Н. В. АЛИПОВ, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОЛИХОТОМИЧНЫХ ВОПРОСНИКОВ ДЛЯ УГАДЫВАНИЯ ЧИСЛА С ЛОЖНЫМИ ОТВЕТАМИ

Решение многих задач теории интеллекта связано с тем, что на основании конечного числа экспериментов требуется выделить объект из конечного множества объектов (узнать букву, элемент, число и т. д. [1]). Каждая из таких задач имеет множество решений, поэтому необходимо найти оптимальное решение. Эта проблема является предметом исследования теории вопросников [2], которая за счет введения общего понятия «вопроса» значительно расширила область приложения другой теории — теории поиска [3]. Однако решение перечисленных задач «...имеется лишь в тех случаях, когда... оптимальные вопросники с очевидностью представляют собой оптимальные деревья. В этом случае «вопросы» можно интерпретировать как свободные от ошибок тесты» [3].

При таких предложениях построение оптимальных вопросников сводится к получению различных обобщений алгоритма Хаффмена. Типичной задачей теории вопросников, сводящейся к известным алгоритмам теории поиска для тестов, свободных от ошибок, является задача угадывания задуманного числа, решение которой связано с синтезом помехоустойчивых устройств поиска.

Практика построения помехоустойчивых устройств поиска и преобразования формы информации требует решения задачи синтеза оптимальных полихотомичных вопросников для угадывания задуманного числа в условиях действия различных возмущающих факторов (ложных ответов). Для такой задачи существует решение одного частного случая: в процессе угадывания допускается один несимметричный ложный ответ; вопросник дихотомичный [4].

Приведем решение задачи для общего случая: в процессе угадывания допустим более одного симметричного ложного ответа; вопросник — полихотомичный.

Вопросник — это план (алгоритм — совокупность вопросов, задаваемых в определенной последовательности) сложного эксперимента и состоит из шагов. Каждый его j-й шаг заключается в постановке вопроса: какому из полуоткрытых интервалов $\left[\tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}}, X^j_1\right)$, или $[X^j_1, X^j_2]$, или, ..., или $\left[X^j_k, \tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}+1}\right)$ принадлежит задуманное число X, где $\left[\tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}}, \tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}+1}\right)$ — полуоткрытый интервал неопределенности относительно X, выделенный на $(j-1)$-шаге; $X^j_1, X^j_2, \ldots, X^j_k$ — натуральные числа (опорные точки), находящиеся в соотношении

$$X^j_1 < X^j_2 < \ldots < X^j_k;$$

k — параметр алгоритма, и получении на него ответа.

При этом если $P\{X \geqslant X^j_\rho\} = 1$ и $P\{X \geqslant X^j_{\rho+1}\} = 0$, то правильным будет ответ $X \in [X^j_\rho, X^j_{\rho+1})$ (вспомогательной переменной z присваивается значение ρ), где $\rho = \overline{1, k-1}$; если $P\{X \geqslant X^j_1\} = 0$, то правильным явится ответ $X \in \left[\tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}}, X^j_1\right)$ (переменной z присваивается значение 0); если $P\{X \geqslant X^j_k\} = 1$, то правильным будет ответ $X \in \left[X^j_k, \tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}+1}\right)$ (переменной z присваивается значение k).

В результате реализации вопроса исходный интервал неопределенности $\left[\tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}}, \tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}+1}\right)$ относительно X разбивается на $(k+1)$-полуоткрытый интервал:

$$\overline{A}_j = \left\{\left[\tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}}, X^j_1\right), [X^j_1, X^j_2), \ldots, \left[X^j_k, \tilde{X}^{j-1}_{q_{(j-1)}+1}\right)\right\}.$$

Оптимальным называется вопросник, минимизирующий максимально возможную его длину (количество вопросов, необходимых для распознавания задуманного числа).

Конкретизируем задачу. Будем полагать, что опрашиваемый может давать ложные ответы не более, чем на l соседних шагах вопросника; «пачки» ложных ответов отделены друг от друга не менее, чем H шагами; отвечающий может уменьшать или увеличивать число X не более, чем на a (рассматривается симметричный ложный ответ; a — положительное число); «пачка» ложных ответов формируется только при увеличении или уменьшении X; неизвестное число X принадлежит интервалу $(0, X_{max})$.

