т. 27, № 10. С. 1580 – 1584.

Поступила в редколлегию 21.11.2004

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

**Сидоров Максим Викторович**, ассистент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория  $R$ -функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 702-14-36.

**Стороженко Александра Владимировна**, канд. техн. наук, доцент кафедры экономической кибернетики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование экономических и технических систем, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 702-14-36.