

К РАСЧЕТУ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Чумаков В.И.

докт. техн. наук, профессор, профессор каф. ПЕЕА,

ORCID 0000 0001 6418 8688

Харченко О.И.

канд. техн. наук, старший научный сот рудник, докторант каф. МИРЭС

Харковский национальный университет радиоэлектроники,

e-mail: volodymyr.chumakov@nure.ua

Введение

В частотном и временном анализе линейных электрических цепей используются соответственно коэффициент передачи и импульсная характеристика цепи [1]. Расчет этих функций для линий с распределенными параметрами дает возможность вычислить распределения напряжения и тока в линии при произвольных импульсных воздействиях, а также анализировать переходные процессы в линии. В работе приведено решение системы телеграфных уравнений линии при произвольной нагрузке. Показано, что анализ еще более упрощается, если применить к изображению телеграфных уравнений повторное преобразование Лапласа и таким образом реализовать основное преимущество операторного метода: переход от системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений.

1. Построение модели.

Математическая модель линии с распределенными параметрами представляется системой телеграфных уравнений, которая для линии без потерь выглядит следующим образом [2,3]

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}, \quad (1)$$

где функции $u = u(x, t)$ и $i = i(x, t)$ – мгновенные значения напряжения и тока в линии, а величины L и C представляют собой погонные индуктивность и емкость линии. Начальные условия записываются в виде

$$u(x, 0) = u(0), \quad i(x, 0) = i(0). \quad (2)$$

Граничные условия сформулируем, исходя из того, что дальнейшее решение задачи будет проводиться операторным методом. Рассмотрим случай формирующей линии без потерь длиной l с волновым сопротивлением Z_0 в режиме произвольной комплексной нагрузки на выходе z_1 . На входе линии действует источник напряжения $e(t)$ (рис. 1). Тогда граничные условия задачи представляются следующим образом

$$u(0, t) = e(t), \quad i(0, t) = e(t)/z_{in}, \quad (3)$$

где z_{in} – входное сопротивление линии.

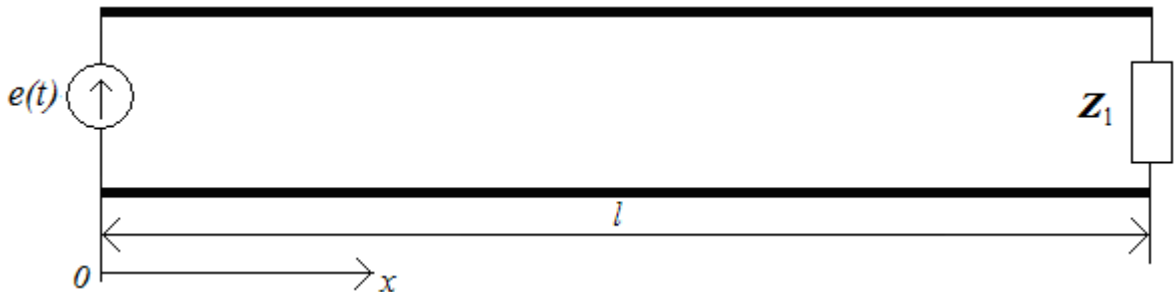


Рис. 1. Линия без потерь с произвольной комплексной нагрузкой

Применим преобразование Лапласа к системе (1) по переменной t и получим

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = pLI - Li(0) \\ -\frac{dI}{dx} = pCU - Cu(0) \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь U и I – лапласовы изображения напряжения и тока. Очевидно, что изображения представляют собой функции координаты x и комплексного переменного p . Вторые слагаемые в правой части уравнений (4) представляют

собой значения напряжений и токов в момент времени $t = 0$ и отражают важное преимущество операторного метода, которое заключается в автоматическом учете начальных условий задачи. В рассматриваемой задаче примем нулевые начальные условия, т.е (2) принимает вид $u(0) = 0, i(0) = 0$.

Далее продолжим решение, считая, что изображения U и I удовлетворяют условиям Дирихле [4], и поэтому к ним допустимо повторное преобразование Лапласа по переменной x . Применим к системе (4) указанное преобразование и получим

$$\begin{cases} s\hat{U} + pL\hat{I} = U(0) \\ pC\hat{U} + s\hat{I} = I(0) \end{cases} \quad (5)$$

Функции \hat{U} и \hat{I} здесь представляют собой результат повторного преобразования Лапласа изображений U и I , $s = \alpha + j\beta$ – комплексная переменная. В правой части (5) записаны изображения граничных условий, которые получаются при повторном вычислении интеграла Лапласа от изображений U и I . Вновь подчеркнем важное достоинство операторного метода: граничные условия задачи учитываются автоматически как результат расчета изображений напряжения и тока. Применив к (3) преобразование Лапласа, запишем изображение граничных условий

$$U(0) = E(p), I(0) = E(p)/Z_{in} \quad (6)$$

Здесь $E(p)$ – изображение функции входного воздействия, Z_{in} – входное операторное сопротивление линии, нагруженной на Z_l , которое выражается формулой

$$Z_{in} = Z_0 \left(1 + ke^{-2\gamma l} \right) / \left(1 - ke^{-2\gamma l} \right) \quad (7)$$

Параметр $k = (Z_l - Z_0)/(Z_l + Z_0)$ в (7) представляет собой коэффициент отражения напряжения от нагрузки линии, волновое сопротивление линии равно $Z_0 = \sqrt{L/C}$, постоянная распространения $\gamma = p\sqrt{LC}$, скорость распространения волны в линии $V = 1/\sqrt{LC}$.