В теории поиска точки с характерным признаком на отрезке [0, 1] разработаны принципы алгоритмического подавления случайных возмущений, накладываемых на процесс поиска [5—7]. Чтобы их применять при решении задачи синтеза оптимальных полихотомичных вопросников для угадывания ч... с ложными ответами, опишем ее в терминах теории поиска [6].

С этой целью отрезок [0, 1] разобьем на $(X_{max}+1)$ равных по длине полуоткрытых интервалов

$$\left[0,\ \frac{1}{X_{max}+1}\right),\ \left[\frac{1}{X_{max}+1},\ \frac{2}{X_{max}+1}\right),\ \ldots,\ \left[\frac{k}{X_{max}+1},\ 1\right)$$

и установим: 0 соответствует первому полуоткрытому интервалу; 1 — второму; ...; X_{max} — последнему; неизвестное число X — точке $\in x\left[\frac{X}{X_{max}+1},\ \frac{X+1}{X_{max}+1}\right)$; разбиение $\overline{A}_j$ — разбиению A_j [6].

Вопрос отождествим с экспериментом [6] (они описываются одной и той же системой неравенств, на основании которой формируется множество выходных сигналов $Z=\{0,\ 1,\ ...,\ k\}$).

Поскольку правило формирования ложных ответов описывает не что иное, как A_2 (a, l, н)-последовательность [7] она будет моделировать их формирование.

Первоначально решим задачу синтеза оптимальных полихотомичных вопросников в другой постановке (обратная задача). Будем считать, что максимальная длина вопросника задана (i), необходимо выяснить, какое максимально возможное число может быть угадано за i вопросов с ложными ответами? На основании этого получаем решение прямой задачи.

С учетом последнего значение $(X_{max}+1)$ будет зависеть от параметров i и k вопросника. Эту зависимость, как и в теории поиска, обозначим $\psi_l^2(i,\ k)$.

Описанная интерпретация позволяет сформулировать задачу синтеза оптимальных полихотомичных вопросников в терминах теории поиска точки с характерным признаком на отрезке [0, 1]:

область поиска — отрезок [0, 1]; координата искомой точки в процессе поиска не изменяется; на этот процесс аддитивно накладывается случайное возмущение, обусловленное действием A_2 (a, l, н)-последовательности.

Поиск x осуществляется алгоритмом, состоящим из i шагов и выполняющим одновременно k экспериментов. Эксперименты на j-м шаге описываются разбиением A_j, которое в свою очередь задается α-набором. Множеством значений экспериментов, свободных от ошибок, является Z.

Под действием A_2 (a, l, н)-последовательности вместо $z\in Z$ будем наблюдать случайные величины

$$Y_{A_j}[x,\ A_2(a,\ l,\ н),\ k]=Y_j\in\varphi=\{0,\ 1,\ \ldots,\ k\}.$$

На основании решающих функций d_j^1 и d_j^2 выделяются относительно x новые полуоткрытые интервалы неопределенности:

$$d_j^1:Y_j\to A_j^1;\ \left[\tilde{x}^j_{q_j},\ \tilde{x}^j_{q_j+1}\right)\subset A_j^1;$$

$$d_j^2\colon \{Y_{j-l-1},\ Y_{j-l},\ \ldots,\ Y_j\} \to \boldsymbol{A}_{j-l-1},$$

где $q_j = \overline{0,\ k},\ j \leqslant i$.
Случайные значения Y_j считаются независимыми.

