$$Z_2^{нс}(t) = -\int_{t_0}^{t} X^T(t) X^{-1T}(\tau) f(x,\tau) d\tau.$$

Для открытой области получим

$$L^{нс}(t) = M^{-1} B^T(t) (Z_1^{нс}(t) R x(t_0) + 0.5\mu Z_2^{нс}(t)),$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \mu f(x,t) +$$

$$+ B(t)(M^{-1}B^T(t)(Z_1^{нс}(t)Rx(t_0) + 0.5\mu Z_2^{нс}(t))),$$

$$x(t) = (X(t) + Z_{11}^{нс}(t)R)x(t_0) +$$

$$+ \mu(Z_{22}^{нс}(t) + 0.5 Z_{21}^{нс}(t)),$$

где

$$Z_{11}^{нс}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)M^{-1}B^T(\tau)Z_1^{нс}(t)d\tau,$$

$$Z_{21}^{нс}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)M^{-1}B^T(\tau)Z_2^{нс}(t)d\tau,$$

$$Z_{22}^{нс}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)f(x,\tau)d\tau.$$

6. Заключение

В классе задач АКОР сформулирована задача динамического синтеза для квазилинейного объекта управления. Проведенное исследование позволило получить следующие новые результаты, имеющие научное и прикладное значение:

– на основании исследования множества допустимых управлений показано, что синтезированный АУ относится к классу нелинейных, предельно-линейного типа;

– получено аналитическое решение задачи структурного синтеза, что позволит на этапе параметрического синтеза связать аналитической зависимостью параметры оптимизируемого критерия качества (2) и “вторичные” показатели качества.

Практическая значимость результатов исследования определяется возможностью их использования в качестве математического обеспечения при проектировании СУ в рассматриваемом классе задач.

Литература: 1. *Радиевский А.Е.* Проблематика современного этапа автоматизации технологических процессов // Автоматизація виробничих процесів.2004. №1(18). С.126-132. **2.** *Методы* исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука, 1975. 448с. **3.** *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380с. **4.** *Справочник* по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.712с. **5.** *Альбрехт Э.Г.* О существовании оптимальной функции Ляпунова и непрерывного оптимального управления для одной задачи об аналитическом конструировании регуляторов // ДУ. 1965.Т.1, №10. С. 1301-1313. **6.** *Garrard W.L., McClamroch N.H., Clark L.G.* An approach to suboptimal feedback control for nonlinear system // Int.J.Control. 1967.V.5, No5.P.425-435. **7.** *Garrard W.L.* Additional result on suboptimal feedback control of nonlinear system //Int.J.Con-trol. 1969. V.10, No6. P.657-663. **8.** *Garrard W.L.* Suboptimal fe-edback control for nonlinear system // Automatica. 1972. V.8, No2. P.219-221. **9.** *Колмановский В.Б.* Применение метода возмущений к некоторым задачам оптимального управления // ПММ.1975.Т.39, №15.С.788-796. **10.** *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360с. **11.** *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления: Пер. с англ. М.: Наука,1972. 576с. **12.** *Гирсанов И.В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ,1970.117с. **13.** *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука,1968.496с.**14.** *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука,1971. 240с.

Поступила в редколлегию 01.11.2004

Рецензент: д-р техн.наук, проф. Кузнецов Б.И.

Радиевский Анатолий Евгеньевич, заведующий лабораторией Харьковского НИИ комплексной автоматизации (ХИКА) Минтопэнерго Украины. Научные интересы: математическая теория экстремальных задач, динамические задачи многокритериальной оптимизации. Адрес: Украина, 61003, Харьков, пер. Кузнечный, 2, тел. 731-35-67, 731-41-80.

УДК 519.6:514.1

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ НА КОМПОЗИЦИОННЫХ ОБРАЗАХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВ

ГРЕБЕННИК И.В.

Исследуются экстремальные свойства выпуклых и сильно выпуклых продолжений функций, заданных на композиционных образах комбинаторных множеств – множествах парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний с повторениями.

Введение. Многие классы задач, возникающих в проектировании, управлении, контроле, описываются моделями комбинаторной оптимизации [1]. Области допустимых решений этих задач часто представляются классическими комбинаторными множествами [2]. Разработка адекватных моделей ряда задач требует построения комбинаторных множеств с более сложной структурой, отражающей комбинаторную природу решаемой задачи. Это справедливо, в частности, при решении многих экстремальных комбинаторных задач геометрического проектирования [3,4].

Для построения эффективных моделей задач указанного класса в [5] вводится новый класс комбинаторных множеств со сложной структурой – композиционные образы (k -образы) комбинаторных множеств. В связи с этим *актуальной задачей* является анализ различных оптимизационных моделей на k -образах комбинаторных множеств.

Целью настоящей работы является исследование свойств некоторых классов задач оптимизации на k -образах комбинаторных множеств. При этом необходимо предварительно сформировать классы k-образов комбинаторных множеств как областей допустимых решений задач оптимизации.

1. Определение множеств парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний с повторениями

Рассмотрим множества $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}=$ $=\left\{g_1^{\rho_1},g_2^{\rho_2},...,g_{k_a}^{\rho_{k_a}}\right\}$, где $\rho_i \in J_n=\{1,2,...,n\}$, $i\in J_{k_a}$ – кратности элементов множества A, $\rho_1+\rho_2+...+\rho_{k_a}=n$; $g_1<g_2<...<g_{k_a}$ и $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$, $a_i\in R^1$, $b_i\in R^1$. Построим множества $Z_1,Z_2,...,Z_n$ вида $Z_i=\{(a_i,b_i)\}$, $i\in J_n$. При этом k множеств Z_i из n являются различными, $k_a\le k\le n$. Используя подход, приведенный в [5], сформируем следующие классы k-образов комбинаторных множеств.

1. Композиционный образ комбинаторных множеств P_{nk}, $Z_1,Z_2,...,Z_n$, порожденный множествами $\{a_1,b_1\},\{a_2,b_2\},...,\{a_n,b_n\}$, где P_{nk} – множество перестановок из n элементов, k из которых различны [3,4]. Обозначим такой k-образ множеств через $PI_{nk}(Z_1,Z_2,...,Z_n)$ или PI_{nk} и назовем множеством парных перестановок.

