УДК 510.62

*Д. Э. СИТНИКОВ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО,* д-р техн. наук

# О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Аксиомам булевой алгебры удовлетворяют некоторые математические структуры, имеющие большое значение для теории интеллекта. К таким структурам относятся, например, алгебра логики, алгебра множеств, алгебра конечных предикатов [1]. Часто зависимости между элементами булевой алгебры удается описать уравнением или системой уравнений, причем уравнение (или уравнения) может содержать как неизвестные элементы (переменные), так и известные (параметры). Интересно выяснить, при каких условиях уравнение (или система уравнений) имеет решение, а также условия, при которых это решение единственно. Наконец, необходимо уметь находить решение уравнения (или системы уравнений). В работе [2] рассмотрено решение уравнений алгебры множеств средствами теории интеллекта.

Например, дана система уравнений: $A \cap X = B$, $A \cup X = C$, где $A$, $B$, $C$ — данные множества. Требуется найти условия для $A$, $B$, $C$, при которых эта система имеет единственное решение, и записать это решение (выразить множество $X$ через множества $A$, $B$, и $C$). Данная система уравнений записывается на языке алгебры конечных предикатов, с помощью которого выясняется, что для существования единственного решения такой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $B \subseteq A \subseteq C$. Далее выясняется, что множество $X$ можно представить, например, так $X = (C \setminus A) \cup B$.

Однако приведенный в [2] метод решения действует лишь применительно к алгебре множеств, причем множества могут быть только конечными. Кроме того, при невыполнении условий единственности решения найти *все* решения данного уравнения или системы уравнений, перебрать все решения порой просто невозможно, так как число их бесконечно или очень велико. Однако хотелось бы иметь возможность изучать эти решения, выбирать из них оптимальные (для конкретных задач), рассматривать структуру этих решений подобно тому, как в теории дифференциальных уравнений рассматривается структура множества решений дифференциального уравнения, несмотря на то, что это множество может быть бесконечным. Как будет показано дальше, можно находить *все* решения булевых уравнений, не перебирая их по одному, а *описывая* формулами так, что из этих формул можно получить все решения данного уравнения или системы уравнений.

Рассмотрим решение уравнений алгебры логики традиционным методом приведения к СДНФ (совершенной дизъюнктивной нормальной форме). Суть этого метода состоит в том, что функция алгебры логики, стоящая в левой части уравнения $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 1$, записывается в форме СДНФ, после чего непосредственно выписываются наборы значений двоичных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие данному уравнению. Пусть, например, имеем уравнение $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3) = 1$ **(1)**. Записываем левую часть в форме СДНФ: $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1(x_2 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3 \vee (x_1 \vee \bar{x}_1)\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Получаем уравнение $x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = 1$, откуда видно, что решениями будут наборы $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 0\}$, $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 0, 0\}$ **(2)**.

Для алгебры логики такой подход является в некотором смысле универсальным, так как всегда можно получить все решения любого уравнения. Предположим теперь, что в приведенном примере $x_1$, $x_2$, $x_3$ — переменные множества некоторой алгебры множеств, причем конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание будем интерпретировать как пересечение, объединение и дополнение в алгебре множеств. Для определенности рассмотрим алгебру всех подмножеств множества $\{a, b\}$. Тогда 0 — пустое множество, 1 — все множество $\{a, b\}$. Очевидно, наборы (2) будут решениями уравнения (1) и в данном случае, однако не только эти наборы. Например, если положить $x_1 = \{a\}$, $x_2 = \{a\}$, $x_3 = \{a\}$, то уравнение (1) обратится в тождество. Из сказанного выше следует, что метод приведения к СДНФ в общем случае не является универсальным для решения уравнений булевой алгебры.

Перейдем к определениям. *Булевой алгеброй* назовем всякую алгебру, для которой выполняются следующие аксиомы: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ **(3)**, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ **(4)**, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ **(5)**, $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ **(6)**, $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$, $a \wedge 1 = a$, $a \vee 0 = a$ **(7)**, $\bar{\bar{a}} = a$ **(8)**, $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$, $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ **(9)**, $a \vee \bar{a} = 1$, $a \wedge \bar{a} = 0$ **(10)**.

