# ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Шабратко Є.Ю.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36),
e-mail: yelyzaveta.shabratko@nure.ua

The problem of calculating the stationary flow of a viscous incompressible fluid in a circular region is considered. For its numerical analysis it was proposed to use the *R*-function method and the Galerkin method for non-stationary problems. The results of a computational experiment for a test problem are given.

Процеси перемішування в'язкої рідини зустрічаються у багатьох технологічних процесах, зокрема, у хімічній та фармацевтичній промисловості. За деяких умов потоки рідин можуть привести до інтенсивного перемішування та навпаки. У зв'язку з цим виникає проблема математичного моделювання та чисельного аналізу таких процесів.

У роботі розглянуто метод чисельного аналізу перемішування в'язкої рідини, яке викликано системою точкових вихорів. Розв'язання даної задачі перемішування складається з двох етапів:

– визначення поля швидкостей потоку рідини;

– дослідження траєкторії руху окремих часток рідини.

Перший етап розв'язання базується на сумісному використанні метода *R*-функцій, який точно враховує геометрію області, у поєднання з методом Гальоркіна для нестаціонарних задач [1, 2]. Розв'язок другої частини дозволяє змоделювати процес перемішування та проаналізувати його ефективність за допомогою методу перетину Пуанкаре.

Нехай рідина заповнює область $\Omega$, яка представляє собою коло радіуса $r$ з центром у початку координат. Рух в області відбувається за допомогою двох точкових вихорів з інтенсивностями $\Gamma_1(t)$ та $\Gamma_2(t)$, які знаходяться в точках з координатами $(x_1, y_1)$ і $(x_2, y_2)$ відповідно, $t$ – час. Значенням $\Gamma_i(t) > 0$ відповідає потік, який закручується за часовою стрілкою, а $\Gamma_i(t) < 0$ – потік, який закручується проти часової стрілки, $i = 1, 2$.

Для визначення поля швидкостей $(v_x, v_y)$ в області $\Omega$ використаємо наближення Стокса. Плоска стоксова течія описується за допомогою функції течії $\psi(x, y, t)$, яка вводиться за допомогою співвідношення

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Тоді задача математичного моделювання потоку рідини в області $\Omega$ зводиться до початково-крайової задачі для функції течії $\psi(x, y, t)$:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}+\nu\Delta^2\psi=F(x,\, y,\, t) \text{ в } \Omega,\; t>0, \qquad (1)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0,\; \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega}=0,\; t\ge 0, \qquad (2)$$

$$\psi\big|_{t=0}=0,\; (x,y)\in\Omega, \qquad (3)$$

де $\nu$ – кінематична в'язкість, $\Delta^2$ – бігармонічний оператор,

$$F(x,\, y,\, t)=\Gamma_1(t)\delta(x-x_1,\, y-y_1)+\Gamma_2(t)\delta(x-x_2,\, y-y_2),$$

$\delta(x,\, y)$ – двовимірна дельта-функція Дірака, $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Структура розв'язку початково-крайової задачі (1) – (3), тобто жмуток функцій, який задовольняє крайовим умовам (2), матиме вигляд

$$\psi(x,\, y,\, t)=\omega^2(x,y)\Phi(x,\, y,\, t),$$

де $\omega(x,y)=\frac{1}{2r}(r^2-x^2-y^2)$, $\Phi=\Phi(x,\, y,\, t)$ – невизначена компонента структури.

Для апроксимації $\Phi$ скористаємося методом Гальоркіна для нестаціонарних задач. Подамо $\Phi$ у вигляді

$$\Phi(x,y,\,t)\approx\Phi_n(x,y,\,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\tau_k(x,y), \qquad (4)$$

де $c_k(t)$ – невідомі функції, $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій. Тоді наближений розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати у вигляді $\psi_n(x,y,\,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\varphi_k(x,y)$, де $\varphi_k=\omega^2\tau_k$, $k=1,...,n$, а для $c_k(t)$ відповідно до методу Гальоркіна отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь з нульовими початковими умовами.

Розв'язання другої частини задачі змішування полягає у розв'язанні рівняння руху лагранжевої частки

$$\dot{x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,\,t),\; \dot{y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,\,t),\; x(t_0)=x_0,\; y(t_0)=y_0,$$

та в побудові і аналізі траєкторії руху. Отримані траєкторії руху можна дослідити на наявність та характер хаотичної поведінки за допомогою методів нелінійної динаміки. Для того, щоб дослідити області ефективного змішування можна скористатися перетином Пуанкаре.

**Список використаних джерел:**


1. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. Думка, 1982. – 552 с
2. Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В. Численный анализ задачи перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 11 – 21.