2. Композиционный образ комбинаторных множеств A_{nk}^m, $Z_1,Z_2,...,Z_n$, порожденный множествами $\{a_1,b_1\},\{a_2,b_2\},...,\{a_n,b_n\}$. Здесь A_{nk}^m – общее множество размещений из n элементов, k из которых различны, по m [4]. Такой k-образ множеств обозначим через $AI_{nk}^m(Z_1,Z_2,...,Z_n)$ или AI_{nk}^m и назовем множеством парных размещений.

3. Композиционный образ комбинаторных множеств $\bar{C}_n^m$, $Z_1,Z_2,...,Z_n$, порожденный множествами $\{a_1,b_1\},\{a_2,b_2\},...,\{a_n,b_n\}$, где $Z_i=\{(a_i,b_i)\}$ различны, $i\in J_n$. Здесь $\bar{C}_n^m$ – множество сочетаний с повторениями из n различных элементов по m [4], причем для любого $h=(g_{i_1},g_{i_2},...,g_{i_m})\in\bar{C}_n^m$ справедливо $g_{i_1}\le g_{i_2}\le...\le g_{i_m}$. Предположим при этом, что кратности ρ_i элементов $g_1,g_2,...,g_{k_a}$ множества A равны $\rho_1=\rho_2=...=\rho_{k_a}=m$, а $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ $=\left\{e_1^{\rho_1},e_2^{\rho_2},...,e_{k_a}^{\rho_{k_a}}\right\}$. При этом множества Z_i можно представить как $Z_1=Z_2=...=Z_m=\{(g_1,e_1)\}$, $Z_{m+1}=Z_{m+2}=...=$ $=Z_{2m}=\{(g_2,e_2)\}$, ... , $Z_{n-m+1}=Z_{n-m+2}=...=Z_n=$ $=\left\{(g_{k_a},e_{k_a})\right\}$. Этот k-образ множеств обозначим $\bar{C}I_n^m(Z_1,Z_2,...,Z_n)$ или $\bar{C}I_n^m$ и назовем множеством парных сочетаний с повторениями.

2. Постановка задачи

Пусть X – k-образ комбинаторных множеств [5], $X\in\left\{PI_{nk},AI_{nk}^m,\bar{C}I_n^m\right\}$. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\Phi(h)\to\min,\ h\in X, \tag{1}$$

где $\Phi: X\to R^1$ – некоторый функционал.

В результате погружения f множества X в R^N [3, 4] сформулируем задачу оптимизации функции $\varphi(x)$, эквивалентную (1):

$$\varphi(x)\to\min,\ x\in E, \tag{2}$$

где $\varphi: E\to R^1$ – функция N переменных, определенная на множестве $E\subset R^N$, $E=f(X)$ – образ множества X в пространстве R^N, $\varphi(x)=\Phi(h)$ при $x=f(h)$, $\forall h\in H$.

Исследуем случай, когда в задаче (2) $\varphi(x)$ – выпуклая (сильно выпуклая с параметром $\rho>0$) на выпуклом замкнутом множестве $V\supset \operatorname{conv}E$ функция, а в качестве множества E выступают образы множеств парных перестановок EI_{nk}, парных размещений EI_{nk}^m, парных сочетаний с повторениями $\bar{S}I_n^m$ в R^N.

Вопросы исследования и решения задач оптимизации выпуклых и сильно выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах рассматривались во многих публикациях. Так, работы [6-10] посвящены описанию теории и конструктивных методов построения выпуклых и сильно выпуклых дифференцируемых продолжений для классов функций, заданных на различных комбинаторных множествах. В работах [4, 6, 11-15] исследуются декомпозиционные методы оптимизации, использующие оценки минимума выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах и их подмножествах. Распространим некоторые результаты, приведенные в этих работах, на множества EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$.

3. Построение выпуклых продолжений функций, заданных на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$

Из комбинаторных свойств множеств EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$, порожденных множествами $Z_i=\{a_i,b_i\}$, $i\in J_n$, следует, что множества EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$ являются подмножествами соответственно множеств перестановок E_{nk}, размещений E_{nk}^m и сочетаний с повторениями $\bar{S}_n^m$, порожденных множеством $D=\{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n\}$. Другими словами, $EI_{nk}\subset E_{wk_1}$, $EI_{nk}^m\subset E_{wk_1}^v$, $\bar{S}I_n^m\subset\bar{S}_w^v$, где $w=2n$, $v=2m$, k_1 - количество различных элементов множества D. Это значит, что методы построения выпуклых и сильно выпуклых продолжений функций, заданных на множествах E_{wk_1}, $E_{wk_1}^v$ и $\bar{S}_w^v$, порожденных множеством D, справедливы и для функций, заданных на их подмножествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$, порожденных множествами $Z_i=\{a_i,b_i\}$, $i\in J_n$.

Рассмотрим задачу оптимизации вида:

$$\bar{\varphi}(x)\to\min,\ x\in E\subset R^N, \tag{3}$$

где $\bar{\varphi}: E \to R^1$ – произвольная функция, E – k-образ комбинаторных множеств, порожденный множествами $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, $E \in \{EI_{nk}, EI_{nk}^m, \bar{S}I_n^m\}$.

Перейдем от задачи оптимизации (3) к эквивалентной задаче с выпуклой (сильно выпуклой с параметром $\rho > 0$, дифференцируемой) целевой функцией. Для этого необходимо выполнить следующие действия.

1. Построить множество $E^* \in \{E_{wk_1}, E_{wk_1}^v, \bar{S}_w^v\}$, порожденное множеством D, соответствующее множеству E, причем $E \subset E^*$.

2. Для всех $x \in E^* \setminus E$ доопределить функцию $\bar{\varphi}(x)$. При известном аналитическом виде $\bar{\varphi}(x)$ это можно сделать с сохранением выражения для $\bar{\varphi}(x)$.

3. Используя известные методы [6-10], построить, если это возможно, выпуклое (сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$, дифференцируемое) продолжение $\varphi = \mathrm{conv}\,\bar{\varphi}$ функции $\bar{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $V \subset R^N$. При этом $\mathrm{conv}\, E^* \subset V$, а значит $E \subset V$.

Построенная таким образом функция $\varphi(x)$ будет выпуклым (сильно выпуклым с параметром $\rho > 0$, дифференцируемым) продолжением функции цели $\bar{\varphi}(x)$ задачи (3) на выпуклое замкнутое множество $V \subset R^N$, $E \subset V$. Задача оптимизации, эквивалентная (3), примет вид:

$$\varphi(x) \to \min, \quad x \in E, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ выпукла (сильно выпукла) на $V \subset R^N$, $E \subset V$.