Будем полагать, что алгебра задана на абстрактном множестве $M$, операции «$\vee$», «$\wedge$», «—» будем называть соответственно дизъюнкция, конъюнкция и отрицание (по аналогии с алгеброй логики), а элементы алгебры 0 и 1 — нуль и единица алгебры $M$. *Булевой формой* назовем произвольную функцию $f: M^m \to M$, полученную при помощи суперпозиций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. *Элементарной конъюнкцией* назовем любую конъюнкцию вида $a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}$ ($k \leqslant m$), где $\alpha_{i_j}$ — либо переменная $x_{i_j}$, либо ее отрицание $\bar{x}_{i_j}$. Любую дизъюнкцию произвольного числа различных элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ).

Любую элементарную конъюнкцию, в которой встречаются все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, назовем *конституэнтой единицы.* Условимся все переменные в конституэнте единицы располагать в порядке возрастания номеров. Любую дизъюнкцию произвольного числа различных конституэнт единицы назовем *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ). Будем отождествлять между собой все СДНФ, отличающиеся только порядком расположения конституэнт единицы. В качестве СДНФ, не содержащей ни одной конституэнты единицы, примем формулу 0. В дальнейшем для удобства значок «$\wedge$» будем опускать.

Утверждение 1. *Любую булеву форму можно преобразовать к СДНФ.*

Доказательство. По определению булева форма $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ представляет собой суперпозицию операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Алгоритм преобразования булевой формы к СДНФ полностью аналогичен алгоритму приведения к СДНФ формулы алгебры логики. Пользуясь тождествами (3) — (5), (8), (9), раскрываем в исходной формуле все скобки и получаем дизъюнкцию некоторого числа конъюнкций. С помощью тождеств (3) — (7), (10) производим упрощения в формуле. В результате получим некоторую ДНФ. Пользуясь тождествами (7), (10), во все конъюнкции вводим недостающие переменные. Например, $x_1x_2 = x_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_3)$. Пользуясь тождествами (3) — (6), снова раскрываем скобки и производим упрощения. В результате получаем искомую СДНФ.

Утверждение 2. *Для любой булевой формы $f$ справедливо представление*: $f(A_1, A_2, \ldots, A_n, X) = Xf(A_1, A_2, \ldots, A_n, 1) \vee \bar{X}f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 0)$ **(11)**.

Доказательство. Представим булеву форму $f$ в виде СДНФ (это всегда возможно в силу утверждения 1). Очевидно, если СДНФ не содержит ни одной конституэнты единицы (т. е. $f \equiv 0$), то представление (11) справедливо. Поэтому считаем, что СДНФ содержит хотя бы одну конституэнту единицы. Рассмотрим дизъюнкцию всех конституэнт единицы, содержащих $X$ (без отрицания). Эта дизъюнкция равна $Xf(A_1, A_2, \ldots, A_n, 1)$. Действительно, при подстановке 1 вместо $X$ все конституэнты единицы, содержащие $\bar{X}$, обратятся в 0. Аналогично показывается, что дизъюнкция всех конституэнт единицы, содержащих $\bar{X}$, равна $\bar{X}f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 0)$. Так как других конституэнт единицы не существует, то справедливо (11).

Утверждение 3. *Для любой булевой алгебры* $A = B \leftrightarrow (AB \vee \bar{A}\bar{B} = 1)$ **(12).**

Доказательство. Пусть $A = B$. Тогда $AB \vee \bar{A}\bar{B} = AA \vee \bar{A}\bar{A} = A = \bar{A} = 1$. Обратно, пусть $AB \vee \bar{A}\bar{B} = 1$. Домножим обе части этого равенства на $A$. Получим $ABA \vee \bar{A}\bar{B}A = A$, или, что то же, $AB = A$. Домножив обе части того же равенства на $B$, получим $ABB \vee \bar{A}\bar{B}B = B$, или, что то же, $AB = B$. Следовательно, $A = B$.

