ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ У НАПІВКРУЗІ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Шабратко Є.Ю.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки

61166, Харків, просп. Науки, 14, каф. прикладної математики,

тел. (057) 702-14-36, e-mail: yelyzaveta.shabratko@nure.ua

The problem of calculating the stationary flow of a viscous incompressible fluid in a circular region is considered. For its numerical analysis it was proposed to use the *R*-function method and the Galerkin method for non-stationary problems. The results of a computational experiment for a test problem are given.

Розглянемо метод чисельного аналізу перемішування в'язкої рідини, яке викликано системою точкових вихорів. Розв'язання задачі перемішування складається з двох етапів:

- визначення поля швидкостей потоку рідини;
- дослідження траєкторії руху окремих часток рідини.

Нехай рідина заповнює область Ω, яка є напівкругом радіуса r. Рух рідини в області Ω викликаний двома точковими вихорами з інтенсивностями $\Gamma_1(t)$ та $\Gamma_2(t)$, які знаходяться в точках $(x_1,\, y_1)$ та $(x_2,\, y_2)$, t – час.

Задача математичного моделювання потоку рідини в області Ω зводиться до початково-крайової задачі для функції течії $\psi(x,\, y,\, t)$ [1, 2]:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = F(x,\, y,\, t) \text{ в } \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ t \ge 0, \tag{2}$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0,\ (x, y) \in \Omega, \tag{3}$$

де ν – кінематична в'язкість, Δ^2 – бігармонічний оператор,

$$F(x,\, y,\, t) = \Gamma_1(t)\delta(x - x_1,\, y - y_1) + \Gamma_2(t)\delta(x - x_2,\, y - y_2),$$

$\delta(x,\, y)$ – двовимірна дельта-функція Дірака, $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Наближений розв'язок задачі (1) – (3) шукатимемо у вигляді

$$\psi_n(x, y,\, t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(x, y),$$

де $\varphi_k = \omega^2\tau_k$, $k = 1,..., n$, $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій,

$$\omega(x, y) = x + \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{4r^2}(r^2 - x^2 - y^2)^2}\,.$$

Для знаходження функцій $c_k(t)$, $k = 1,..., n$, розв'яжемо систему рівнянь методу Гальоркіна

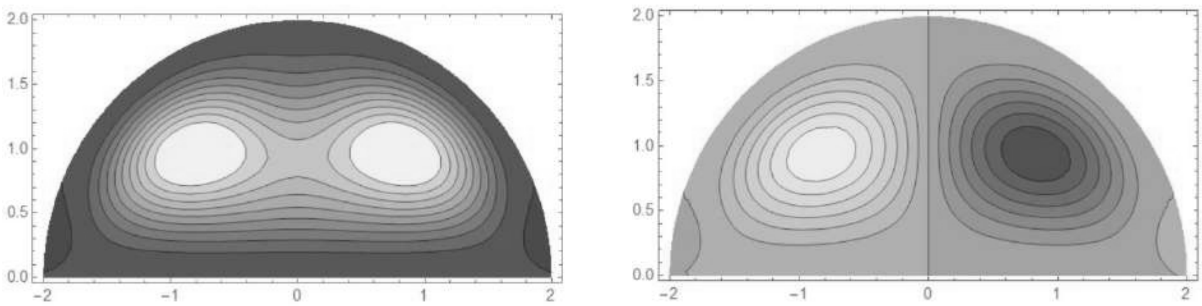
$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta} + \nu\sum_{k=1}^{n} c_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2} = (F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)},\ j=1,2,...,n,$$

за нульових початкових умов.

Розв’язання другої частини задачі перемішування полягає у розв’язанні задачі Коші для рівнянь руху лагранжевої частинки:

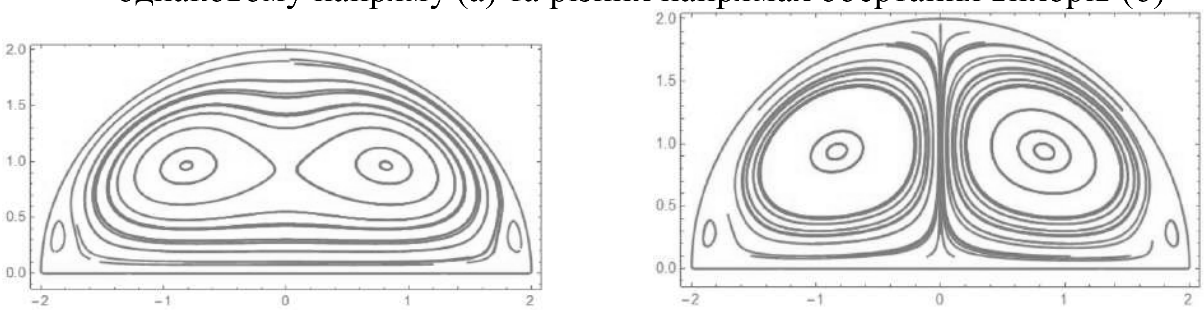
$$\dot{x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,t),\ \dot{y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,t),\ x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0.$$

На рис. 1 зображено лінії рівня у момент часу $t=\frac{\pi}{3}$ при однакових напрямах обертання вихорів (рис. 1 а)) та при різних напрямах обертання (рис. 1 б)), а на рис. 2 зображено траєкторії руху частинок для цих режимів обертання вихорів.



а) б)

Рисунок 1 – Лінії рівня функції течії у момент часу $t=\frac{\pi}{3}$ при однаковому напряму (а) та різних напрямах обертання вихорів (б)



а) б)

Рисунок 2 – Траєкторії руху частинок при однаковому напряму (а) та різних напрямах обертання вихорів (б)

Список використаних джерел:

1. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. Думка, 1982. 552 с.

2. Артюх А.В., Гибкина Н.В., Сидоров М.В. Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода R функций // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 143. С. 67-73.