4. Оценки минимума выпуклых функций на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$

В работах [4, 6, 7, 11-15] излагается общий подход к построению оценок минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах. В рамках этого подхода получены оценки минимума функций, заданных на множествах перестановок, размещений, сочетаний и других. Эти результаты используются при реализации декомпозиционных методов решения задач оптимизации на указанных классах комбинаторных множеств. Применяя данный подход, построим оценки и достаточные условия минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$. При этом будем опираться на утверждения, доказанные в [15].

Лемма 1 [15]. Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве V, где $E \subset V \subset R^N$. Тогда $\forall x \in V$

$$\min_{y \in E} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} y_i. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве $V \supset EI_{nk}$, где множество $EI_{nk} \subset R^w$, $w = 2n$, порождено множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. Тогда для любого $x \in V$*

$$\min_{y \in EI_{nk}} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{j=1}^{w} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} y_j^*, \tag{6}$$

где

$$y_{2j-1}^* = a_{i_j}, \ y_{2j}^* = b_{i_j}, \ i_j \ne i_t, \ i \ne j, \ i_j \in J_n, \ j \in J_n, \tag{7}$$

а $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ *удовлетворяет соотношению*

$$(a_{i_1}, b_{i_1}) \underset{c}{\prec} (a_{i_2}, b_{i_2}) \underset{c}{\prec} ... \underset{c}{\prec} (a_{i_n}, b_{i_n}), \tag{8}$$

где $((a_{i_j}, b_{i_j}) \underset{c}{\prec} (a_{i_k}, b_{i_k})) \Leftrightarrow ((c_{2j-1} - c_{2k-1})(a_{i_j} - a_{i_k}) + (c_{2j} - c_{2k})(b_{i_j} - b_{i_k}) \le 0)$ *при* $c = \nabla\varphi(x)$.

Доказательство. Оценку (6) получим из соотношения (5) при $E = EI_{nk}$, $N = w$, $w = 2n$. Тогда задачу оптимизации в правой части неравенства (5) можно решить с помощью утверждения, доказанного в [16], поскольку минимизируемая функция является линейной с коэффициентами $c_i = \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}, i \in J_w$. Упорядочивая пары (a_{i_j}, b_{i_j}) в соответствии с соотношением (8) на основании [16] при $c = \nabla\varphi(x)$, приходим к справедливости утверждения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве $V \supset EI_{nk}^m$, где множество $EI_{nk}^m \subset R^v$, $v = 2m$, порождено множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. Тогда для любого $x \in V$:*

$$1) \quad \min_{y \in EI_{nk}^m} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{j=1}^{v} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} y_j^*, \tag{9}$$

где

$$y^* = \arg\min_{i \in J_M} \sum_{j=1}^{v} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} y_j^i, \tag{10}$$

$y^i = \arg \min\limits_{y \in EI_{mk_i}^{(i)}(G^{(i)})} \sum\limits_{j=1}^{v} \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} y_j$, *а* $G^{(i)}$ *имеет вид* [16]: $G^{(i)} = \{(a_{j_1}, b_{j_1}), (a_{j_2}, b_{j_2}), ..., (a_{j_m}, b_{j_m})\} \subset \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)\}$, $y_{2r-1}^i = a_{j_{t_r}}$, $y_{2r}^i = b_{j_{t_r}}$, $j_{t_r} \ne j_{t_s}$ *при* $s \ne r$, $j_{t_r} \in J_n$, $t_r \in J_m$, $r \in J_m$ а $\{j_{t_1}, j_{t_2}, ..., j_{t_m}\} \subset J_n$ *таково, что*

$$(a_{j_{t_1}}, b_{j_{t_1}}) \underset{c}{\prec} (a_{j_{t_2}}, b_{j_{t_2}}) \underset{c}{\prec} ... \underset{c}{\prec} (a_{j_{t_m}}, b_{j_{t_m}}) \tag{11}$$

при $c = \nabla\varphi(x)$;

$$2) \quad \min_{x \in EI_{nk}^m} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i y_i^* + \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_i z_i^*, \tag{12}$$

где $\bar{c}_i = \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_{2i-1}}$, $\tilde{c}_i = \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_{2i}}$, $i \in J_m$,

$y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$, $y_{p_i}^* = a_{l_i}$, $i \in J_s$, $y_{p_i}^* = a_{l_{n-r+i}}$, $i \in J_r$, $s + r = m$, $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$ *удовлетворяет* $a_{l_1} \le a_{l_2} \le ... \le a_{l_n}$, а $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ *таково, что* $\bar{c}_{p_1} \ge \bar{c}_{p_2} \ge ... \ge \bar{c}_{p_s} \ge 0 > \bar{c}_{p_{s+1}} \ge ... \ge \bar{c}_{p_m}$,

$z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_m^*)$, $z_{q_i}^* = b_{h_i}$, $i \in J_t$, $z_{q_i}^* = b_{h_{n-d+i}}$, $i \in J_d$, $t + d = m$, $\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ *удовлетворяет условию* $b_{h_1} \le b_{h_2} \le ... \le b_{h_n}$, а $\{q_1, q_2, ..., q_m\}$ *таково, что* $\tilde{c}_{q_1} \ge \tilde{c}_{q_2} \ge ... \ge \tilde{c}_{q_t} \ge 0 > \tilde{c}_{q_{t+1}} \ge ... \ge \tilde{c}_{q_m}$.

Доказательство. Оценки (9) и (12) получим из соотношения (5) при $E = EI_{nk}^m$, $N = v$, $v = 2m$. Задача оптимизации в правой части неравенства (5) может быть решена с помощью теорем 2 и 3 о минимуме линейной функции на множестве $EI_{nk}^m \subset R^v$ [16], поскольку функция цели является линейной с коэффициентами $c_i = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, i \in J_v$. Применение результатов теоремы 3 [16] приведет к точному определению минимума в правой части соотношения (5) и справедливости оценки (9). На основании теоремы 4 [16] можно получить оценку минимума линейной функции в правой части неравенства (5), что сделает справедливой оценку (12).

