УДК 621.391: 519.246.8

В.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук, И.О. ФИЛЬ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТАВНЫХ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение

Для описания сигналов в рамках корреляционной теории применяется гильбертово пространство [1]. Классический подход к построению гильбертовых пространств не позволяет в удобной форме строить модели некоторых классов сложных сигналов и процессов. К таким классам относятся процессы, которые можно разбить на последовательность процессов меньшей длины, обладающих некоторыми общими свойствами. Предложенный в работе метод анализа подобных сигналов позволяет извлекать информацию, которую нельзя получить обычными методами статистического анализа. Для получения и анализа, предложенных классов векторных коррелированных случайных процессов, использовались модели линейного предсказания [2].

В работе рассматривается стационарный случайный процесс $X[t]$ в виде вектора $\vec{x}[t]$ в линейном пространстве, который определяется своими координатами $x[1], x[2],..., x[N]$ [3]. Такой случайный процесс можно представить в виде последовательности подвекторов $\vec{x}_i$, одинаковой длины n с однородными статистическими свойствами. Здесь введено понятие «подвектора» $\vec{x}_i$ вектора $\vec{x}^n[t]$, по аналогии с отсчетом $x[t]$ выборки $X[t]$. Такой стационарный случайный процесс назван «составным векторным случайным процессом» (СВСП) $\vec{x}^n[t]$. СВСП является обобщением понятия случайного процесса, в котором его отсчет заменяется подвектором $\vec{x}_i$ длины n. При $n=1$ СВСП становится обычным стационарным процессом в виде вектора $\vec{x}[t]$.

Статистики второго порядка составных векторных случайных процессов

СВСП $\vec{x}^n[t]$ коррелирован, если в нем существуют статистические связи второго порядка между подвекторами $\vec{x}_i$. Представим процесс $\vec{x}^n[t]$ в виде последовательности подвекторов

$$\vec{x}^n[t] = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{N/n}\}.$$

Каждый подвектор определяется n координатами вектора $\vec{x}^n[t]$:

$$\vec{x}_1 = \{x[1], x[2], ..., x[n]\},\ \vec{x}_2 = \{x[n+1], x[n+2], ..., x[2n]\}, \ldots$$

$$\ldots, \vec{x}_i = \{x[(i-1)n+1], ..., x[in]\}, \ldots, \vec{x}_{N/n} = \{x[N-n+1], ..., x[N]\},$$

где i – номер подвектора, N – номер последнего отсчета последнего подвектора. Если количество отсчетов вектора некратно длине подвектора n, то в качестве N/n берется целая часть этого числа, т.е. $N/n \sim \lfloor N/n \rfloor$.

Для получения статистик второго порядка СВСП необходимо произведения координат вектора заменить на скалярное произведение подвекторов

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+k}) = \sum_{j=1}^{n} (x[(i-1)n+j]x[(i-1)n+j+kn]),$$

где k – сдвиг подвекторов. Применяя усреднение скалярного произведения, получим формулу оценки корреляционной функции СВСП

$$R^n[k] = \frac{1}{\frac{N}{n} - k} \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-k} \sum_{j=1}^{n} (x[(i-1)n + j]x[(i-1)n + j + kn]). \qquad (1)$$

Таким образом, корреляционная функция СВСП описывает статистическую связь первого порядка между подвекторами, а не отсчетами процесса. Представим это выражение в виде

$$R^n[k] = \frac{1}{\frac{N}{n} - k} \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-k} (\vec{x}_i, \vec{x}_{i+k}) = R^n[i, i+k].$$

В случае $n = 1$, из выражения (1) может быть получена известная формула оценки корреляционной функции для стационарного случайного процесса

$$R[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x[i]x[i+k]). \qquad (2)$$

Из выражения (2) видно, что корреляционная функция СВСП является обобщением обычной функции корреляции.

