Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Вісник Запорізького національного університету.
Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 50 – 56.

УДК 519.63 : 532.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Блишун А.П., аспирант, Сидоров М.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Яловега И.Г., канд. техн. наук

Харьковский национальный педагогический университет им. Г.С. Сковороды

Рассматривается задача расчета фильтрационного течения жидкости под гидротехническим сооружением при наличии шпунтов. На основании метода *R*-функций и энергетического метода (метода Ритца) строится приближенный метод решения этой задачи. Эффективность разработанного численного метода иллюстрируется вычислительными экспериментами.

Ключевые слова: фильтрационное течение, функция тока, метод R-функций, метод Ритца.

Блішун О.П., Сидоров М.В., Яловега І.Г. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ДО ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ ПІД ГІДРОТЕХНІЧНИМИ СПОРУДАМИ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди, Україна

Розглянуто задачу розрахунку фільтраційної течії під гідротехнічною спорудою за умови наявності шпунтів. Відповідно до методу *R*-функцій та енергетичного методу (методу Рітца) побудовано наближений метод розв’язання цієї задачі. Ефективність розробленого чисельного методу ілюструється обчислювальними експериментами.

Ключові слова: фільтраційна течія, функція течії, метод R-функцій, метод Рітца.

Blishun O.P., Sidorov M.V., Yalovega I.G. APPLICATION OF R-FUNCTIONS METHOD TO NUMERICAL ANALYSIS OF FILTRATION FLOW UNDER THE HYDRAULIC STRUCTURE / Kharkov National University of Radioelectronics, H.S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical University, Ukraine

The flat filtration flow under hydraulic structure with grooves is considered. For the decision of this task, the approached method based on methods R-function and Ritz is offered. The approached for several areas is received.

Keywords: filtration flow, stream function, R-functions method, Ritz method.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается катастрофическое развитие таких процессов как зарегулированность поверхностного стока с существенным снижением естественной дренажности и устойчивым подъемом уровня водоносных горизонтов. Это приводит к сильному и устойчивому подтоплению, разрушению естественной геохимии и техногенному загрязнению сельскохозяйственных и городских ландшафтов.

Для решения задач математической физики, описывающих фильтрационные течения, используются различные точные и приближенные методы: разделения переменных, методы теории функций комплексного переменного, метод мажорантных областей, метод суммарных представлений, метод фиктивных областей, метод конечных элементов и др. Классические результаты по этим методам отражены в монографиях [5 – 8, 10].

Каждый из перечисленных методов обладает рядом достоинств. К основным недостаткам точных методов следует отнести ограниченный круг областей, к которым они могут быть применены, а основным недостатком существующих приближенных методов является то, что при их реализации обычно от рассмотрения геометрически сложных участков границы области фильтрации переходят к более простым, например, составленным из отрезков прямых.

Таким образом, разработка новых и усовершенствование существующих методов математического моделирования и численного анализа фильтрационных течений является актуальной научной проблемой.

Наиболее точно и полно учесть геометрическую и аналитическую информацию, содержащуюся в краевой задаче, позволяет метод R-функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева [11]. Для численного решения задач фильтрации метод R-функций был применен в [1 – 4, 12]. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в этих работах.

Нашей целью является разработка на основе методов R-функций и Ритца новых средств математического моделирования и численного анализа фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями при наличии шпунтов. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: построить структуру решения смешанной краевой задачи теории фильтрации; разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты построенной структуры на основании метода Ритца; провести вычислительные эксперименты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу движения несжимаемой жидкости под гидротехническим сооружением (плотиной). На рис. 1 приведена схема фильтрации. Здесь D – область фильтрации, D_0 – подводная часть плотины (флютбет), $\partial\Omega_0$ – граница подземной части флютбета, $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ – проницаемые участки границы, $\partial\Omega_3$ – шпунт, $\partial\Omega_4$ – водоупор.

