ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ КЕЙНСА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Тютюнник Ю.С.
Науковий керівник – к.т.н., доц. Наумейко И.В., проф. Сова А.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, просп. Науки,14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36) e-mail: d_am@nure.ua

The model of economic union of the two countries that are mutually relate each other through trade is the research object. Research is taken for asymptotic convergence of solutions for business cycle of Keyns` models described with the system of linear differential equations that has a small parameter. Research methods are the methods of setting small, fast or slow variables for the need of asymptotic expansions of solutions for differential equations.

В работе использованы модельные параметры взаимодействия экономик 2-х государств, которые торгуют между собой (импорт и экспорт). Ставится задача с помощью применения малого параметра выяснить влияние этих отношений на динамику всей системы [5].

Общей задачей является моделирование взаимоотношений нескольких стран на уровне макроэкономических потоков, с целью исследования асимптотической сходимости решений системы уравнений модели Кейнса, введя в нее малый параметр для случая, когда международная торговля существенно меньше национального дохода и ставки процента. Исследовать ее на асимптотическую сходимость по введенному таким образом малому параметру путем сравнения с численными результатами [1, 3].

Согласно Кейнсу, общая модель уравнения для i-ой страны (i = 1, 2) выглядят так:

$$\begin{cases} \dfrac{dY_i}{dt} = A_i(I_i - S_i) + Ex_i - \mathrm{Im}_i, \\ \dfrac{dR_i}{dt} = B_i\left(L_i - \dfrac{M_i}{P_i}\right), \end{cases}$$

Так как изначальная система нелинейна, построим её линеаризацию в окрестности стационарной точки X^0. Тогда изначальная система может быть записана так [2]:

$$F(\vec{X}) = F(\vec{X}^0) + J(\vec{X}^0)\cdot(\vec{X} - \vec{X}^0),$$

где $\vec{X} = (Y_1, R_1, Y_2, R_2)$, $\vec{X}^0 = (Y_1^0, R_1^0, Y_2^0, R_2^0)$.

Разложим матрицу J на матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

С учетом при $\tilde{B}$ малого параметра ε получаем:

$$\vec{X}'(t) = \tilde{A}\cdot\vec{X}(t) + \varepsilon\cdot\tilde{B}\cdot\vec{X}(t).$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0.65 & -0.6 \end{pmatrix}, \; \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложим вектор $\vec{X}(t)$ в ряд по малому параметру ε, подставив $\vec{X}(t,\varepsilon)$ в уравнение, получим:

$$\vec{X}'_0(t) + \varepsilon \cdot \vec{X}'_1(t) = \tilde{A} \cdot \vec{X}_0(t) + \varepsilon \cdot \tilde{A} \cdot \vec{X}_1(t) + \varepsilon \cdot \tilde{B} \cdot \vec{X}_0(t) + \varepsilon^2 \cdot \tilde{B} \cdot \vec{X}_1(t) + \bar{O}(\varepsilon^3).$$

Далее формируем систему дифференциальных уравнений в зависимости от коэффициентов при степенях ε. Она имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{X}'_0(t) = \tilde{A} \cdot \vec{X}_0(t) \\ \vec{X}'_1(t) = \tilde{A} \cdot \vec{X}_1(t) + \tilde{B} \cdot \vec{X}_0(t) \end{cases}$$

Решив её, получим:

$$\vec{X}_0(t) = e^{t \cdot \tilde{A}} \cdot \vec{C}_1, \qquad \vec{X}_1(t) = e^{t \cdot \tilde{A}} \cdot \vec{C}_1 + e^{t \cdot \tilde{A}} \cdot \tilde{B} \cdot t \cdot \vec{C}_2.$$

Сравнение решений с численным по методу Рунге-Кутта показало, что применение асимптотического метода правомерно, и не сильно отличается от «точного» решения, полученного численным методом [4] уже при ε=0.01. Таким образом, по результату работы видно, что для исследования динамики систем, в которых присутствуют «быстрые» и «медленные» переменные можно ввести разложение по малому параметру. Это упростит математическую модель и позволит найти приближенное решение, не используя численных методов.

Список используемых источников:

1. Адрианов И.В. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. - М.: Едиториал УРСС, 2004. – 304 с.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 463 с.
4. Дьяконов В.П. Mathematica 8.0 в математических и научно-технических расчетах. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 542 с.
5. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335 с.