Для заданных параметров $A_2(a,\ l,\ н)$-последовательности и алгоритма с неравенствами $a \geqslant 0$; $н > 0$; $l \geqslant 0$; $i > 1$; $k \geqslant 1$ требуется построить помехоустойчивый алгоритм поиска (найти такие d_j^1, d_j^2, $\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{A}_j^1$ и α-наборы), удовлетворяющий (удовлетворяющие) минимаксному критерию оптимальности

$$L_{z_2} = \min_{\overset{\circ}{z}_1 \in M_1} \max_{x \in [0,\ 1]} \{l_i(x,\ z_1^0)\},$$

где M_1 — множество возможных алгоритмов; $l_i(x,\ \overset{\circ}{z}_1)$ — длина интервала неопределенности относительно x, полученного на i-м шаге $\overset{\circ}{z}_1$-го алгоритма: $\psi_l^2(i,\ k) = 1/L_{z_2}$; $h = L_{z_2}$.

Решение задачи синтеза оптимальных алгоритмов поиска точки с характерным признаком в условиях действия $A_2(a,\ l,\ н)$-последовательности осуществим путем исследования конечного числа исходов, возникающих в процессе поиска. Это позволит нам определить функции d_j^1, d_j^2 и построить для каждого шага алгоритма α-наборы.

Функция d_j^1 устанавливает отображение $d_j^1 : Y_j \to \boldsymbol{A}_j^1$ на основании только одного случайного значения Y_j. Подобная ситуация всегда возникает после реализации первого шага алгоритма, а также при выполнении $(j + z_0)$-го шага, когда $z_0 < l$.

На основании принципа «пересечения» для этих шагов будут иметь место следующие утверждения.

1. Если на первом шаге алгоритма в точках

$$x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_q^1,\ \ldots,\ x_k^1$$

выполнены эксперименты и получен один из исходов:

а) $x(t_1) < x_1^1$; б) $x(t_1) \in [x_{q-1}^1,\ x_q^1)$; в) $x(t_1) > x_k^1$, где $q = \overline{2,\ k}$, $x(t_1) = x + \xi(t_1)$; t_1 — момент начала поиска; $\xi(t_1)$ — случайное возмущение в виде $A_2(a,\ l,\ н)$-последовательности, то новым полуоткрытым интервалом неопределенности для исхода а) является $[x_0^{1,1},\ x_1^{1,2})$; для исхода б) — $[x_{q-1}^{1,1},\ x_q^{1,2})$; для исхода в) — $[x_k^{1,1},\ 1)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$x_\beta^{1,1} = \begin{cases} x_\beta^1 - ah, & ah \leqslant x_0^1; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_{\beta+1}^{1,2} = \begin{cases} x_{\beta+1}^1 + ah, & x_{\beta+1}^1 + ah \leqslant 1; \\ x_{k+1}^1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\beta = \overline{0,\ k}$; $x_0^1 = 0$; $x_{k+1}^1 = 1$.

2. Если в результате выполнения ρ-го шага алгоритма установлено, что $x \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$, где $q = \overline{0, k}$, а на $(\rho + z_1)$-м шаге алгоритма при размещении составляющих α-набора в точках, для которых имеют место соотношения:

$$x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} \in (x_q^\rho, x_{q+1}^\rho); \ \gamma_1 = \overline{0, k}, \ z_1 < l,$$

получен исход $x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1})$, то новым полуоткрытым интервалом неопределенности будет $[x_{\gamma_1}^{\rho+z_1, 1}, x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1, 2})$, для которого

$$x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} = \begin{cases} x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} - ah, \ x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} - ah \geqslant x_q^{\rho, 1}; \\ x_q^{\rho, 1} \ \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1} = \begin{cases} x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1} + ah, \ x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1} + ah \leqslant x_{q+1}^{\rho, 2}; \\ x_{q+1}^{\rho, 2} \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Истинность утверждения вытекает из принципа «пересечения».

При сопоставлении результатов экспериментов, разнесенных во времени не более, чем на н шагов алгоритма, имеют место такие утверждения.