Под *уравнением булевой алгебры* будем понимать уравнение вида $f_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_s) = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_s)$ **(13)**, где $f_1$ и $f_2$ — булевы формы, $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — параметры, $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — переменные. Под *системой уравнений булевой алгебры* будем понимать систему уравнений вида (13). Особо выделим уравнение вида $f(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_s) = 1$ **(14)**, где $f$ — произвольная булева форма. Любую систему уравнений булевой алгебры можно свести к такому уравнению. Действительно, в силу утверждения 3, уравнение (13) равносильно уравнению (14), где $f = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_s) f_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots X_s) \vee \bar{f}_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_s) \bar{f}_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_s)$ **(15)**. А система уравнений $f_1 = 1, f_2 = 1, \ldots, f_l = 1$ **(16)** равносильна уравнению $f = f_1 f_2 \ldots f_l = 1$ **(17)**. Действительно, из (16) следует (17). Покажем, что и из (17) вытекает (16). Для этого возьмем любое $f_i$. Из (17) следует $f_i \vee f_i(f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f_{i+1} \ldots f_l) = 1 \vee f_i = 1$, откуда $f_i = 1$. Равносильность (16) и (17) доказана.

Из сказанного выше заключаем, что уравнение вида (14) представляет собой самый общий случай уравнений булевой алгебры, так как любое другое уравнение (или система уравнений) приводится к нему. Исследуем сначала один частный случай уравнения (14), а именно уравнение вида $f(A_1, A_2, \ldots, A_n, X) = 1$ **(18)**, где $f$ — произвольная булева форма, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — параметры, $X$ — переменная. Прежде чем приступать к решению этого уравнения, необходимо выяснить, при каких условиях (ограничениях на параметры $A_1, A_2, \ldots, A_n$) уравнение (18) имеет хотя бы одно решение. Пользуясь утверждением 2, представим уравнение (18) в виде $Xf(A_1, A_2, \ldots, A_n, 1) \vee \bar{X}f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 0) = 1$ **(19)**. Для удобства обозначим $A = f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 1)$, $B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 0)$ **(20)**. Тогда уравнение (18) перепишется в виде $AX \vee B\bar{X} = 1$ **(21)**.

**Теорема 1.** *Уравнение* (21) *имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда* $A\vee B=1$.

Доказательство. Пусть $A\vee B=1$. Тогда в качестве решения уравнения (21) можно взять $x=A$. Действительно, подставив в уравнение, получим $AX\vee B\bar X=AA\vee B\bar A=A\vee B\bar A=(A\vee AB)\vee B\bar A=$ $=A\vee(AB\vee\bar BA)=A\vee B(A\vee\bar A)=A\vee B=1$. Обратно, пусть существует такое $X$, что $AX\vee B\bar X=1$. Домножив обе части этого равенства на $A\vee B$, получим $(AX\vee B\bar X)(A\vee B)=A\vee B$. Раскроем скобки и произведем упрощения в левой части этого равенства, тогда $(AX\vee B\bar X)(A\vee$ $\vee B)=AXA\vee B\bar XA\vee AXB\vee B\bar XB=AX\vee AB\bar X\vee ABX\vee B\bar X=(AX\vee$ $\vee B\bar X)\vee AB\bar X\vee ABX=1\vee AB\bar X\vee ABX=1$. Итак, получили в левой части равенства $(AX\vee B\bar X)(A\vee B)=A\vee B$ единицу. Значит, $A\vee B=1$. Теорема доказана.

Возвращаясь в соответствии с (20) к прежним обозначениям, получаем критерий существования решения уравнения (18): $f(A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n, 1)\vee f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 0)=1$ **(22)**. Попытаемся теперь найти общее решение уравнения (21). Для этого докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Любой элемент* $X$, *удовлетворяющий уравнению* (21), *можно представить в виде* $X=AP\vee\bar B$ (23), *где* $P$ — *некоторый элемент множества* $M$. *Если уравнение* (21) *имеет хотя бы одно решение, то любой элемент* $X$, *который можно представить в виде* (23), *будет решением этого уравнения.* Иначе говоря, придавая параметру $P$ всевозможные значения, мы получим *все* решения уравнения (21) и *только* эти решения.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть некоторый элемент $X$ удовлетворяет уравнению (21), т. е. $AX\vee B\bar X=1$.