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset \bar{S}I_n^m$, *где множество* $\bar{S}I_n^m \subset R^v$, $v = 2m$, *порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. *Тогда для любого* $x \in V$:

1) $$\min_{y \in \bar{S}I_n^m} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{i=1}^{v} c_i y_i^0, \qquad (13)$$

где $y_{2i-1}^0 = a_i^0$, $y_{2i}^0 = b_i^0$, $(a_i^0, b_i^0) = \arg\min_{\substack{(a_j, b_j) \in Z_j, \\ j \in J_n}} (c_{2i-1} a_j + c_{2i} b_j)$, $i \in J_m$;

2) $$\min_{y \in \bar{S}I_n^m} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + a_{\min} \sum_{i=1}^{s_1} \bar{c}_i + a_{\max} \sum_{i=s_1+1}^{m} \bar{c}_i + b_{\min} \sum_{i=1}^{s_2} \tilde{c}_i + b_{\max} \sum_{i=s_2+1}^{m} \tilde{c}_i, \qquad (14)$$

где $\bar{c}_i = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{2i-1}}$, $\tilde{c}_i = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{2i}}$, $i \in J_m$, $a_{\min} = \min_{i \in J_n} \{a_i\}$,

$$a_{\max} = \max_{i \in J_n} \{a_i\}, \; b_{\min} = \min_{i \in J_n} \{b_i\}, \; b_{\max} = \max_{i \in J_n} \{b_i\}, \qquad (15)$$

а s_1 *и* s_2 *определяются системами неравенств*

$$\sum_{j=1}^{t} \bar{c}_{s_1+1-j} \ge 0 \quad \forall t \in J_{s_1}, \quad \sum_{j=1}^{t} \bar{c}_{s_1+j} \le 0 \quad \forall t \in J_{k-s_1};$$
$$\sum_{j=1}^{t} \tilde{c}_{s_2+1-j} \ge 0 \quad \forall t \in J_{s_2}, \quad \sum_{j=1}^{t} \tilde{c}_{s_2+j} \le 0 \quad \forall t \in J_{k-s_2}.$$

Доказательство. Оценки (13) и (14) получим из соотношения (5) при $E = \bar{S}I_n^m$, $N = v$, $v = 2m$. Задача оптимизации в правой части неравенства (5) может быть решена с помощью теорем 5 и 6 [16], так как функция цели является линейной с коэффициентами $c_i = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, i \in J_v$. В обоих случаях будет получена оценка минимума линейной функции на множестве $\bar{S}I_n^m$. Непосредственное применение теоремы 5 приведет к справедливости оценки (13). С помощью неравенства из теоремы 6 получим оценку (14).

Лемма 2 [15]. Для того чтобы точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*) \in E$ была точкой минимума на множестве E выпуклой дифференцируемой на выпуклом замкнутом множестве V функции $\varphi(x)$, где $E \subset V \subset R^N$, достаточно, чтобы

$$\min_{y \in E} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i - (\nabla\varphi(x^*), x^*) = 0. \qquad (16)$$

Теорема 4. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset EI_{nk}$, *где множество* $EI_{nk} \subset R^w$, $w = 2n$, *порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. *Для того чтобы точка* $x^* \in EI_{nk}$ *была точкой минимума* $\varphi(x)$ *на* EI_{nk}, *достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{w} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i^* - (\nabla\varphi(x^*), x^*) = 0, \qquad (17)$$

где $y^* \in EI_{nk}$ *определяется соотношениями* (7).

Доказательство проведем на основании леммы 2 при $E = EI_{nk}$, $N = w$. Задачу минимизации в левой части равенства (16) можно решить на основе теоремы 1 [16] с помощью подхода, аналогичного подходу, примененному при доказательстве теоремы 1. В результате приходим к справедливости равенства (17) и утверждения теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset EI_{nk}^m$, *где множество* $EI_{nk}^m \subset R^v$, $v = 2m$, *порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. *Для того чтобы точка* $x^* \in EI_{nk}^m$ *была точкой минимума* $\varphi(x)$ *на* EI_{nk}^m, *достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{v} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i^* - (\nabla\varphi(x^*), x^*) = 0, \qquad (18)$$

где $y^* \in EI_{nk}^m$ *определяется соотношениями* (10).

Доказательство проведем на основании леммы 2 при $E = EI_{nk}^m$, $N = v$. Задача минимизации в левой части равенства (16) может быть решена на основе теоремы 3 [16] с помощью подхода, аналогичного подходу, примененному при доказательстве первой части теоремы 2. В результате приходим к справедливости равенства (18) и утверждения теоремы 5.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве $V \subset R^N$, $E \subset V$. Обозначим

$$y^* = \arg\min_{y \in V} \varphi(y). \qquad (19)$$

Лемма 3 [15]. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве V, где $E \subset V \subset R^N$. Тогда

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) + \rho \cdot \min_{y \in E} \left\| x - y^* \right\|^2, \qquad (20)$$

где y^* определяется из (19).

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset EI_{nk}$*, где множество* $EI_{nk} \subset R^w$*,* $w = 2n$*, порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$*,* $i \in J_n$*. Тогда*

$$\min_{x \in EI_{nk}} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) +$$

$$+\rho\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^{w}(y_i^*)^2 + 2\sum_{i=1}^{w} c_i^* x_i^0\right), \qquad (21)$$

где $c_i^* = -y_i^*, i \in J_w$, $x^0 \in EI_{nk}$,

$x_{2j-1}^0 = a_{i_j}$, $x_{2j}^0 = b_{i_j}$, $i_j \ne i_t$ при $i \ne j$, $i_j \in J_n$, $j \in J_n$,

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n\}: \ (a_{i_1}, b_{i_1}) \underset{c^*}{\prec} (a_{i_2}, b_{i_2}) \underset{c^*}{\prec} \dots \underset{c^*}{\prec} (a_{i_n}, b_{i_n}). \qquad (22)$$

Доказательство. Оценку (21) получим на основании леммы 3 при $E = EI_{nk}$, $N = w = 2n$. Задачу минимизации в правой части неравенства (20) решим с помощью соотношения, полученного в [16]. Непосредственная подстановка минимального значения нормы $\left\|x - y^*\right\|^2$ на множестве EI_{nk} в (20) приведет к справедливости оценки (21).