3. Если $x(t_\rho) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$, где $q = \overline{0, k}$, а в результате выполнения $(\rho + z_1)$-го шага алгоритма получен исход

$$x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1}),$$

при котором $\gamma_1 = \overline{0, k}$,

$$l \leqslant z_1 \leqslant \text{н}, \ x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} \in (x_q^\rho, x_{q+1}^\rho),$$

то в зависимости от q и γ_1 для отмеченной точки справедливо одно из соотношений:

$$x \in \begin{cases} [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho), & \text{если } q = \overline{1, k-1} \text{ и } \gamma_1 = \overline{1, k-1}; \\ [x_q^{\rho, 1}, x_{q+1}^\rho), & \text{если } q = \overline{0, k}, \ \gamma_1 = 0; \\ [x_q^\rho, x_{q+1}^{\rho, 2}), & \text{если } q = \overline{0, k}, \ \gamma_1 = k. \end{cases}$$

Действительно, пусть $q = \overline{1, k-1}$, $\gamma_1 = \overline{1, k-1}$,

$$x(t_\rho) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho), \ x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1}).$$

Тогда на основании соотношения $[x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1}) \subset [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$ устанавливаем истинность предложений:

$$x(t_\rho) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho); \ x(t_{\rho+z_1}) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho).$$

Поскольку $z_1 \geqslant l$, то согласно свойствам $A_2(a, l, \text{н})$-последовательности, соотношения $\xi(t_\rho) \neq 0$; $\xi(t_{\rho+z_1}) \neq 0$ не могут быть истинными, поэтому $x \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$, что и доказывает первое соотношение для полуоткрытого интервала относительно x; доказательство других соотношений выполняется по такой же схеме.

4. Если $x(t_\rho) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$, а при выполнении $(\rho + z_1)$-го шага

алгоритма некоторые составляющие α-набора распределены так, что $x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} \leqslant x_q^\rho$, $x_\beta^{\rho+z_1} \geqslant x_{q+1}^\rho$, $l \leqslant z_1 \leqslant н$, то для исхода $x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} \leqslant x(t_{\rho+z_1}) < x_\beta^{\rho+z_1}$ имеет место ссотношение $x \in [x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_\beta^{\rho+z_1})$, для исхода $x(t_{\rho+z_1}) < x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}$ справедливо выражение $x \in [x_q^{\rho, 1}, x_{q+1}^\rho)$, для исхода $x(t_{\rho+z_1}) \geqslant x_\beta^{\rho+z_1}$ соотношение $x \in [x_q^\rho, x_{q+1}^{\rho, 2})$.

Следует отметить, что для исходов $x(t_{\rho+z_1}) < x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}$, $x(t_{\rho+z_1}) \geqslant x_\beta^{\rho+z_1}$ возникает противоречие, которое свидетельствует о действии помехи на $(\rho, \rho + z_1 - 1)$ либо на $(\rho + z_1, \rho + z_1 + l)$ шагах алгоритма. Поэтому необходимо совершить $z_2 (z_2 \geqslant l)$ дополнительных шагов алгоритма и сопоставить согласно принципу «повторных сравнений» исходы, полученные на $(\rho + z_1)$ и $(\rho + z_1 + z_2)$ шагах. Если исходы совпадают, то помеха действовала на $(\rho, \rho + z_1 - 1)$ шагах, если не совпадают — на $(\rho + z_1, \rho + z_1 + z_2 - 1)$ шагах алгоритма.

Для первого исхода полуоткрытым интервалом неопределенности будет $[x_q^{\rho, 1}, x_{q+1}^\rho)$; для второго — $[x_q^\rho, x_{q+1}^{\rho, 2})$. Поскольку на основании свойств $A_2(a, l, н)$-последовательности помехи в интервале $(0, н - z_1 - z_2)$ быть не может, то, применяя на $(\rho + z_1 + z_2 + 1, \rho + н)$ шагах непомехоустойчивый, затем помехоустойчивый алгоритм, разобьем интервал неопределенности, выделенный на $(\rho + z_1 + z_2)$-м шаге, на

$$Q'' = (k+1)^{н - z_1 - z_2} \Psi_l^2 (i - \rho - н, k)$$

равных частей.

В процессе уменьшения интервала неопределенности возможен случай, когда составляющие α-набора размещаются в интервалах

$$(x_q^{\rho, 1}, x_q^\rho), \quad (x_q^\rho, x_{q+1}^\rho), \quad (x_{q+1}^\rho, x_{q+1}^{\rho, 2}).$$

Для такого размещения составляющих α-набора справедливо утверждение.