Статистическое моделирование СВСП

Теоретические положения модели СВСП проверялись методами статистического моделирования. Для этих целей использовалась модель авторегрессии (АР) СВСП. Разностное уравнение АР СВСП имеет вид

$$\vec{x}_i = \sum_{s=1}^{p} \Phi^n[s]\vec{x}_{i-s} + \vec{a}_i, \qquad (3)$$

где $\Phi^n[s]$ – коэффициенты АР СВСП, p – порядок модели АР СВСП, $\vec{a}_i$ – векторы длиной n отсчетов белого шума. СВСП состоял из подвекторов длиной 5 отсчетов. Характеристики спектра СВСП (частота пика и ширина полосы пика) выбирались следующими: $f_1 = 20$, $\Delta f_1 = 1$. Частота дискретизации подвекторов составляла $F_d = 1/T = 100$.

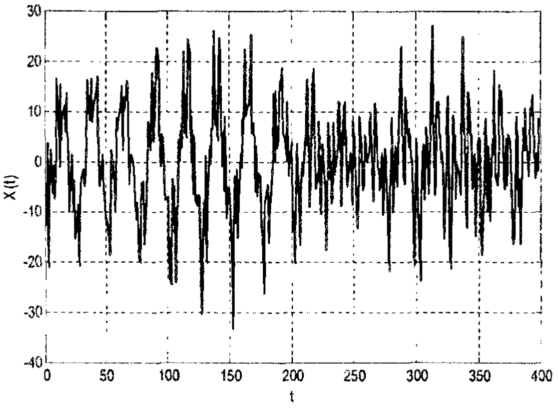
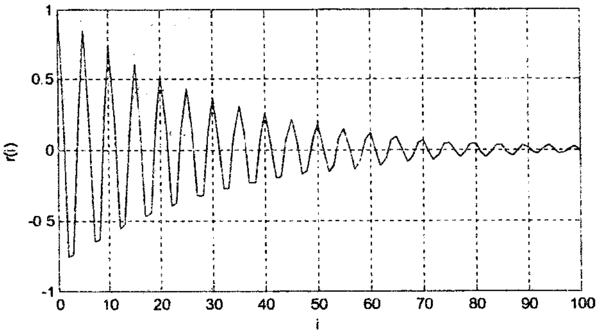


Рис. 1. АР СВСП с параметрами спектра $f_1 = 20$, $\Delta f_1 = 1$, $n = 5$.

Процесс был получен методом формирующего фильтра с помощью порождающего белого гауссова шума с использованием выражения (3). АР СВСП показан на графике (рис. 1). Форма этого процесса существенно отличается от классического процесса АР с такими же характеристиками спектра $f_1 = 20$, $\Delta f_1 = 1$.

Различие этих процессов особенно заметно на графиках корреляционных функций СВСП $\vec{x}^n[t]$ и $X[t]$, представленных на рис. 2. Из графика на рис. 2, *а* видно, что корреляционная функция СВСП имеет простой вид, соответствующий выбранным характеристикам спектра.

Анализ процессов типа СВСП известными методами математической статистики, достаточно сложен. Эти сложности возникают из-за наличия сильной квазипериодичности процесса, которая скрывает в корреляционной функции статистическую связь между подвекторами. Подобная ситуация возникает, например, при анализе сезонных случайных процессов [2]. Однако методы учета сезонности не позволяют выявить характер статистической связи между подвекторами СВСП. В рамках классической корреляционной теории СВСП будет описываться сложными корреляционными функциями, что видно из рис. 2, *б*. Т. о. модель СВСП позволяет решать как минимум две важные задачи. Во-первых, выявлять дополнительную информацию о случайном процессе. Во-вторых, устанавливать статистические связи и, следовательно, динамику изменения некоторых совокупностей отсчетов, т.е. подвекторов.