Теорема 7. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset EI_{nk}^m$*, где множество* $EI_{nk}^m \subset R^v$*,* $v = 2m$*, порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$*,* $i \in J_n$*. Тогда*

1) $$\min_{x \in EI_{nk}^m} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) + \rho \cdot \left\| y^0 - y^* \right\|^2, \qquad (23)$$

где $y^0 \in EI_{nk}^m$ *определяется соотношением*

$$y^0 = \arg\min_{i \in J_M} \left\| y^i - d \right\|^2, y^{(i)} = \arg \min_{y \in EI_{mk_i}^{(i)}(G^{(i)})} \left\| y - d \right\|^2, \qquad (24)$$

здесь $y_{2r-1}^i = a_{j_{t_r}}$, $y_{2r}^i = b_{j_{t_r}}$, $j_{t_r} \ne j_{t_s}$ *при* $s \ne r$, $j_{t_r} \in J_n$, $t_r \in J_m$, $r \in J_m$, а $\left\{j_{t_1}, j_{t_2}, \dots, j_{t_m}\right\} \subset J_n$ *удовлетворяет* (11) *при* $d = y^*$;

2) $$\min_{x \in EI_{nk}^m} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) +$$

$$+\rho \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}(a_{k_i}^2 + b_{s_i}^2) + \sum_{i=1}^{v}(y_i^*)^2 + 2\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i^* y_i^0 + \tilde{y}_i^* z_i^0)\right), \qquad (25)$$

где $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ *и* $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|a_{k_1}\right| \le \left|a_{k_2}\right| \le \dots \le \left|a_{k_n}\right|, \ \left|b_{s_1}\right| \le \left|b_{s_2}\right| \le \dots \le \left|b_{s_n}\right|, \qquad (26)$$

$\bar{y}_i^* = -y_{2i-1}^*$, $\tilde{y}_i^* = -y_{2i}^*$, $i \in J_m$, $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, $y_{p_i}^0 = a_{l_i}$, $i \in J_s$, $y_{p_i}^0 = a_{l_{n-r+i}}$, $i \in J_r$, $s + r = m$,

$$a_{l_1} \le a_{l_2} \le \dots \le a_{l_n}, \qquad (27)$$

$\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ *таково, что* $\bar{y}_{p_1}^* \ge \bar{y}_{p_2}^* \ge \dots \ge \bar{y}_{p_s}^* \ge 0 > > \bar{y}_{p_{s+1}}^* \ge \dots \ge \bar{y}_{p_m}^*$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$, $z_{q_i}^0 = b_{h_i}$, $i \in J_t$, $z_{q_i}^0 = b_{h_{n-d+i}}$, $i \in J_\theta$, $t + \theta = m$,

$$b_{h_1} \le b_{h_2} \le \dots \le b_{h_n}, \qquad (28)$$

а $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ *удовлетворяет неравенствам* $\tilde{y}_{q_1}^* \ge \tilde{y}_{q_2}^* \ge \dots \ge \tilde{y}_{q_s}^* \ge 0 > \tilde{y}_{q_{s+1}}^* \ge \dots \ge \tilde{y}_{q_m}^*$.

Доказательство проведем на основании леммы 3 при $E = EI_{nk}^m$, $N = v$, $v = 2m$. Задачу оптимизации в правой части неравенства (20) можно решить двумя способами. Точное решение этой задачи можно найти с помощью соотношения, полученного в [16]. Применение этой формулы позволит прийти к оценке (23). Оценка минимума нормы в правой части неравенства (20) может быть получена с помощью соотношения, выведенного в [16]. Используя его, получим неравенство (25), что приведет к доказательству теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset \bar{S}I_n^m$*, где множество* $\bar{S}I_n^m \subset R^v$*,* $v = 2m$*, порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$*,* $i \in J_n$*. Тогда*

1) $$\min_{x \in \bar{S}I_n^m} (x) \ge \varphi(y^*) +$$

$$+\rho \cdot \left(m(a_0^2 + b_0^2) + \sum_{i=1}^{v}(y_i^*)^2 + 2\sum_{i=1}^{v} \bar{y}_i^* x_i^0 \right), \qquad (29)$$

где a_0, b_0 *удовлетворяют соотношению*

$$\min_{x \in \bar{S}I_n^m} \psi(x) = \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \left\| x - d \right\|^2 \ge m(a_0^2 + b_0^2) +$$

$$+\sum_{i=1}^{v} d_i^2 + 2 \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \sum_{i=1}^{v} d_i^* x_i, \qquad (30)$$

где $a_0 = \min_{i \in J_n} \left|a_i\right|$, $b_0 = \min_{i \in J_n} \left|b_i\right|$, $d_i^* = -d_i, i \in J_v$, $\bar{y}_i^* = -y_i^*$, $i \in J_v$, $x^0 \in \bar{S}I_n^m$ *определяется соотношением*

$$\min_{x \in \bar{S}I_n^m} \left\| x - d \right\|^2 \ge m(a_0^2 + b_0^2) + \sum_{i=1}^{v} d_i^2 + 2\sum_{i=1}^{v} d_i^* x_i^0, \qquad (31)$$

здесь a_0, b_0 *и* d^* *удовлетворяют* (30), $x_{2i-1}^0 = a_i^0$, $x_{2i}^0 = b_i^0$, $(a_i^0, b_i^0) = \arg \min_{(a_j, b_j) \in Z_j, j \in J_n} (c_{2i-1} a_j + c_{2i} b_j)$, $i \in J_m$;

2) $\min\limits_{x\in \overline{S}I_n^m} (x) \ge \varphi(y^*) + \rho\cdot(m(a_0^2+b_0^2)+$

$$+\sum_{i=1}^{v}(y_i^*)^2 + a_{\min}\sum_{i=1}^{s_1}\overline{y}_i^* + b_{\min}\sum_{i=1}^{s_2}\tilde{y}_i^* + b_{\max}\sum_{i=s_2+1}^{m}\tilde{y}_i^*), \quad (32)$$

$$a_0 = \min_{i\in J_n}|a_i|,\ b_0 = \min_{i\in J_n}|b_i|,\ d_i^* = -d_i,\ i\in J_v,$$

$$\overline{y}_i^* = y_{2i-1}^*,\ \tilde{y}_i^* = y_{2i}^*,\ i\in J_m,\ a_{\min},\ a_{\max},$$

$$b_{\min}, b_{\max}$$

удовлетворяют (15), *константы* s_1 *и* s_2 *определяются системами неравенств:*

$$\sum_{j=1}^{t}\overline{y}_{s_1+1-j}^* \ge 0 \quad \forall t\in J_{s_1},\ \sum_{j=1}^{t}\overline{y}_{s_1+j}^* \le 0 \quad \forall t\in J_{k-s_1};$$

$$\sum_{j=1}^{t}\tilde{y}_{s_2+1-j}^* \ge 0 \quad \forall t\in J_{s_2},\ \sum_{j=1}^{t}\tilde{y}_{s_2+j}^* \le 0 \quad \forall t\in J_{k-s_2}.$$

Доказательство выполним на основании леммы 2 при $E = \overline{S}I_n^m$, $N = v, v = 2m$. Минимум нормы в правой части неравенства (20) можно оценить двумя способами, полученными в [16]. Применение для этого первого из способов приведет к справедливости соотношения (29). Использование второго дает возможность получить оценку (32).