5. Если $x(t_\rho) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$ и на $(\rho + z_1)$-м шаге алгоритма составляющие α-набора размещены так, что

$$x_q^{\rho,1} < x_1^{\rho+z_1} < \ldots < x_{\gamma_1}^{\rho+z_1} \leqslant x_q^\rho < x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1} < \ldots < x_{\beta-1}^{\rho+z_1} <$$
$$< x_{q+1}^\rho \leqslant x_\beta^{\rho+z_1} < \ldots < x_k^{\rho+z_1} < x_{q+1}^{\rho,2}; \; l \leqslant z_1 \leqslant н,$$

то для исхода $x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\Delta_3}^{\rho+z_1}, x_{\Delta_3+1}^{\rho+z_1})$, где $\Delta_3 = \overline{0, \gamma_1 - 1}$, имеет место соотношение $x \in [x_{\Delta_3}^{\rho+z_1}, x_{q+1}^\rho)$; для исхода $x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_{\gamma_1+1}^{\rho+z_1})$ справедливо выражение $x \in [x_{\gamma_1}^{\rho+z_1}, x_{q+1}^\rho)$; для исхода

$$x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\Delta_1}^{\rho+z_1}, x_{\Delta_1+1}^{\rho+z_1}), \; \Delta_1 = \overline{\gamma_1 + 1, \beta - 2} -$$

соотношение $x \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$; для исхода $x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\beta-1}^{\rho+z_1}, x_\beta^{\rho+z_1})$ — выражение $x \in [x_q^\rho, x_\beta^{\rho+z_1})$; для исхода $x(t_{\rho+z_1}) \in [x_{\Delta_2}^{\rho+z_1}, x_{\Delta_2+1}^{\rho+z_1})$, $\Delta_2 = \overline{\beta, k}$ — соотношение $x \in [x_q^\rho, x_{\Delta_2+1}^{\rho+z_1})$.

Истинность этого утверждения устанавливается на основании утверждений 3, 4.

Утверждения 1—5 позволяют для любых возможных исходов построить d_j^1, d_j^2 и тем самым выделить новый интервал неопределенности относительно x.

Из утверждения 4 следует, что при размещении составляющих α-набора на отрезке $[x_q^{\rho,1}, x_{q+1}^{\rho,2})$ необходимо всякий раз определять: сколько составляющих α-набора необходимо соответственно размещать в полуоткрытых интервалах

$$[x_q^{\rho,1}, x_q^{\rho}),\ [x_q^{\rho}, x_{q+1}^{\rho}),\ [x_{q+1}^{\rho}, x_{q+1}^{\rho,2}).$$

Последующие утверждения и позволяют решать эту задачу (приводятся без доказательств).

6. Если $x(t_\rho) \in [x_q^\rho, x_{q+1}^\rho)$, а при выполнении $(\rho + z_1)$-го шага алгоритма имеют место соотношения $z_1 \geqslant l$, $\text{н} - z_1 > l$, то при условии, что

$$x_q^\rho - x_q^{\rho,1} \leqslant h(\gamma_1 + 1)(k - \beta_1 + 1)(k+1)^{\text{н}_1 - z_1 - 1}\Psi_l^2(i - \rho - \text{н},\ k)$$

и $\gamma_1 \neq 0$, необходимо γ_1 составляющих α-набора разместить так, чтобы $x_{\Delta_3}^{\rho+z_1} < x_q^\rho$; $\Delta_3 = \overline{1,\ \gamma_1}$, а в случае истинности неравенств

$$x_q^\rho - x_q^{\rho,1} < h(k - \beta_1 + 1)(k+1)^{\text{н}_1 - z_1 - 1}\Psi_l^2(i - \rho - \text{н},\ k);$$

$$x_q^\rho - x_q^{\rho,1} > hk^2(k+1)^{\text{н}_1 - z_1 - 2}\Psi_l^2(i - \rho - \text{н},\ k)$$

