УДК 62.506.2

Е. П. ПУТЯТИН, д-р техн. наук, *Т. Г. ДОЛЖЕНКОВА*

ВОПРОСЫ НОРМАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

СООБЩЕНИЕ 2

Данная статья является продолжением работы [1] с сохранением тех же обозначений. Используются методологические предпосылки, изложенные в работах [2—5].

Рассмотрим такое нелинейное преобразование, при котором между изображениями $B(x, y)$ и эталонным $B_0(x, y)$ существует следующая зависимость:

$$B(x, y) = B_0(a_1x^2 + a_2y^2,\ a_3x^2 + a_4y^2), \quad x, y \geqslant 0. \tag{1}$$

При отыскании параметров a_j ($j = 1, 2, 3, 4$) данного преобразования воспользуемся методикой, изложенной в работе [1].

Рассмотрим функционалы

$$\Phi_i(B) = \iint\limits_D B(x, y) K_i(x, y)\, dxdy, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Сделаем замену переменных $a_1x^2 + a_2y^2 = u$, $a_3x^2 + a_4y^2 = v$, предполагая здесь и далее, что такие преобразования не выводят изображение за пределы поля зрения.

Имеем

$$x = \sqrt{\gamma_1 u + \gamma_2 v}; \quad y = \sqrt{\gamma_3 u + \gamma_4 v}, \tag{3}$$

где γ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) определяются через параметры a_j.

Якобиан преобразования (3) равен

$$I(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\Delta}{\sqrt{\gamma_1 u + \gamma_2 v}\,\sqrt{\gamma_3 u + \gamma_4 v}}, \tag{4}$$

где $\Delta = (\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3)/4$.

Число функционалов (2) должно быть не менее пяти ($n = 5$), поскольку семейство исходных преобразований (1) — четырехпараметрическое.

Функции $K_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$) имеют следующий вид:

$$K_1(x, y) = xy; \quad K_2(x, y) = xy^3; \quad K_3(x, y) = x^3y;$$
$$K_4(x, y) = xy^5; \quad K_5(x, y) = x^5y. \tag{5}$$

Функционалы $\Phi_i(B)$ после замены переменных (3) и в результате подстановки равенств (5) примут вид:

$$\Phi_1(B) = \Delta \iint\limits_D B_0(u, v)\, dudv;$$

$$\Phi_2(B) = \Delta \iint\limits_D B_0(u, v)(\gamma_3 u + \gamma_4 v)\, dudv;$$

$$\Phi_3(B) = \Delta \iint\limits_D B_0(u, v)(\gamma_1 u + \gamma_2 v)\, dudv; \tag{6}$$

$$\Phi_4(B) = \Delta \iint_D B_0(u, v)\left(\gamma_3^2 u^2 + 2\gamma_3\gamma_4 uv + \gamma_4^2 v^2\right) du dv;$$

$$\Phi_5(B) = \Delta \iint_D B_0(u, v)\left(\gamma_1^2 u^2 + 2\gamma_1\gamma_2 uv + \gamma_2^2 v^2\right) du dv.$$

Зададим эталонные функционалы следующим образом:

$$\Phi_1(B_0) = \iint_D B_0(x, y)\, dxdy; \quad \Phi_2(B_0) = \iint_D B_0(x, y)\, y dxdy;$$

$$\Phi_3(B_0) = \iint_D B_0(x, y)\, x dxdy; \quad \Phi_4(B_0) = \iint_D B_0(x, y)\, xy dxdy; \tag{7}$$

$$\Phi_5(B_0) = \iint_D B_0(x, y)\, y^2 dxdy; \quad \Phi_6(B_0) = \iint_D B_0(x, y)\, x^2 dxdy.$$

Учитывая выражения (6) и (7), получим уравнения

$$\Phi_1(B) = \Delta\Phi_1(B_0); \quad \Phi_2(B) = \Delta\left[\gamma_3\Phi_3(B_0) + \gamma_4\Phi_2(B_0)\right];$$

$$\Phi_3(B) = \Delta\left[\gamma_1\Phi_3(B_0) + \gamma_2\Phi_2(B_0)\right];$$

$$\Phi_4(B) = \Delta\left[\gamma_3^2\Phi_6(B_0) + \gamma_4^2\Phi_5(B_0) + 2\gamma_3\gamma_4\Phi_4(B_0)\right]; \tag{8}$$

$$\Phi_5(B) = \Delta\left[\gamma_1^2\Phi_6(B_0) + \gamma_2^2\Phi_5(B_0) + 2\gamma_1\gamma_2\Phi_4(B_0)\right].$$