Домножим обе части этого равенства на $X$, находим $AXX\vee B\bar XX=X$, откуда $AX=X$. Подставив $X$ вместо $AX$, получим $X\vee BX=1$. В качестве $P$ возьмем сам элемент $X$ и покажем, что $AX\vee\bar B=X$. Действительно, $AX\vee\bar B=X\vee\bar B=(X\vee\bar B)(X\vee B\bar X=XX\vee\bar BX\vee XB\bar X\vee$ $\vee\bar BB\bar X=X\vee\bar BX=X$. Следовательно, для любого $X$, удовлетворяющего (21), можно найти такой элемент $P$, что справедливо представление (23). Докажем вторую часть теоремы. Пусть уравнение (21) имеет хотя бы одно решение. Тогда, в силу теоремы 1, $A\vee B=1$. Подставим правую часть равенства (23) в уравнение (21) вместо $X$: $AX\vee B\bar X=A(AP\vee\bar B)\vee B(AP\vee\bar B)=AP\vee A\bar B\vee B((\bar A\vee\bar P)B)=AP\vee$ $\vee A\bar B\vee B\bar A\vee B\bar P=AP(A\vee B)\vee B\bar P(A\vee B)\vee A\bar B\vee B\bar A=AP\vee B\bar P\vee AB\vee$ $\vee A\bar B\vee B\bar A=AP\vee B\bar P\vee A\vee B=AP\vee B\bar P\vee 1=1$. В приведенной выкладке использовался тот факт, что $A\vee B=1$. Мы показали, что для любого $P$ элемент $X=AP\vee\bar B$ является решением уравнения (21). Теорема доказана.

Возвращаясь к прежним обозначениям (в соответствии с (20)), запишем общее решение уравнения (18): $X=f(A_1, A_2, \ldots, A_n, 1)P\vee\bar f(A_1, A_2, \ldots,$ $\ldots, A_n, 0)$ **(24)**. Еще раз отметим, что записывать решение уравнения (18) в виде (24) можно только при выполнении условия (22), в противном же случае уравнение (18) решений не имеет.

Рассмотрим пример на применение полученных результатов. Пусть требуется решить уравнение $A_1X = A_2$ **(25)**, где $A_1$, $A_2$ — параметры, $X$ — переменная. Это уравнение вида (13). Приведем его к виду (14) и, используя утверждение 3, получим $A_1A_2X \vee \bar{A}_2\bar{X} \vee \bar{A}_1\bar{A}_2 = 1$ **(26)**. Выясним, когда уравнение (26) имеет хотя бы одно решение? Для этого воспользуемся критерием (22): $f(A_1, A_2, 1) \vee f(A_1, A_2, 0) = (A_1A_2 \vee \bar{A}_1\bar{A}_2) \vee \vee (\bar{A}_2 \vee \bar{A}_1\bar{A}_2) = 1$, откуда $A_1 \vee \bar{A}_2 = 1$ **(27)**. Уравнение (26) имеет решение тогда и только тогда, когда $A_1$ и $A_2$ удовлетворяют (27). В соответствии с (24) запишем его общее решение: $X = (A_1A_2 \vee \bar{A}_1\bar{A}_2) P \vee A_2$. В силу (27) $A_1A_2 = A_2$ (в этом можно убедиться, домножив обе части равенства (27) на $A_2$). Учитывая этот факт и тождества $A_2 \vee \bar{A}_1\bar{A}_2 = A_2 \vee \bar{A}_1$ и $A_2P \vee A_2 = A_2$, преобразуем общее решение к виду $X = \bar{A}_1P \vee A_2$ **(28)**. Итак, мы вывели критерий (27) существования решения уравнения (25), записали общее решение (28) этого уравнения.