а *б*

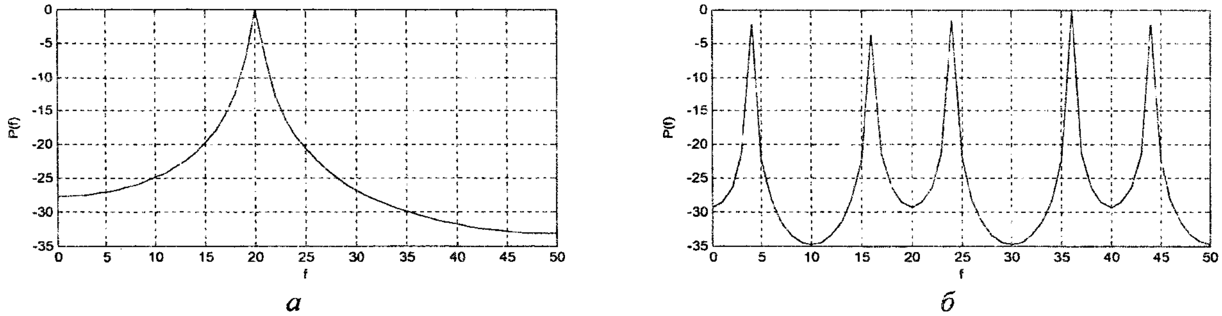
Рис. 2. Оценки корреляционных функций СВСП $\vec{x}^n[t]$: *а* – по формуле (1), *б* – по формуле (2).

Выражение для параметрической оценки СПМ СВСП имеет вид [3]

$$P^n(f) = \frac{D_a^n}{\left|1 - \sum_{i=1}^{p} \Phi^n[i] e^{-j2\pi fkT}\right|^2}. \tag{4}$$

Коэффициенты АР $\Phi^n[i]$ рассчитываются с помощью уравнения Юла-Уокера по оценкам корреляционной функции (1).

Использование классических методов линейного предсказания для моделирования СВСП приводит к сложным моделям с высоким порядком, что влечет многомодовость параметрических оценок спектров. Применение разработанной теории модели АР СВСП, позволяет получить для имитационного процесса, представленного на рис. 1, модель АР второго порядка с одномодовым параметрическим спектром (рис. 3, *а*). Параметрический спектр, найденный по коэффициентам классической модели АР, показан на рис. 3, *б*. Как видно из графика, он не позволяет выделить спектр колебаний подвекторов СВСП, теоретические характеристики которого составляют $f_1 = 20$, $\Delta f_1 = 1$.



а *б*

Рис. 3. Выборочные параметрические оценки спектра:
а – по модели АР СВСП; *б* – по классической модели АР(10).

Точность параметрической оценки СПМ существенно зависит от того, насколько хорошо подходит используемая модель для анализируемого процесса, а также от порядка этой модели, что особенно касается процессов с многомодовой СПМ.

Выводы

В работе рассмотрен новый класс сложных стационарных случайных процессов, названный СВСП. К этому классу можно отнести разные виды векторных случайных процессов, представимых в виде последовательности подвекторов. Получены графики корреляционной функции и СПМ АР СВСП. Показано, что использование предложенных статистик и модели АР СВСП позволяет исследовать статистические характеристики подвекторов СВСП. Применение классических статистических методов исследования СВСП не позволяет найти такие характеристики. Использование известных методов статистического анализа и модели СВСП дает возможность более тонко исследовать сложные процессы, представимые в виде совокупности подвекторов. Работа может быть полезна для анализа сложных случайных процессов, исследования долгосрочных изменений процессов, в частности сезонных явлений.

Список литературы: 1. *Волощук Ю. І.* Сигнали та процеси у радіотехніці : навч. посібник. Ч. 1. – Харків : ХТУРЕ, 2001. – 550 с. 2. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов : пер. с англ. – М. : Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с. 3. *Восточно-Европейский* журнал передовых технологий.– 2011 – №2/4(50). – С.17–20.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 15.02.2011