Решая систему нелинейных уравнений (8), найдем параметры:

$$\gamma_1 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4QT}}{2Q}; \quad \gamma_2 = H - E\gamma_1;$$

$$\gamma_3 = \frac{-Z \pm \sqrt{Z^2 - 4QS}}{2Q}; \quad \gamma_4 = W - E\gamma_3, \tag{9}$$

где

$$Q = \Phi_6(B_0) - \frac{2\Phi_4(B_0)\Phi_3(B_0)}{\Phi_2(B_0)} + \frac{\Phi_3^2(B_0)\Phi_5(B_0)}{\Phi_2^2(B_0)};$$

$$R = \frac{2\Phi_3(B)\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\Phi_2^2(B_0)}\left[\Phi_4(B_0)\Phi_2(B_0) - \Phi_5(B_0)\Phi_3(B_0)\right];$$

$$T = \frac{\Phi_3^2(B)\Phi_1^2(B_0)\Phi_5(B_0) - \Phi_5(B)\Phi_1(B_0)\Phi_1(B)\Phi_2^2(B_0)}{\Phi_1^2(B)\Phi_2^2(B_0)};$$

$$H = \frac{\Phi_3(B)\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\Phi_2(B_0)}; \quad E = \frac{\Phi_3(B_0)}{\Phi_2(B_0)}; \quad W = \frac{\Phi_2(B)\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\Phi_2(B_0)};$$

$$Z = \frac{2\Phi_2(B)\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\Phi_2^2(B_0)}\left[\Phi_4(B_0)\Phi_2(B_0) - \Phi_5(B_0)\Phi_3(B_0)\right];$$

$$S = \frac{\Phi_2^2(B)\Phi_1^2(B_0)\Phi_5(B_0) - \Phi_5(B)\Phi_1(B_0)\Phi_1(B)\Phi_2^2(B_0)}{\Phi_1^2(B)\Phi_2^2(B_0)}.$$

Заметим, что при вычислении конкретных значений параметры γ_1 и γ_3 выбираются из соображений физической реализуемости оператора нормализации. Зная параметры γ_j, нетрудно определить параметры a_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Оператор нормализации для преобразования (1) можно записать в виде

$$F = F_2F_1[B(x, y)] = F_2F_1[B_0(a_1x^2 + a_2y^2, \quad a_3x^2 + a_4y^2)] =$$
$$= F_2F_1\left\{B_0\left[A^{-1}A\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}\right]\right\} = F_2[B_0(x^2, y^2)] = B_0(x, y), \qquad (10)$$

где матрица $A = \begin{pmatrix}a_1a_2\\ a_3a_4\end{pmatrix}$ — невырожденная.

Используя выкладки, рассмотренные выше, можно определить нормализаторы преобразования и для более сложного вида нелинейных искажений.

Пусть эталонное $B_0(x, y)$ и произвольное изображение $B(x, y)$ связаны соотношением

$$B(x, y) = B_0(a_1x^2 + a_2y^2 + a_3, \quad a_4x^2 + a_5y^2 + a_6), \quad x, y \geqslant 0. \qquad (11)$$

Как и ранее, неизвестные параметры a_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) попытаемся определить с помощью функционалов (2).

Выполним замену переменных в выражении (11): $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3 = u$, $a_4x^2 + a_5y^2 + a_6 = v$, тогда

$$x = \sqrt{\gamma_1u + \gamma_2v + \gamma_3}; \quad y = \sqrt{\gamma_4u + \gamma_5v + \gamma_6}. \qquad (12)$$

Якобиан преобразования (11), очевидно, равен

$$I(u, v) = \frac{\Delta}{\sqrt{\gamma_1u + \gamma_2v + \gamma_3}\sqrt{\gamma_4u + \gamma_5v + \gamma_6}}, \qquad (13)$$

где $\Delta = (\gamma_1\gamma_5 - \gamma_3\gamma_4)/4$.

Исходное семейство преобразований — шестипараметрическое, число независимых функционалов равно семи ($n = 7$).