Лемма 4 [15]. Если функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве V, где $E \subset V \subset R^N$, то для любого $x \in V$

$$\min_{y\in E}\varphi(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 +$$

$$+\rho\min_{y\in E}\left\|y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)\right\|^2. \quad (33)$$

Теорема 9. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset EI_{nk}$*, где множество* $EI_{nk} \subset R^w$*,* $w = 2n$*, порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$*,* $i \in J_n$. *Тогда для любого* $x \in V$

$$\min_{x\in EI_{nk}}\varphi(x) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 + \rho\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2) + \right.$$

$$\left. +\sum_{i=1}^{w}\left(x_i - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{w}c_i^* x_i^0\right),$$

где $c_i^* = -x_i + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, i\in J_w$, *а* $x^0 \in EI_{nk}$ *удовлетворяет* (22).

Доказательство проведем на основании леммы 4 при $E = EI_{nk}$, $N = w = 2n$. Задачу минимизации в правой части неравенства (33) решим с помощью соотношения о минимуме нормы разности [16] способом, аналогичным примененному при доказательстве теоремы 6.

Теорема 10. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset EI_{nk}^m$*, где множество* $EI_{nk}^m \subset R^v$*,* $v = 2m$*, порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$*,* $i \in J_n$. *Тогда для любого* $x \in V$:

1) $$\min_{y\in EI_{nk}^m}\varphi(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 +$$

$$+\rho\cdot\left\|y^0 - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)\right\|^2, \quad (34)$$

где $y^0 \in EI_{nk}^m$ *находится из* (24) *при* $d = x - \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)$;

2) $$\min_{y\in EI_{nk}^m}\varphi(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 + \rho\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{k_i}^2 + b_{s_i}^2) + \right.$$

$$\left. +\sum_{i=1}^{w}\left(x_i - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{m}(\overline{d}_i^* y_i^0 + \tilde{d}_i^* z_i^0)\right), \quad (35)$$

где последовательности $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ *и* $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ *удовлетворяют* (26),

$$\overline{d}_i^* = -x_{2i-1} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{2i-1}},\ \tilde{d}_i^* = -x_{2i} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{2i}},\ i\in J_m,$$

$$y^0 \in EI_{nk}^m,\ y^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0),\ y_{p_i}^0 = a_{l_i},\ i\in J_s,$$

$$y_{p_i}^0 = a_{l_{n-r+i}},\ i\in J_r,\ s + r = m,$$

последовательность $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$ *удовлетворяет* (27), а $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ *такова, что*

$$\overline{d}_{p_1}^* \ge \overline{d}_{p_2}^* \ge ... \ge \overline{d}_{p_s}^* \ge 0 > \overline{d}_{p_{s+1}}^* \ge ... \ge \overline{d}_{p_m}^*,\ z^0 \in EI_{nk}^m,$$

$$z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_m^0),\ z_{q_i}^0 = b_{h_i},\ i\in J_t,\ z_{q_i}^0 = b_{h_{n-d+i}},$$

$$i\in J_\theta,\ t + \theta = m,$$

где последовательность $\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ *удовлетворяет* (28), а $\{q_1, q_2, ..., q_m\}$ *такова, что* $\tilde{d}_{q_1}^* \ge \tilde{d}_{q_2}^* \ge ... \ge \tilde{d}_{q_s}^* \ge 0 > \tilde{d}_{q_{s+1}}^* \ge ... \ge \tilde{d}_{q_m}^*$.

Доказательство проведем на основании леммы 4 при $E = EI_{nk}^m$, $N = v$, $v = 2m$. Получение оценок (34) и (35) связано с двумя различными способами решения задачи оптимизации в правой части неравенства (33) [16]. Оба эти способа аналогичны рассмотренным при доказательстве теоремы 7.

Теорема 11. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V \supset \overline{S}I_n^m$*, где множество* $\overline{S}I_n^m \subset R^v$*,* $v = 2m$*, порождено множествами* $Z_i = \{a_i, b_i\}$*,* $i \in J_n$. *Тогда для любого* $x \in V$:

1) $\min\limits_{y\in \overline{S}I_n^m}\varphi(y)\ge\varphi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2+\rho\cdot(m(a_0^2+b_0^2)+$

$$+\sum_{i=1}^{v}\left(x_i-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)^2+2\sum_{i=1}^{v}\left(-x_i+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)x_i^0\Bigg), \quad (36)$$

где a_0,b_0 *удовлетворяют (30),* $x^0\in\overline{S}I_n^m$ *определяется соотношением* (31);

2) $\min\limits_{y\in \overline{S}I_n^m}\varphi(y)\ge\varphi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2+\rho\cdot\Big(m\left(a_0^2+b_0^2\right)+$

$$+\sum_{i=1}^{v}\left(x_i-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)^2+a_{\min}\sum_{i=1}^{s_1}\overline{d}_i^*+a_{\max}\sum_{i=s_1+1}^{m}\overline{d}_i^*+$$

$$+b_{\min}\sum_{i=1}^{s_2}\tilde{d}_i^*+b_{\max}\sum_{i=s_2+1}^{m}\tilde{d}_i^*, \quad (37)$$

где a_0,b_0 *удовлетворяют* (30),

$$\overline{d}_i^*=\left(x_{2i-1}-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{2i-1}}\right),\ \tilde{d}_i^*=\left(x_{2i}-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{2i}}\right),\ i\in J_m,$$

$a_{\min}$, $a_{\max}$, $b_{\min}$, $b_{\max}$ *определяются соотношением* (15), s_1 *и* s_2 *— системами неравенств:*

$$\sum_{j=1}^{t}\overline{d}_{s_1+1-j}^*\ge 0\quad \forall t\in J_{s_1},\ \sum_{j=1}^{t}\overline{d}_{s_1+j}^*\le 0\quad \forall t\in J_{k-s_1};$$

$$\sum_{j=1}^{t}\tilde{d}_{s_2+1-j}^*\ge 0\quad \forall t\in J_{s_2},\ \sum_{j=1}^{t}\tilde{d}_{s_2+j}^*\le 0\quad \forall t\in J_{k-s_2}.$$

Доказательство проведем на основании леммы 4 при $E=\overline{S}I_n^m$, $N=v, v=2m$. Для задачи оптимизации в правой части неравенства (33) получим оценки минимума двумя способами [16]. Эти способы аналогичны рассмотренным при доказательстве теоремы 8 и приводят к справедливости оценок (36) и (37).