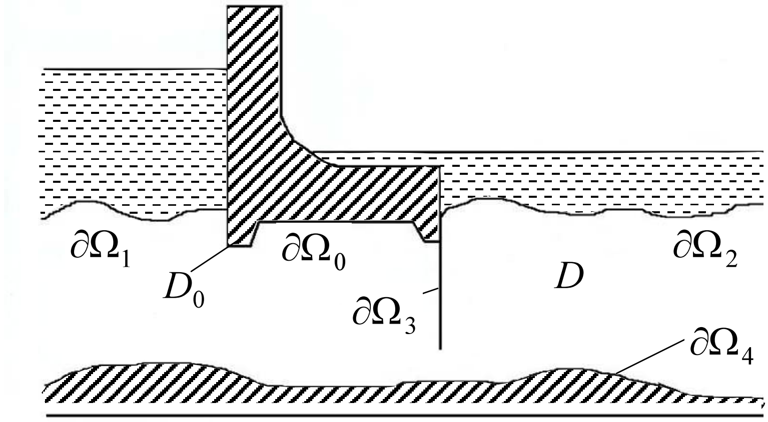

Рис. 1. Общая схема фильтрации

Стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости будем описывать в рамках линейного закона Дарси уравнениями [10]

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = -\kappa\nabla h \text{ в } D, \tag{2}$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – скорость фильтрации, κ – коэффициент фильтрации, $h = y + \dfrac{p}{\rho g}$ – пьезометрический напор, p – давление, ρ – плотность жидкости, а g – ускорение силы тяжести.

Из (1), (2) следует следующее уравнение для напора:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \text{ в } D. \tag{3}$$

Для численного анализа задачи удобнее от уравнения (3) для напора $h(x, y)$ перейти к уравнению для функции тока $\psi(x, y)$, вводимой соотношениями

$$\nu_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \nu_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Как видно, уравнение неразрывности (1) при этом обращается в тождество, а из (2) следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Исключая из (5) перекрестным дифференцированием h, для функции тока ψ получим уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0 \text{ в } D. \tag{6}$$

Дополним уравнение (6) краевыми условиями.

На проницаемых участках границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ следует поставить однородные условия Неймана

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2}=0\,, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$ нормаль. Физический смысл условия (7) заключается в постоянстве напора на $\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$. Граница флютбета $\partial\Omega_0$ со шпунтами $\partial\Omega_3$ и водоупор $\partial\Omega_4$ водонепроницаемы, поэтому нормальная составляющая скорости $\mathbf{v}$ на этих участках границы равна нулю, т.е. они являются линиями тока. Это приводит к следующим краевым условиям:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_4}=Q\,, \tag{8}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_3}=0\,, \tag{9}$$

где величина Q задаёт общий расход жидкости.

Итак, для определения функции тока фильтрационного течения нужно в области D решить уравнение (6) при краевых условиях (7) – (9).

Будем считать, что все кривые в области фильтрации являются гладкими или кусочно-гладкими, а коэффициент фильтрации κ есть непрерывная в $\bar{D}$ функция, причем $0<\kappa_1\le\kappa(x,y)\le\kappa_2$ в $\bar{D}$.

Основные трудности, возникающие при численном решении задачи (6) − (9), вызваны неоднородностью грунта (коэффициент фильтрации κ зависит от координат), криволинейностью границ области фильтрации и наличием шпунта, который может быть не единственным.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ R-ФУНКЦИЙ И РИТЦА

Для решения задачи (6) – (9) будем применять метод R-функций. Выделим область Ω (пересечение полосы $|x|<L$ с D), вне которой фильтрация незначительна. На боковых границах Ω поставим условие

$$\psi\big|_{x=\pm L}=Q\,.$$

Предположим, что известны функции $\omega_i(x,y)$, $i=0,1,2,3,4$, такие, что:

1) $\omega_i(x,y)=0$ на $\partial\Omega_i$,

2) $\omega_i(x,y)>0$ при $(x,y)\in\bar{\Omega}\setminus\partial\Omega_i$,

3) $\dfrac{\partial\omega_i}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega_i$.