Выбираем следующий набор функций $K_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \ldots, 7$) для функционалов типа (2):

$$K_1(x, y) = xy; \quad K_2(x, y) = xy^3; \quad K_3(x, y) = x^3y; \quad K_4(x, y) = xy^5;$$
$$K_5(x, y) = x^5y; \quad K_6(x, y) = xy^9; \quad K_7(x, y) = x^9y. \qquad (14)$$

Тогда после замены переменных (12), (13) и с учетом (14) функционалы $\Phi_i(B)$ преобразуются следующим образом:

$$\Phi_1(B) = \Delta\iint\limits_D B_0(u, v)\,dudv;$$

$$\Phi_2(B) = \Delta\iint\limits_D B_0(u, v)(\gamma_4u + \gamma_5v + \gamma_6)\,dudv;$$

$$\Phi_3(B) = \Delta\iint\limits_D B_0(u, v)(\gamma_1u + \gamma_2v + \gamma_3)\,dudv; \qquad (15)$$

$$\Phi_4(B) = \Delta\iint\limits_D B_0(u, v)\left[\gamma_4^2u^2 + \gamma_5^2v^2 + 2(\gamma_4\gamma_5\,uv + \right.$$
$$\left. + \gamma_4\gamma_6u + \gamma_5\gamma_6v) + \gamma_6^2\right] dudv;$$

$$\Phi_5(B) = \Delta \iint_D B_0(u, v) \left[\gamma_1^2 u^2 + \gamma_2^2 v^2 + 2(\gamma_1\gamma_2 uv + \gamma_1\gamma_3 u + \gamma_2\gamma_3 v) + \gamma_3^2\right] du dv;$$

$$\Phi_6(B) = \Delta \iint_D B_0(u, v) \left[\gamma_4^4 u^4 + \gamma_5^4 v^4 + 4(\gamma_4^3\gamma_5 u^3 v + \gamma_4\gamma_5^3 uv^3 + \gamma_4^3\gamma_6 u^3 + \gamma_5^3\gamma_6 v^3) + 6(\gamma_4^2\gamma_5^2 u^2 v^2 + 2\gamma_4^2\gamma_5\gamma_6 u^2 v + 2\gamma_4\gamma_5^2\gamma_6 uv^2 + \gamma_4^2\gamma_6^2 u^2 + \gamma_5^2\gamma_6^2 v^2 + 2\gamma_4\gamma_5\gamma_6^2 uv) + 4(\gamma_4\gamma_6^3 u + \gamma_5\gamma_6^3 v) + \gamma_6^4\right] du dv;$$

$$\Phi_7(B) = \Delta \iint_D B_0(u, v) \left[\gamma_1^4 u^4 + \gamma_2^4 v^4 + 4(\gamma_1^3\gamma_2 u^3 v + \gamma_1\gamma_2^3 uv^3 + \gamma_1^3\gamma_3 u^3 + \gamma_2^3\gamma_3 v^3) + 6(\gamma_1^2\gamma_2^2 u^2 v^2 + 2\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3 u^2 v + 2\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3 uv^2 + \gamma_1^2\gamma_3^2 u^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 v^2 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 uv) + 4(\gamma_1\gamma_3^3 u + \gamma_2\gamma_3^3 v) + \gamma_3^4\right] du dv.$$

Для эталонных функционалов целесообразно взять такие ядра $K_k^0(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, m;\ m = 15)$:

$$K_1^0(x, y) = 1;\quad K_2^0(x, y) = y;\quad K_3^0(x, y) = x;$$
$$K_4^0(x, y) = xy;\quad K_5^0(x, y) = y^2;\quad K_6^0(x, y) = x^2;$$
$$K_7^0(x, y) = xy^2;\quad K_8^0(x, y) = x^2 y;\quad K_9^0(x, y) = x^2 y^2;$$
$$K_{10}^0(x, y) = y^3;\quad K_{11}^0(x, y) = x^3;\quad K_{12}^0(x, y) = xy^3; \tag{16}$$
$$K_{13}^0(x, y) = x^3 y;\quad K_{14}^0(x, y) = y^4;\quad K_{15}^0(x, y) = x^4.$$

Связь между функционалами для эталонных B_0 и входных B ..зображений определяется на основании формул (15), (16) уравнениями:

$$\Phi_1(B) = \Delta\Phi_1(B_0);\quad \Phi_2(B) = \Delta[\gamma_4\Phi_3(B_0) + \gamma_5\Phi_2(B_0) + \gamma_6\Phi_1(B_0)];$$
$$\Phi_3(B) = \Delta[\gamma_1\Phi_3(B_0) + \gamma_2\Phi_2(B_0) + \gamma_3\Phi_1(B_0)];$$
$$\Phi_4(B) = \Delta\{\gamma_4^2\Phi_6(B_0) + \gamma_5^2\Phi_5(B_0) + 2[\gamma_4\gamma_5\Phi_4(B_0) + \gamma_4\gamma_6\Phi_3(B_0) + \gamma_5\gamma_6\Phi_2(B_0)] + \gamma_6^2\Phi_1(B_0)\};$$
$$\Phi_5(B) = \Delta\{\gamma_1^2\Phi_6(B_0) + \gamma_2^2\Phi_5(B_0) + 2[\gamma_1\gamma_2\Phi_4(B_0) + \gamma_1\gamma_3\Phi_3(B_0) + \gamma_2\gamma_3\Phi_2(B_0)] + \gamma_3^2\Phi_1(B_0)\};$$
$$\Phi_6(B) = \Delta\{\gamma_4^4\Phi_{15}(B_0) + \gamma_5^4\Phi_{14}(B_0) + 4[\gamma_4^3\gamma_5\Phi_{13}(B_0) + \gamma_4\gamma_5^3\Phi_{12}(B_0) + \gamma_4^3\gamma_6\Phi_{11}(B_0) + \gamma_5^3\gamma_6\Phi_{10}(B_0)] + 6[\gamma_4^2\gamma_5^2\Phi_9(B_0) + 2\gamma_4^2\gamma_5\gamma_6\Phi_8(B_0) + 2\gamma_4\gamma_5^2\gamma_6\Phi_7(B_0) + \gamma_4^2\gamma_6^2\Phi_6(B_0) + \gamma_5^2\gamma_6^2\Phi_5(B_0) + 2\gamma_4\gamma_5\gamma_6^2\Phi_4(B_0)] + \tag{17}$$

$$+ 4\left[\gamma_4\gamma_6^3\Phi_3(B_0) + \gamma_5\gamma_6^3\Phi_2(B_0)\right] + \gamma_6^4\Phi_1(B_0)\};$$

$$\Phi_7(B) = \Delta\{\gamma_1^4\Phi_{15}(B_0) + \gamma_2^4\Phi_{14}(B_0) + 4\left[\gamma_1^3\gamma_2\Phi_{13}(B_0) + \right.$$
$$\left. + \gamma_1\gamma_2^3\Phi_{12}(B_0) + \gamma_1^3\gamma_3\Phi_{11}(B_0) + \gamma_2^3\gamma_3\Phi_{10}(B_0)\right] +$$
$$+ 6\left[\gamma_1^2\gamma_2^2\Phi_9(B_0) + 2\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3\Phi_8(B_0) + 2\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3\Phi_7(B_0) + \right.$$
$$\left. + \gamma_1^2\gamma_3^2\Phi_6(B_0) + \gamma_2^2\gamma_3^2\Phi_5(B_0) + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2\Phi_4(B_0)\right] +$$
$$+ 4\left[\gamma_1\gamma_3^3\Phi_3(B_0) + \gamma_2\gamma_3^3\Phi_2(B_0)\right] + \gamma_3^4\Phi_1(B_0)\}.$$

В этих соотношениях обозначения эталонных функционалов соответствуют обозначениям интегральных моментов с ядрами (16), например,

$$\Phi_k(B_0) = \Phi_{pq}(B_0) = \iint\limits_D B_0(x, y)\, x^p y^q dx dy.$$

Решая систему уравнений (17), определяем коэффициенты γ_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$). Используя зависимости между γ_j и a_j, можно найти параметры a_j преобразования (11).

Тогда оператор нормализации преобразования (11) имеет вид:

$$F = F_2F_1[B(x, y)] = F_2F_1[B_0(a_1x^2 + a_2y^2 + a_3,$$
$$a_4x^2 + a_5y^2 + a_6)] = F_2F_1\left\{B_0\left[T\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}\right]\right\} = \tag{18}$$
$$= F_2\left\{B_0\left[T^{-1}T\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}\right]\right\} = F_2[B_0(x^2, y^2)] = B_0(x, y).$$

Здесь T — матрица аффинных преобразований с элементами a_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$).

Список литературы: 1. *Путятин Е. П., Долженкова Т. Г.* Вопросы нормализации нелинейных преобразований. Сообщение I.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1980, вып. 24. См. статью в настоящем сб., с. 111—115. 2. *Путятин Е. П.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение I.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1973, вып. 10, с. 82—89. 3. *Путятин Е. П., Трепетин М. С.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение II.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1974, вып. 12, с. 78—85. 4. *Путятин Е. П., Трепетин М. С.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение III.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1974, вып.: 12, с. 85—94. 5. Нормализация изображений при аффинных преобразованиях / *Е. П. Путятин, В. П. Юрченко, В. Б. Левиков, В. А. Берман.*— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1972, вып. 8, с. 44—52.

Поступила 19 декабря 1978 г.