Лемма 5 [15]. Для того чтобы точка $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_N^*)\in E$ была точкой минимума на множестве E сильно выпуклой с параметром $\rho>0$ дифференцируемой на выпуклом замкнутом множестве V функции $\varphi(x)$, где $E\subset V\subset R^N$, достаточно, чтобы

$$\left\|\nabla\varphi(x^*)\right\|^2=4\rho^2\min_{y\in E}\left\|y-x^*+\frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x^*)\right\|^2. \quad (38)$$

Теорема 12. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho>0$ *и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V\supset EI_{nk}$*, где множество* $EI_{nk}\subset R^w$*,* $w=2n$*, порождено множествами* $Z_i=\{a_i,b_i\}$*,* $i\in J_n$*. Для того чтобы точка* $x^*\in EI_{nk}$ *была точкой минимума* $\varphi(x)$ *на* EI_{nk}*, достаточно, чтобы*

$$\left\|\nabla\varphi(x^*)\right\|^2=4\rho^2\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{w}\left(x_i^*-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i}\right)^2+2\sum_{i=1}^{w}c_i^*x_i^0\right), \quad (39)$$

где $c_i^*=-x_i+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, i\in J_w$*, а* $x^0\in EI_{nk}$ *удовлетворяет* (22).

Доказательство проведем на основании леммы 5 при $E=EI_{nk}$, $N=w=2n$. Задача минимизации в правой части равенства (38) может быть решена с помощью формулы, доказанной в [16]. При этом используем подход, аналогичный примененному при доказательстве теоремы 9. В результате приходим к справедливости равенства (39) и теоремы 12.

Теорема 13. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho>0$ *и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $V\supset EI_{nk}^m$*, где множество* $EI_{nk}^m\subset R^v$*,* $v=2m$*, порождено множествами* $Z_i=\{a_i,b_i\}$*,* $i\in J_n$*. Чтобы точка* $x^*\in EI_{nk}^m$ *была точкой минимума* $\varphi(x)$ *на* EI_{nk}^m*, достаточно, чтобы*

$$\left\|\nabla\varphi(x^*)\right\|^2=4\rho^2\left\|y^0-x^*+\frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x^*)\right\|^2, \quad (40)$$

где $y^0\in EI_{nk}^m$ *удовлетворяет соотношению* (24) *при* $d=x^*-\frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x^*)$.

Доказательство утверждения проведем на основании леммы 5 при $E=EI_{nk}^m$, $N=v$. Задачу минимизации в левой части равенства (38) можно решить на основе формулы (24). В результате придем к справедливости равенства (40) и утверждения теоремы 13.

5. Оценки минимума выпуклых функций с ограниченным множеством точек экстремума на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m

Пусть в задаче (4) выпуклая на множестве $V\subset R^N$ функция цели $\varphi(x)$ имеет на множестве $V\supset \mathrm{conv}E$ ограниченное множество точек минимума U_*. Обозначим:

$$U_*=\left\{x\in V\,\middle|\,\varphi(x)=\varphi(y^*)\right\},\quad y^*=\arg\min_{x\in V}\varphi(x). \quad (41)$$

В [17] доказана следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть* $\varphi(x)$ *— выпуклая на выпуклом замкнутом множестве* $V\supseteq \mathrm{conv}\,E$ *функция,* U_* *— множество точек ее минимума, удовлетворяющее условию (41), причем* U_* *ограничено, т.е. существует такое* $R>0$*, что*

$$U_*\subset S_*=\left\{x\in R^n\,\middle|\,\left\|x-y^*\right\|<R\right\}\subset V,$$

где y^* *— какая-либо фиксированная точка из множества* U_*. *Тогда справедлива оценка*

$$\min_{x\in E}\varphi(x) \ge \left\|x^* - y^*\right\| \frac{\varphi_R^* - \varphi(y^*)}{R} + \varphi(y^*), \qquad (42)$$

где $\varphi_R^* = \min_{x\in\partial S_*}\varphi(x)$, ∂S_* *— граница множества* S_*,

а $x^* = \arg\min_{x\in E}\left\|x - y^*\right\|$, $x \in V\setminus S_*$, $S_* \cap E = \varnothing$. (43)

Используя теорему 14, получим оценки минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на множествах парных перестановок EI_{nk} и парных размещений EI_{nk}^m. Отметим, что при этом для каждого из множеств E необходимо решить задачу оптимизации (43). Для этого могут быть использованы приведенные выше соотношения. Покажем, что справедливо условие

$$\left(x^* = \arg\min_{x\in E}\|x - d\|^2\right) \Rightarrow \left(x^* = \arg\min_{x\in E}\|x - d\|\right), \quad (44)$$

где $E \subset R^N$ — произвольное евклидово комбинаторное множество, $d \in R^N$. Предположим противное. Пусть минимум $\|x - d\|^2$ на множестве E достигается в точке $x^* \in E$, а минимум $\|x - d\|$ на множестве E — в точке $\tilde{x} \in E$, $\tilde{x} \ne x^*$. Тогда $\left\|x^* - d\right\|^2 \le \|\tilde{x} - d\|^2$. Поскольку функция $y = \sqrt{z}$ при $z \ge 0$ является монотонно возрастающей, то отсюда следует неравенство $\left\|x^* - d\right\| \le \|\tilde{x} - d\|$. Это неравенство противоречит предположению о достижении минимума $\|x - d\|$ в точке $\tilde{x} \ne x^*$ и доказывает справедливость соотношения (44). Таким образом, для решения задачи (43) можно использовать решение задачи минимизации функции $\psi(y) = \|y - d\|^2$ на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m. Представим общий вид оценки (42) для множества $E \in \left\{EI_{nk}, EI_{nk}^m\right\}$ с учетом решения задачи (43). Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 14, а $E \in \left\{EI_{nk}, EI_{nk}^m\right\}$, где множество $E \subset V \subset R^N$ порождено множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. Тогда справедлива оценка (42), где x^* определяется

1) из соотношения о минимуме нормы разности [16] при $y = x$, $d = y^*$, если $E = EI_{nk}$;

2) соотношением (24) при $y = x$, $d = y^*$, если $E = EI_{nk}^m$.