положить $\gamma_1 = 1$ и разместить первую составляющую α-набора так, чтобы $x_1^{\rho+z_1} = x_q^\rho$; при условии, что

$$x_{q+1}^{\rho,2} - x_{q+1}^\rho \leqslant h(k + 2 - \beta)(k - \beta_1 + 1)(k+1)^{\text{н}_1 - z_1 - 1} \times \\ \times \Psi_l^2(i - \rho - \text{н},\ k),$$

$\beta < (k+1)$, расположить составляющие α-набора, начиная с $(\gamma_1 + 1)$-й так, чтобы

$$x_{\Delta_2}^{\rho+z_1} > x_{q+1}^\rho,\ \Delta_2 = \overline{\beta,\ k};\ x_{\Delta_4}^{\rho+z_1} \in (x_q^\rho,\ x_{q+1}^\rho),$$

$\Delta_4 = \overline{\gamma_1 + 1,\ \beta - 1}$, а в случае истинности неравенств

$$x_{q+1}^{\rho,2} - x_{q+1}^\rho < h(k - \beta_1 + 1)(k+1)^{\text{н}_1 - z_1 - 1}\Psi_l^2(i - \rho - \text{н},\ k);$$

$$x_{q+1}^{\rho,2} - x_{q+1}^\rho > hk^2(k+1)^{\text{н}_1 - z_1 - 1}\Psi_l^2(i - \rho - \text{н},\ k)$$

положить $\beta = k$ и разместить составляющие α-набора согласно соотношениям

$$x_\beta^{\rho+z_1} \leqslant x_{q+1}^\rho;\ x_{\Delta_4}^{\rho+z_1} \in (x_q^\rho,\ x_{q+1}^\rho),\ \Delta_4 = \overline{\gamma_1 + 1,\ \beta - 1},$$

где

$$\text{н}_1 = \begin{cases} \text{н}, & i - \rho - \text{н} \geqslant 0; \\ i - \rho, & i - \rho - \text{н} < 0; \end{cases}$$

β_1 — первое целое число, для которого справедливо соотношение

$$h\,[\beta_1 (k+1)^{н-z_1+z_2-1}\Psi_l^2 (i-\rho-н,\ k)] \geqslant x_{q+1}^{\rho} - x_q^{\rho},$$
$$z_2 \geqslant l-1,\ z_1+z_2+1 \leqslant н.$$

Закономерность распределения составляющих α-набора для $z_1 < l$ либо $z_2 < l$ устанавливает следующее утверждение.

7. Если $x(t_\rho) \in [x_q^\rho,\ x_{q+1}^\rho)$ и справедливы соотношения $z_1 < l$, $z_2 < l$, то при выполнении $(\rho + z_1)$-го и $(\rho + z_1 + z_2)$-го шагов алгоритма составляющие α-набора распределяются таким образом, чтобы

$$x_{\gamma_2}^{\rho+z_1} \in (x_q^\rho,\ x_{q+1}^\rho);\quad x_{\gamma_3}^{\rho+z_1+z_2} \in [x_\Delta^{\rho+z_1},\ x_{\Delta+1}^{\rho+z_1}),$$

где

$$\gamma_2,\ \gamma_3 = \overline{1,\ k},\ x(t_{\rho+z_1}) \in [x_\Delta^{\rho+z_1},\ x_{\Delta+1}^{\rho+z_1}),\ \Delta = \overline{0,\ k}.$$

Справедливость утверждения обосновывается принципом «повторных сравнений» [7].

Утверждение 5 устанавливает закономерность выбора параметров γ_1 и β только когда $н - z_1 > l$. Для всех других случаев $(н - z_1 \leqslant l)$ распределение составляющих α-набора выполняется согласно следующим утверждениям.