Передаточная функция линии

Система (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решение для напряжения найдем методом Крамера, составив определители из коэффициентов и правых частей системы (5)

$$\hat{U} = \frac{\begin{vmatrix} U(0) & pL \\ I(0) & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & pL \\ pC & s \end{vmatrix}} = \frac{sU(0) - pLI(0)}{s^2 - p^2LC} = \frac{sU(0) - pLI(0)}{s^2 - \gamma^2}.$$

Подставляя сюда (6), получим

$$\hat{U} = \frac{E(p)}{1 + ke^{-2\gamma l}} \left(\frac{1}{s + \gamma} + \frac{ke^{-2\gamma l}}{s - \gamma} \right). \quad (8)$$

Дальнейшее решение представляет собой обратный процесс перехода от изображения (8) к оригиналу напряжения в линии. Вначале осуществим обратное преобразование Лапласа по переменной s . Заметив, что зависимость от s имеется только в последней скобке (9), получим

$$U = \frac{E(p)}{1 + ke^{-2\gamma l}} \left[e^{-\gamma x} + ke^{-\gamma(2l-x)} \right]$$

или, домножив числитель и знаменатель на $1 - ke^{-2\gamma l}$,

$$U = \frac{E(p)}{1 - k^2 e^{-4\gamma l}} \left[e^{-\gamma x} + ke^{-\gamma(2l-x)} - ke^{-\gamma(2l+x)} - k^2 e^{-\gamma(4l-x)} \right] \quad (9)$$

Первое и третье слагаемые в квадратных скобках (9) отвечают соответственно прямой, а второе и четвертое - обратной волне в линии. Учтем, что при $|k| < 1$ и $\text{Re}(p) < 0$ имеем $|k^2 e^{-4\gamma l}| < 1$. Это позволяет построить ряд

$$\frac{1}{1 - k^2 e^{-4\gamma l}} = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} e^{-4n\gamma l}. \quad (10)$$

Подстановка этого разложения в (9) дает окончательно изображение напряжения

$$\begin{aligned}
U = E(p) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \left\{ e^{-\gamma(4nl+x)} - ke^{-\gamma[2l(2n+1)+x]} \right\} + \\
+ E(p) \sum_{n=0}^{\infty} k^{(2n+1)} \left\{ e^{-\gamma[2l(2n+1)-x]} - ke^{-\gamma[4l(n+1)-x]} \right\}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Отметим, что наличие сомножителя $1 - k^2 e^{-4\gamma l}$ в знаменателе изображения является признаком периодичности оригинала с периодом $T = 4l/V$. Передаточную функцию получим, подставив в (11) вместо изображения произвольного воздействия $E(p)$ изображение δ -функции

$$\begin{aligned}
G = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \left\{ e^{-\gamma(4nl+x)} - ke^{-\gamma[2l(2n+1)+x]} \right\} + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} k^{(2n+1)} \left\{ e^{-\gamma[2l(2n+1)-x]} - ke^{-\gamma[4l(n+1)-x]} \right\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Как известно, оригинал передаточной функции представляет собой импульсную характеристику, для расчета которой используем свойство линейности преобразования Лапласа и теорему сдвига оригинала [5]

$$\begin{aligned}
g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \left\{ \delta \left[t - \frac{4nl+x}{V} \right] - k \delta \left[t - \frac{2l(2n+1)+x}{V} \right] \right\} + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} k^{(2n+1)} \left\{ \delta \left[t - \frac{2l(2n+1)-x}{V} \right] - k \delta \left[t - \frac{4l(n+1)-x}{V} \right] \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Выводы

Результаты настоящей работы демонстрируют возможности операторного метода для решения уравнений в частных производных, обеспечивая переход к алгебраическим уравнениям путем повторного преобразования Лапласа по второй переменной. Такое преобразование может быть выполнено многократно в случае функции большего числа переменных. Показано, что преобразование Лапласа позволяет автоматически учитывать как начальные условия, так и граничные условия задачи, причем обратный переход к оригиналу существенно

облегчается, если использовать свойства преобразования Лапласа и теоремы операторного исчисления.

Список литературы:

1. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей / Издание 2-е, переработ. и доп., – Л.: «Энергия», 1972. – 816 с.
2. P.W Smith. Transient Electronics: Pulsed Circuit Technology. 1st Edition, Wiley, 2002, 288 p.
3. Конторович М.И.. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Наука, 1964, 328 с.
4. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Том 1.-Харків: «Компанія Сміт», 2003.-580 с.
5. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс. — М.: Высшая школа, 1972. — 280 с

Тематика: Інші професійні науки

АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ МОДИФІКУВАННЯ СТАЛІ ЛУЖНО-ЗЕМЕЛЬНИМИ МЕТАЛАМИ В ПРИСУТНОСТІ АЛЮМІНІЮ І КРЕМНІЮ

Чупринов Євген Валерійович

Криворізький металургійний інститут НМетАУ, к.т.н., доцент,
<https://orcid.org/0000-0001-8605-3434>, itchupa@gmail.com

Горяєва Олександра Сергіївна

Криворізький металургійний інститут НМетАУ, студентка,
aleksandra.goryaeva@gmail.com

Модифікування сталі є важливим етапом на шляху отримання готової сталеплавильної продукції заданого хімічного складу і необхідних механічних властивостей. Переважна більшість марок сталей згідно з чинними