При этом построение множества S_* и решение задачи минимизации $\varphi(x)$ на ∂S_* можно проводить способами, описанными в [17].

6. Повышение эффективности оценок минимума функций на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$

Оценки минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$, представленные выше, получены на основании утверждений лемм 1,3 и 4. При этом соотношения (5) и (33) справедливы для всех $x \in V \supset E$. С другой стороны, конструктивные методы построения сильно выпуклых продолжений функции $\bar{\varphi}(x)$ на $V \supseteq \mathrm{conv}E$ позволяют получить сильно выпуклое продолжение с заданным значением параметра $\rho > 0$. Поэтому в соотношениях (20), (33) имеется возможность выбора значения ρ. При построении нижних оценок минимума функции $\varphi(x)$ естественно стремиться к получению возможно более точных, а значит, возможно больших по величине оценок. Рассмотрим способ повышения эффективности оценок, полученных на основании лемм 1, 3 и 4, за счет выбора значений $x \in V$ и $\rho > 0$. Отметим, что задачи, связанные с повышением эффективности оценок минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах, рассматривались в работах [18, 19]. Распространим результаты, изложенные в [19], на оценки минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$. Введём обозначения

$$e_1(x) = \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y\in E}(\nabla\varphi(x), y), \qquad (45)$$

$$e_2(\rho) = \varphi(y^0) + \rho\min_{y\in E}\left\|y - y^0\right\|^2, \qquad (46)$$

$$e_3(x) = \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 + $$

$$+\rho\min_{y\in E}\left\|y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)\right\|^2. \qquad (47)$$

Задачу максимизации $e_1(x), e_2(\rho), e_3(x,\rho)$ можно решить только после определения минимумов в правых частях соотношений (45)-(47). Как отмечалось ранее, эти задачи решаются по-разному для разных классов множеств E. Их решения, которые определяются структурой и комбинаторными свойствами соответствующих комбинаторных множеств, являются результатами теорем 1-3 и 6-10. Отметим, что поскольку справедливо соотношение $EI_{nk} \subset E_{wk_1}$, на множество EI_{nk} можно распространить результаты теоремы о независимости оценки $e_3(x,\rho)$ от параметра ρ для евклидова множества перестановок, доказанной в [19]. Полученные соотношения для оценок минимума функций на множествах EI_{nk}, EI_{nk}^m, $\bar{S}I_n^m$ дают возможность выполнить в явном виде постановку следующих задач оптимизации:

$$e_1(x) \to \max,\ x \in V, \qquad (48)$$

$$e_2(\rho) \to \max,\ \rho \ge 0, \qquad (49)$$

$$e_3(x,\rho) \to \max, \quad x \in V. \qquad (50)$$

Результатом решения поставленных задач будут искомые эффективные значения оценок (45)-(47) минимума выпуклых и сильно выпуклых продолжений функций, заданных на множествах парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний с повторениями. Сложность зависимостей $e_1(x), e_2(\rho), e_3(x,\rho)$ не позволяет решить задачи оптимизации (48)-(50) для различных классов множеств E аналитически. Однако они могут быть успешно решены с помощью численных методов недифференцируемой оптимизации. В [19] приводятся результаты вычислительных экспериментов с задачами (48)-(50) для случая, когда в качестве множества E выбрано евклидово множество перестановок.

Выводы

Получены *новые теоретические результаты*, касающиеся экстремальных свойств функций на композиционных образах комбинаторных множеств.

Сформулированы *новые* оценки и достаточные условия минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на классах композиционных образов комбинаторных множеств – множествах парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний с повторениями.

Исследованы способы повышения эффективности предложенных оценок минимума функций на k-образах комбинаторных множеств.

Полученные результаты могут послужить основой для построения оптимизационных методов анализа моделей задач со сложной комбинаторной структурой, чем определяется их *научная ценность и практическая значимость.*

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с изучением экстремальных свойств функций на новых классах k-образов комбинаторных множеств и с разработкой на основе описанных результатов эффективных методов комбинаторной оптимизации.

Литература: 1. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К.: Наук. думка, 1988. 472 с. **2.** *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с. **3.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268с. **4.** *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. **5.** *Стоян Ю.Г., Гребенник И.В.* Специальные классы комбинаторных множеств в геометрическом проектировании. // В кн.: Сб. тезисов докладов по материалам 10-й юбилейной междунар. конф. “Теория и техника передачи, приема и обработки информации” Харьков-Туапсе - 2004. С. 253-254. **6.** *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах // Изв. вузов. Математика. 1991. №11. С.74-86. **7.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР, Сер А. 1988. №5. С.68-70. **8.** *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функции на вершинах выпуклых многогранников // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1994. Т.34, №7. С.1112-1119. **9.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А.* Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере// Кибернетика и системный анализ. 1998. №2. С.27-36. **10.** *Валуйская О.А., Емец О.А., Романова Н.Г.* Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2002. Т. 42, №4. С.591- 596. **11.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР, Сер. А. 1988. №3. С.238-240. **12.** *Емец О.А.* Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нём // ДАН УССР, Сер А. 1991. № 4. С. 69-72. **13.** *Гребенник И.В., Лапко Д.А.* Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №1. С. 109-113. **14.** *Гребенник И.В., Лапко Д.А.* Оценки минимума функций в задачах условной оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №4. С. 61-64. **15.** *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Гребенник И.В.* Экстремальные задачи на множестве размещений . Х., 1991. 35 с. (Препр. АН УССР/Инт пробл. машиностр., 347). **16.** *Гребенник И.В.* Модели оптимизации на композиционных образах комбинаторных множеств в системах поддержки принятия решений // Бионика интеллекта. 2005. № 1. С. 20-27. **17.** *Гребенник И.В.* Оценки минимума выпуклых функций с ограниченным множеством точек экстремума на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 2. С.111–114. **18.** *Ємець О. О., Роскладка А. А.* Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Український матем. журнал. 1999. Т. 51, №8. С. 1118 - 1121. **19.** *Гребенник И.В., Лапко Д.А.* Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 1. С.109-113.

Поступила в редколлегию 13.01.2005

Рецензент: д-р техн. наук Романова Т.Е.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 702-10-06.