Такие функции всегда можно построить, используя конструктивный аппарат теории R-функций [11]. Тогда функция

$$f_0=\frac{Q\omega_0\wedge_0\omega_3}{\omega_0\wedge_0\omega_3+\omega_4\wedge_0\dfrac{1}{2L}(L^2-x^2)}$$

обладает свойствами $f_0\big|_{\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_3}=0$, $f_0\big|_{\partial\Omega_4\cup\{x=\pm L\}}=Q$, а на $\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$ принимает, вообще говоря, произвольные значения, причем $f_0\in L_2(\Omega)$. Здесь $\wedge_0$ – знак R-конъюнкции [11]:

$$u\wedge_0 v=u+v-\sqrt{u^2+v^2}\,.$$

Значит, задачу (6) – (9) можно записать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0 \text{ в } \Omega\,, \tag{10}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_4\cup\{x=\pm L\}}=f_0\big|_{\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_4\cup\{x=\pm L\}}\,, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2}=0\,. \qquad (12)$$

Известно [11], что краевым условиям

$$u|_{\partial\Omega_1}=\varphi|_{\partial\Omega_1}\,,\qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}+\alpha u\right)\right|_{\partial\Omega_2}=\chi|_{\partial\Omega_2}$$

удовлетворяет пучок функций

$$u=\omega_1\Phi_1+\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\left[\chi+\omega_2\Phi_2-D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1)-D_1^{(2)}\varphi-\alpha\omega_1\Phi_1-\alpha\varphi\right]+\varphi\,, \qquad (13)$$

где $\omega_i=0$ есть нормализованное уравнение участка $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$, $i=1,2$; Φ_1, Φ_2 – неопределённые компоненты, $D_1^{(2)}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}$.

Обозначим

$$\tilde\omega_1=\omega_0\wedge_0\omega_3\wedge_0\omega_4\wedge_0\frac{1}{2L}(L^2-x^2)\,,\quad \tilde\omega_2=\omega_1\wedge_0\omega_2\,.$$

Заменяя ω_1 на $\tilde\omega_1$, ω_2 на $\tilde\omega_2$, φ на f_0, при $\alpha=0$, $\chi=0$ из (13) получим структуру решения задачи (10) – (12) в виде

$$\psi=f_0-\frac{\tilde\omega_1\tilde\omega_2}{\tilde\omega_1+\tilde\omega_2}D_1^{(2)}f_0+\tilde\omega_1\Phi_1+\frac{\tilde\omega_1\tilde\omega_2}{\tilde\omega_1+\tilde\omega_2}\left[\tilde\omega_2\Phi_2-D_1^{(2)}(\tilde\omega_1\Phi_1)\right], \qquad (14)$$

где Φ_1, Φ_2 – неопределённые компоненты, $D_1^{(2)}=\frac{\partial\tilde\omega_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\tilde\omega_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$. Возьмем $\Phi_2=0$, а Φ_1 переобозначим через Φ.

Положим

$$\varphi=f_0-\frac{\tilde\omega_1\tilde\omega_2}{\tilde\omega_1+\tilde\omega_2}D_1^{(2)}f_0$$

и в задаче (10) – (12) сделаем замену

$$\psi(x,y)=\varphi(x,y)+u(x,y)\,,$$

где $u(x,y)$ – новая неизвестная функция. Это приводит к задаче с однородными краевыми условиями

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F\ \text{в}\ \Omega\,, \qquad (15)$$

$$u|_{\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_4\cup\{x=\pm L\}}=0\,, \qquad (16)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2}=0\,, \qquad (17)$$

где обозначено

$$F=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\in L_2(\Omega)\,.$$

Введём в рассмотрение оператор краевой задачи (22) – (24), действующий в $L_2(\Omega)$ по правилу

$$Au\equiv-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (18)$$

с областью определения

$$D_A = \left\{ u \left| u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega}),\ u \right|_{\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \cup \{x = \pm L\}} = 0,\ \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} = 0 \right\} \subset L_2(\Omega).$$

Можно доказать, что оператор A положительно определён. Значит, функция u может быть найдена как минимум функционала $(Au, u) - 2(u, F)$ [9], а структуру решения краевой задачи (22) – (24) можно взять в виде

$$u = \tilde{\omega}_1 \Phi - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} D_1^{(2)}(\tilde{\omega}_1 \Phi),$$

где Φ – неопределённая компонента.