8. Если $н - z_1 = l$ и имеют место соотношения

$$x(t_\rho) \in [x_q^\rho,\ x_{q+1}^\rho);\ x(t_{\rho+z_0}) \in [x_{\Delta_0}^{\rho+z_0},\ x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}),\ z_1 > z_2,$$
$$н - (z_1 - z_0) > l,\ z_0 = \delta,\ \delta = 1,\ 2,\ \ldots;\ x_q^\rho < x_{\Delta_0}^{\rho+z_0},\ x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0} < x_{q+1}^\rho;$$
$$x_q^\rho - x_{\Delta_0}^{\rho+z_0,1} < h\,[(k-\beta_1+1)(k+1)^{н-z_1-1}\Psi_l^2 (i-\rho-н,\ k)];$$
$$x_{\Delta_0}^{\rho+z_0} - x_{\Delta_0}^{\rho+z_0,1} < h\,[(\gamma_1+1)(k+1-\beta_1)(k+1)^{н-l-1} \times$$
$$\times\ \Psi_l^2 (i-\rho-н-\delta,\ k)];$$
$$x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0,2} - x_{q+1}^\rho < h\,[(k-\beta_1+1)(k+1)^{н-z_1-1}\Psi_l^2 (i-\rho-н,\ k)];$$
$$x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0,2} - x_{\Delta_0}^{\rho+z_0} < [(k+2-\beta)(k-\beta_1+1)(k+1)^{н-l-1} \times$$
$$\times\ \Psi_l^2 (i-\rho-н-\delta,\ k)],$$

то при условии, что $\gamma_1 < k$, $\beta > 1$, расположить составляющие α-набора таким образом, чтобы

$$x_1^{\rho+z_1} = x_q^\rho;\ x_{\Delta_1}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0},\ x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}),\ \Delta_1 = \overline{2,\ k}$$

либо

$$x_{\Delta_2}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0},\ x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}),\ \Delta_2 = \overline{1,\ k-1};\quad x_k^{\rho+z_1} = x_{q+1}^\rho;$$

при истинности соотношений $\gamma_1 > k$, $\beta \geqslant 1$ расположить согласно выражениям

$$x_1^{\rho+z_1} = x_q^\rho;\ x_{\Delta_1}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0},\ x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0});$$

в случае истинности неравенств $\gamma_1 < k$, $\beta < 1$ разместить составляющие α-набора так, чтобы

$$x_{\Delta_2}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}); \quad x_k^{\rho+z_1} = x_{q+1}^{\rho},$$

а при условии, что $\gamma_1 > k$, $\beta < 1$, расположить составляющие α-набора согласно соотношениям

$$x_1^{\rho+z_1} = x_q^{\rho}; \; x_k^{\rho+z_1} = x_{q+1}^{\rho+z_0}; \; x_{\Delta_3}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}), \; \Delta_3 = \overline{2, k-1}.$$

Действительно, так как $\gamma_1 - \beta + 1 > 0$, то в случае нарушения предложений утверждения оценка алгоритма на отрезках

$$[x_{\Delta_0}^{\rho+z_0,1}, x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}], \; [x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0,2}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}]$$

будет не хуже оптимального алгоритма в том случае, когда составляющих α-набора будет больше, чем k, что противоречит предположению об α-наборе и доказывает утверждение 8.

В том случае, когда $x_q^{\rho} = x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}$ либо $x_{q+1}^{\rho} = x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}$, справедливо следующее утверждение.

9. Если $\text{н} - z_1 \leqslant l$ и имеют место соотношения

$$x(t_\rho) \in [x_q^{\rho}, x_{q+1}^{\rho}); \; x(t_{\rho+z_0}) \in [x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}), \; z_1 > z_0,$$

$$\text{н} - (z_1 - z_0) > l, \; z_0 = \delta, \; \delta = 1, 2, \ldots; \; x_{\Delta_0}^{\rho+z_0} = x_q^{\rho}$$

либо

$$x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0} = x_{q+1}^{\rho}; \; x_q^{\rho} \in [x_{\Delta_0}^{\rho+z_0,1}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0,2}],$$