Используя результаты, полученные для уравнения (18), опишем алгоритм решения уравнения (14). Сначала решаем уравнение (14) относительно переменной $X_s$, считая $A_1, A_2, \ldots, A_n, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}$ параметрами. Для этого случая получим критерий существования решения (теорема 1): $f_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}) = 1$ **(29)**, где $f_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}) = f(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}, 1) \vee f(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}, 0)$. Само решение выразится некоторой формой (теорема 2): $X_s = F_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}, P_s)$. Потом решаем уравнение (29) относительно переменной $X_{s-1}$, считая $A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-2}$ параметрами. Получим критерий существования решения: $f_{s-1}(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-2}) = 1$, где $f_{s-1}(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-2}) = f_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-2}, 1) \vee f_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-2}, 0)$. Само решение выразится некоторой формой: $X_{s-1} = F_{s-1}(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, X_2, \ldots, X_{s-2}, P_{s-1})$.

Двигаясь таким образом дальше, мы придем к уравнению $f_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1) = 1$, где $f_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1) = f_3(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, 1) \vee \vee f_3(A_1, A_2, \ldots, A_p, X_1, 0)$. Критерий существования решения этого уравнения: $f_1(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 1$ **(30)**, где $f_1(A_1, A_2, \ldots, A_p) = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, 1) \vee f_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, 0)$. Само решение выразится некоторой формой: $X_1 = F_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1)$. Условие (30) является критерием существования решения уравнения (14). Действительно, пусть условие (30) выполнено Тогда уравнение $f_2 = 1$ имеет решение. Но условие $f_2 = 1$ является критерием разрешимости уравнения $f_3 = 1$. Значит, уравнение $f_3$ имеет решение. Поднимаясь дальше по цепочке уравнений, придем к уравнению (14). Обратно, пусть уравнение (14) имеет решение, тогда, спускаясь от этого уравнения по цепочке тех же уравнений к условию (30), получим существование решения этого уравнения.

Обозначим $K_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1) = F_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1)$. Подставив $X_1 = K_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1)$ в выражение для $X_2$, находим $X_2 = K_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1, P_2)$, где $K_2$-некоторая форма. И так далее. Наконец, подставив выражения для $X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}$ в формулу для $X_s$, получим $X_s = K_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1, P_2, \ldots, P_s)$, где $K_s$ — некоторая форма. Таким образом, получим общее решение уравнения (14):

$$
\begin{aligned}
X_1 &= K_1(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1),\\
X_2 &= K_2(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1, P_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_s &= K_s(A_1, A_2, \ldots, A_p, P_1, P_2, \ldots, P_s).
\end{aligned} \tag{31}
$$

Например, требуется решить уравнение $X_1X_2 = T$, где $T$ — параметр, $X_1$, $X_2$ — переменные. Запишем его в виде (14): $X_1X_2T \vee \bar{X}_1\bar{T} \vee \vee \bar{X}_2\bar{T} = 1$ **(32)**. Полагаем $X_2$ переменной, $T$ и $X_1$ — параметрами. Тогда критерий существования решения этого уравнения запишется так: $X_1 \vee \bar{T} = 1$ **(33)**, а общее решение выразится формой: $X_2 = \bar{X}_1P_2 \vee \vee T$ **(34)**. Уравнение (33), очевидно, всегда имеет решение (например, $X_1 = 1$), поэтому и уравнение (32) всегда будет иметь решение. Запишем общее решение уравнения (33): $X_1 = P_1 \vee T$ **(35)**. Подставляя выражение для $X_1$ в выражение для $X_2$, получаем $X_2(P_1 \vee T)P_2 \vee T = \bar{T}\bar{P}_1P_2 \vee \vee T = \bar{P}_1P_2 \vee T$ **(36)**. Формулы (35) и (36) дают нам общее решение уравнения (32).

**Список литературы**: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства.— Х., 1984.— 144 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Технические средства.— Х., 1986.— 136 с.

*Поступила в редколлегию 18.12.86*