

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕРХНІ НА ОСНОВІ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРСТРІПАЦІЇ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙНІВ

Ламтюгов Д.О.

e-mail: denys.lamtiuhov@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук Славів О.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

In problems of numerical analysis and applied modeling, the reconstruction of a function from discretely specified data is an important problem. One of the classical approaches to solving this problem is the construction of global polynomials that pass through given nodes, lines, or strips. However, as the number of nodes and the degree of the interpolating polynomial increase, such interpolation may lose numerical stability and exhibit significant oscillations, in particular due to the Runge phenomenon. The purpose of this work is to analyze the construction of splines for interstrip interpolation operators, taking into account the specific features of function data specified on strips.

Поліноміальна інтерстріпація та поліноміальна інтерлінація є одними з базових методів інформаційних операторів О. М. Литвина [1]. Ці методи використовуються для наближення значень функції у областях, де вони невідомі, на основі її слідів, заданих відповідно на смугах і лініях. Ідея побудови математичної моделі поверхні за допомогою поліноміальних операторів О. М. Литвина подібна до побудови інтерполяційного полінома степеня n , що проходить через $n + 1$ задану точку на площині.

При збільшенні кількості вузлів інтерполяції може виникати небажане явище – ефект Рунге [2], що призводить до погіршення точності наближення. Класичним прикладом цього ефекту є функція вигляду:

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + 25x^2)(1 + 25y^2)}, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1]. \quad (1)$$

При наближенні функції (1) операторами інтерполяції, інтерлінації або інтерстріпації поліномами високих степенів у рівновіддалених вузлах, на лініях або смугах спостерігаються значні осциляції на межах області. При цьому зі зростанням степеня полінома похибка наближення різко зростає.

Альтернативою наближенню поверхні глобальними двовимірними поліномами є використання сплайнів – кусочно-поліноміальних функцій двох змінних, що забезпечують гладке з'єднання локальних поліномів на всій області визначення. Сплайни дозволяють отримати гладке та стабільне наближення навіть у випадках, коли наближення поліномами високого степеня є неефективним.

Нехай інформація про функцію $f(x, y)$, що визначена на області

$$G = [a, b] \times [c, d], \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

відома на системі смуг із межами, що паралельні осям координат.

Припустимо, що функція $f(x, y)$ є відомою на $n \in \mathbb{N}$ смугах, межі яких паралельні осі Oy та мають вигляд:

$$S_{x,i} = \{(x, y) : a_i \leq x \leq b_i, c \leq y \leq d\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

та на $m \in \mathbb{N}$ смугах, межі яких паралельні осі Ox і мають вигляд:

$$S_{y,j} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c_j \leq y \leq d_j\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Для меж смуг мають виконуватися наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} a &= a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n = b, \\ c &= c_1 < d_1 \leq c_2 < d_2 \leq \dots \leq c_{m-1} < d_{m-1} \leq c_m < d_m = d. \end{aligned}$$

У результаті такого розбиття області (2) отримаємо набір прямокутних підобластей області (2), що є перетинами смуг (3) та (4), вигляду:

$$\Pi_{i,j} = \{(x, y) : a_i \leq x \leq b_i, c_j \leq y \leq d_j\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Слідом функції на смузі вигляду (3) або (4) називається функція, яка повністю визначена в межах відповідної смуги (3) або (4) та вважається невідомою поза межами смуги (3) або (4), і умовно позначається $f(x, y)|_{S_{x,i}}$ або $f(x, y)|_{S_{y,j}}$ відповідно.

Введемо до розгляду оператор сплайн-інтерстріпації по області (2):

$$O_S f(x, y) = O_x f(x, y) + O_y f(x, y) - O_x O_y f(x, y), \quad (6)$$

де $O_x f(x, y)$ – оператор сплайн-інтерстріпації між смугами (3), $O_y f(x, y)$ – оператор сплайн-інтерстріпації між смугами (4), $O_x O_y f(x, y)$ – оператор сплайн-інтерлокації між локусами у вигляді прямокутників (5), які визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} O_x f(x, y) &= \sum_{i=1}^n f(x, y)|_{S_{x,i}} h_{x,i}(x), \\ O_y f(x, y) &= \sum_{j=1}^m f(x, y)|_{S_{y,j}} h_{y,j}(y), \\ O_x O_y f(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x, y)|_{\Pi_{i,j}} h_{x,i}(x) h_{y,j}(y), \end{aligned}$$

де $f(x, y)|_{S_{x,i}}$ – сліди функції на смугах (3), $f(x, y)|_{S_{y,j}}$ – сліди функції на смугах (4), $f(x, y)|_{\Pi_{i,j}}$ – сліди функції на областях (5), $h_{x,i}(x)$ – сплайни за змінною x , $h_{y,j}(y)$ – сплайни за змінною y .

Оператор (6) є математичною моделлю поверхні, інформація про яку є відомою на системі смуг (3) та (4), і точно відновлює значення функції на смугах та наближено у підобластях, де інформація про функцію є невідомою.

Допоміжні функції $h_{x,i}(x)$ та $h_{y,j}(y)$ будуються за аналогією до сплайн-інтерлінації [3], але з урахуванням особливостей задання інформації на смугах. У найпростішому випадку можна вибрати допоміжні функції у вигляді кусково-сталих сплайнів наступного вигляду:

$$h_{x,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[a, \frac{b_1 + a_2}{2} \right), \\ 0, & x \in \left[\frac{b_1 + a_2}{2}, b \right], \end{cases}$$

$$h_{x,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{b_{i-1} + a_i}{2}, \frac{b_i + a_{i+1}}{2} \right), \\ 0, & x \notin \left[\frac{b_{i-1} + a_i}{2}, \frac{b_i + a_{i+1}}{2} \right), \end{cases} \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$h_{x,n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{b_{n-1} + a_n}{2}, b \right], \\ 0, & x \in \left[a, \frac{b_{n-1} + a_n}{2} \right). \end{cases}$$

Допоміжні функції $h_{y,j}(y)$ будуються аналогічним чином.

Використання допоміжних функцій у складі оператора (6) дає змогу об'єднати локальні дані, задані на окремих смугах, у єдину модель поверхні. Їх кусково-сталий характер спрощує реалізацію оператора та зменшує обчислювальну складність. Побудова зберігає локальність впливу даних: зміна інформації на одній смузі впливає лише на відповідні підобласті розбиття. Це створює передумови для узагальнення конструкції з використанням сплайнів вищих порядків для підвищення гладкості наближення.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко І. В., Литвин О. М. Нові інформаційні оператори в математичному моделюванні. Київ : Наукова думка, 2018. 444 с.
2. Slavik O. About Special Cases of Lagrangian Interstripation of Approximations of Functions of Two Variables. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2025. No. 4. P. 50–58. URL: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2025-4-5> (дата звернення: 22.02.2026).
3. Slavik O. Review of Interstripation Methods in the Lagrange Form for Approximating Continuous Functions of Two Variables. *Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences*. 2025. Vol. 27. P. 75–83. URL: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-27.75-83> (дата звернення: 22.02.2026).