либо $x_{q+1}^{\rho} \in [x_{\Delta_0}^{\rho+z_0,1}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0,2}]$ и справедливы неравенства

$$0 < x_q^{\rho} - x_q^{\rho,1} < h(k - \beta_1 + 1), \; (k+1)^{\text{н}-z_1-1} \Psi_l^2 (i - \rho - \text{н}, k);$$

$$hQ_2 \geqslant x_1^{\rho+z_1,2} - x_q^{\rho,1}$$

либо

$$x_{q+1}^{\rho,2} - x_{q+1}^{\rho} < h(k + 1 - \beta_1)(k+1)^{\text{н}-z_1-1} \Psi_l^2 (i - \rho - \text{н}, k);$$

$$hQ_2 \geqslant x_{q+1}^{\rho,2} - x_k^{\rho+z_1,1},$$

то разместить составляющие α-набора таким образом, чтобы

$$x_{\Delta_5}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}), \; \Delta_5 = \overline{1, k},$$

а в случае ложности этих неравенств составляющие α-набора расположить согласно соотношениям

$$x_1^{\rho+z_1} = x_q^{\rho}; \; x_{\Delta_1}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}),$$

$\Delta_1 = \overline{2, k}$ либо $x_k^{\rho+z_1} = x_{q+1}^{\rho}$;

$$x_{\Delta_2}^{\rho+z_1} \in (x_{\Delta_0}^{\rho+z_0}, x_{\Delta_0+1}^{\rho+z_0}), \; \Delta_2 = \overline{1, k-1},$$

где Q_2 — оценка оптимального алгоритма за оставшиеся $(i - z_1)$ шагов алгоритма.

Утверждения 6—9 устанавливают оптимальные закономерности распределения составляющих α-набора на различных шагах алгоритма. Такое распределение на каждом шаге алгоритма, как это следует из минимаксного критерия, приведет к построению оптимального алгоритма поиска в условиях случайных возмущений точки с характерным признаком на отрезке [0, 1], а следовательно, к построению оптимального полихотомичного вопросника угадывания числа с ложными ответами.

Построение i-шагового алгоритма поиска организуем по следующей схеме.

1. Построить $(i-1)$-шаговый алгоритм поиска точки в условиях действия A_2 $(a, l, н)$-последовательности. Индексу z' присвоить значение, равное единице.

2. Сформировать возможный исход. Если все исходы сформированы, то перейти на п. 7, иначе — на п. 3.

3. Определить оценку Q_2, затем, используя утверждения 6—9, распределить составляющие α-набора в интервале неопределенности и на основании утверждений 1—5 сформировать новый интервал неопределенности.

4. Положить $z' = z' + 1$, и если $z' \leqslant i$, то перейти на п. 5, иначе — на п. 6.

5. Сформировать возможный исход на z'-м шаге алгоритма. Если все исходы сформированы, то перейти на п. 6, иначе — на п. 3.

6. Положить $z' = z' - 1$, и если $z' = 1$, то перейти на п. 2, иначе — на п. 5.

7. Местоположения точек экспериментов для всех исходов найдены (алгоритм построен).

Приведенная схема позволяет при любых параметрах a, l, $н$ построить оптимальный полихотомичный вопросник для угадывания задуманного числа с симметричными ложными ответами.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Математические средства.—Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984.—140 с. 2. *Пархоменко П. П.* Теория вопросников (обзор)//Автоматика и телемеханика.—1970.—№ 4.—С. 140—159. 3. *Альсведе Р., Вегенер Н.* Задачи поиска.—М.: Мир. 1982.—355. 4. *Стахов А. П.* Введение в алгоритмическую теорию измерений.—М.: Сов. радио, 1977.—286 с. 5. *Алипов Н. В.* Принцип «пересечения» и его применение при алгоритмическом синтезе преобразователей информации//Пробл. создания преобразователей формы информации.—1980.—I. С. 70—73. 6. *Алипов Н. В.* Помехоустойчивые алгоритмы функционирования преобразователей формы информации//Пробл. создания преобразователей формы информации.—1984.—I.—С. 107—110. 7. *Алипов Н. В.* Об одном подходе к построению оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования, нечувствительных к случайным импульсным последовательностям//Тр. III Всесоюз. симпоз. «Проблемы создания преобразователей формы информации». К.:—1976.— Ч. 1. С. 77—81.

Поступила в редколлегию 14.10.85.