Замкнув множество D_A в метрике, порожденной нормой

$$\|u\|_{H_A}^2 = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy,$$

получим энергетическое пространство H_A со скалярным произведением

$$[u, v] = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

Неопределённую компоненту Φ представим в виде

$$\Phi \approx \Phi_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \tau_i,$$

где $\{\tau_i\}$ – любая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций (тригонометрические или степенные полиномы, сплайны и пр.). Тогда система функций $\{\varphi_i\}$, где $\varphi_i = \tilde{\omega}_1 \tau_i - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} D_1^{(2)}(\tilde{\omega}_1 \tau_i)$, является координатной, т.е.

а) $\varphi_i \in H_A$, $i = 1, 2, \ldots$;

б) при любом n функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы;

в) система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ полна в H_A.

Согласно методу Ритца для коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_i, \varphi_j] c_i = (F, \varphi_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Сходимость последовательности приближенных решений задачи (6) – (9)

$$\psi_n = \varphi + \tilde{\omega}_1 \Phi_n - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} D_1^{(2)}(\tilde{\omega}_1 \Phi_n)$$

к точному решению (вообще говоря, обобщенному) следует из теорем о сходимости метода Ритца [9].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Вычислительный эксперимент был проведён для случая различного заглубления флютбета, различной длины и количества шпунтов. Во всех случаях считалось, что флютбет имеет прямоугольное сечение. Для расчётов выбрано $L = 3$, а высота водопроницаемого слоя равна 1. Было принято, что границы $\partial\Omega_1$

и $\partial\Omega_2$ – плоские. Водоупор $\partial\Omega_4$ также считался плоским. Во всех случаях коэффициент фильтрации принимался постоянным: $\kappa = 1$, а расход жидкости $Q = 1$.

Для построения уравнения шпунта использовался следующий подход к построению уравнения разомкнутой линии [11]: если $\omega(x, y) = 0$ есть нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega$ области Ω, $\sigma(x, y) \ge 0$ есть некоторая область Σ, то уравнение

$$\omega_1(x, y) \equiv \sqrt{\omega^2(x, y) \vee_0 \overline{\sigma}(x, y)} = 0$$

является нормализованным (до первого порядка) уравнением элемента $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \bigcap \Sigma$ границы $\partial\Omega$, выделяемого областью Σ. Здесь $u \vee_0 v = u + v + \sqrt{u^2 + v^2}$.

Рассмотрим результаты решения одного из модельных примеров. Заглубление флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, два шпунта длины 0,25 и 0,5, расположенные симметрично. Область показана на рис. 2.

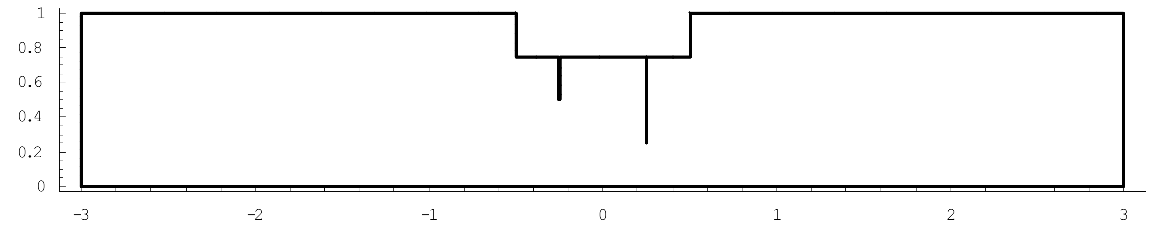

Рис. 2. Расчетная область для модельного примера

В этом случае

$$\omega_0(x, y) = (y - 0,75) \wedge_0 (0,25 - x^2), \quad \omega_1(x, y) = \omega_2(x, y) = 1 - y;$$

$$\omega_3(x, y) = \omega_3'(x, y) \wedge_0 \omega_3''(x, y), \quad \omega_4(x, y) = y,$$

где

$$\omega_3' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1'^2 + \tau_2'^4} - \tau_1'}{2}\right)^2 + \tau_2'^2}, \quad \omega_3'' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1''^2 + \tau_2''^4} - \tau_1''}{2}\right)^2 + \tau_2''^2},$$

$$\tau_1' = 0,25 - (x - 0,25)^2 - (y - 0,75)^2, \quad \tau_2' = x - 0,25,$$

$$\tau_1'' = 2(0,0625 - (x + 0,25)^2 - (y - 0,75)^2), \quad \tau_2'' = x + 0,25.$$

На рис. 3 приведена картина линий уровня $(\delta\psi = 0,1)$ приближённого решения.

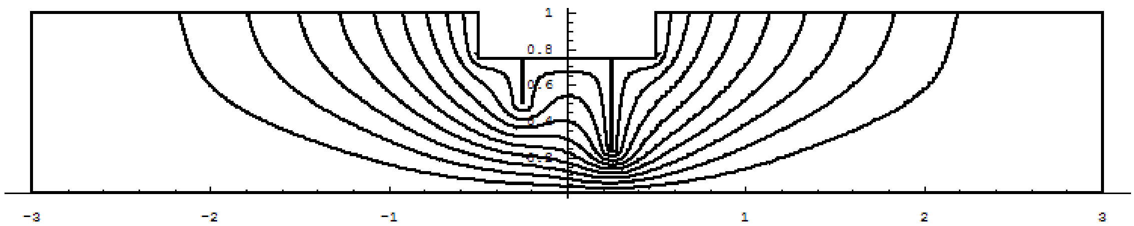

Рис. 3. Линии уровня функции тока

ВЫВОДЫ

В работе впервые для численного решения задач фильтрации под гидротехническими сооружениями применены методы *R*-функций и Ритца. Полученные приближенные решения сравнивались с решениями, полученными в [5] с помощью метода фиктивных областей. Результаты хорошо согласуются. Кроме того, полученные численные результаты полностью согласуются с инженерной практикой и теоретическими результатами [10]. Таким образом, предлагаемый метод численного анализа показал свою эффективность на модельных задачах и может быть использован для технических расчетов. Это и определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блишун А.П. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода *R*-функций / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // Радиоэлектроника и информатика. – 2010. – № 2. – С. 40 – 46.

2. Блишун А.П. Математическое моделирование стационарных фильтрационных течений со свободной границей методом *R*-функций / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // АСУ и приборы автоматики. – 2010. – Вып. 150. – С. 18 – 27.

3. Блишун А.П. Численный анализ стационарных фильтрационных течений со свободной границей структурно-вариационным методом / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // АСУ и приборы автоматики. – 2010. – Вып. 151. – С. 20 – 27.

4. Блишун А.П. Метод *R*-функций в задачах стационарной фильтрации со свободной границей / А.П. Блишун // Вісник Запорізького національного університету. – 2011. – № 2. – С. 29 – 37.

5. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике / П.Н. Вабищевич. – М. : Изд-во МГУ, 1991. – 156 с.

6. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

7. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, Н.В. Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1977. – 288 с.

8. Ляшко Н.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / Н.И. Ляшко, Н.М. Великоиваненко. – К. : Наук. думка, 1973. – 264 с.

9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 511 с.

10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664 с.

11. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.

12. Сидоров М.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений / М.В. Сидоров, А.В. Стороженко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4. – С. 58 – 61.