

УДК519.6



О. О. Литвин

Українська інженерно-педагогічна академія,
м. Харків, Україна, loo71@bk.ru

ПОЛІНОМІАЛЬНА ЕРМІТОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ 2-Х ЗМІННИХ У ВУЗЛАХ ПЕРЕТИНУ СИСТЕМИ ПРЯМИХ

Досліджуються апроксимативні властивості інтерполяції функцій 2-х змінних та їх часткових похідних першого порядку в точках перетину системи M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці.

ПОЛІНОМІАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, БАЗИСНІ ПОЛІНОМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Вступ

Алгебраїчні поліноми є одним з найбільш простих інструментів наближення функцій кількох змінних. Але загальна теорія їх побудови для довільної сітки вузлів інтерполяції на даний час ще не завершена.

Теореми Вейерштрасса стверджують, що для кожної неперервної функції $f(x, y)$ існує поліном $P_n(x, y)$ такого степеня $n = n(\epsilon)$, що для максимального відхилення полінома від функції буде виконуватись нерівність $|f(x, y) - P_n(x, y)| \leq \epsilon$, $\forall (x, y) \in D \subset R^2$ для кожного $\epsilon > 0$. Але практична побудова таких поліномів за допомогою операторів інтерполяції наштовхується на ряд обмежень (вузли інтерполяції не повинні задаватися на рівномірній сітці вузлів, хоча експериментальні дані інколи зручно отримувати на регулярній сітці вузлів, коли крок між сусідніми вузлами є сталим тощо). В той же час ермітові інтерполяційні поліноми з кратними вузлами, якщо в них похідні у вузлах замінити нулями, можуть наближувати кожну неперервну функцію. Тому актуальною є задача побудови і дослідження операторів, які інтерполюють функцію разом із її частковими похідними першого порядку та мішаними похідними в точках, що є перетином заданого сімейства прямих.

1. Аналіз літературних джерел

У монографії Лоттара Колатца [1] наведено приклад дев'яти вузлів інтерполяції, що лежать на системі шести перетинних прямих, непаралельних осям координат, для яких побудова інтерполяційного полінома третього степеня не має єдиного розв'язку, оскільки поліном третього степеня має десять коефіцієнтів, а інтерполяційних умов лише дев'ять. В роботі [2] отримана формула поліноміальної інтерполяції функцій на довільній сітці вузлів поліномами мінімального степеня, яка інтерполює лише значення функцій і не інтерполює часткові похідні. В даній роботі вказана формула узагальнюється на випадок інтерполяції функцій двох змінних та її часткових похідних першого порядку мішаної похідної на сітці вузлів, які є точками перетину M непаралельних прямих, при умові, що

ніякі три з цих прямих не перетинаються в одній точці. Стан теорії поліноміальної інтерполяції функцій багатьох змінних на системі нерегулярно розміщених вузлів проаналізовано в [3-5] (див. також бібліографію у цих роботах). Відмітимо, що загальні твердження щодо існування поліномів заданого степеня, які інтерполюють функцію та її похідні до заданого порядку на деякій системі точок трикутника, отримані в працях М. Зламала, А. Женішека, Р. Варги, І. Бабушки [6-12], явні формули їх побудови отримані в працях Ю.Н. Суботіна [13-14], О.М. Литвина, О.О. Литвина, О.І. Денисової [15]. В праці А.П. Слесаренко [16] запропонована формула кратної поліноміальної інтерполяції функцій 2-х змінних не у вигляді полінома мінімального степеня, а у формі раціонального дробу, яку в 1968 році використав D. Shepard [17] і яка використовувалася також в праці О.М. Литвина [18] при побудові глобальної інтерполяційної формули на довільній сітці вузлів [див. також [2]].

2. Постановка задачі

Нехай $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = a_k x + b_k y - \gamma_k = 0$, $k = \overline{1, M}$ — довільна система прямих, що задовольняють умови:

а) $\Gamma_i \cap \Gamma_j = A_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) \neq \emptyset$, $i, j = \overline{1, M}$, $i \neq j$ — тобто кожна пряма цієї системи перетинається з усіма іншими;

б) $\Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$, $i, j, k \in \{1, 2, \dots, M\}$, $i \neq j \neq k$ — тобто ніякі три прями даної множини не перетинаються в одній точці.

Задача полягає в побудові полінома $P_n(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq n} c_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$, $n \leq 2M - 2$ з властивостями

$$P_n(X_{ij}, Y_{ij}) = \gamma_{ij, 0, 0}, D^{1, 0} P_n(X_{ij}, Y_{ij}) = \gamma_{ij, 1, 0},$$

$$D^{0, 1} P_n(X_{ij}, Y_{ij}) = \gamma_{ij, 0, 1}, D^{1, 1} P_n(X_{ij}, Y_{ij}) = \gamma_{ij, 1, 1};$$

$$i, j \in \{1, \dots, M\}, i \neq j,$$

де $\gamma_{ij, p, q} \in R$; $i, j = \{1, \dots, M\}$, $i \neq j$; $0 \leq p, q \leq 1$ — задані дійсні числа.

3. Основні твердження роботи

Вважаємо заданими систему прямих Γ_i , $i = \overline{1, M}$ і точок $A_{ij}(X_{ij}, Y_{ij}) = \Gamma_i \cap \Gamma_j$, $i, j = 1, \dots, M$ та значення $D^\alpha f(X_{ij}, Y_{ij})$, $0 \leq \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2$

$$D^\alpha f(X_{ij}, Y_{ij}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x, y)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \Big|_{(x, y) = (X_{ij}, Y_{ij})},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2; 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1; D^{0,0} f(X_{ij}, Y_{ij}) = f(X_{ij}, Y_{ij}).$$

Наведемо явні формули для базисних поліномів мінімального степеня поліноміальної інтерполяції ермітового типу, які дозволяють розв'язати поставлену задачу.

Будемо позначати нерівності $0 \leq \gamma \leq 1 - \beta$ так: $0 \leq \gamma_1 \leq 1 - \beta_1; 0 \leq \gamma_2 \leq 1 - \beta_2$ при умові, що

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \quad \beta = (\beta_1, \beta_2), \quad 0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1.$$

Нехай

$$h_{\beta}(x, y) = \frac{(x - X_{ij})^{\beta_1} (y - Y_{ij})^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!} \cdot \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^2(x, y) \times \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right\}_{A_{ij}}^{1-\beta}, \quad \text{де}$$

$$\left\{ \frac{1}{u(x, y)} \right\}_{A_{ij}}^{1-\beta} = \sum_{0 \leq \gamma \leq 1-\beta} \left(D^\gamma \frac{1}{u(x, y)} \right)_{A_{ij}} \frac{(x - X_{ij})^{\gamma_1} (y - Y_{ij})^{\gamma_2}}{\gamma!},$$

$$\gamma! = \gamma_1! \gamma_2!$$

Теорема 1. Функції $h_{\beta}(x, y)$ є базисними інтерполяційними поліномами степеня $2M$ з властивостями

$$D^\gamma h_{\beta}(X_{pq}, Y_{pq}) = \delta_{\gamma, \beta} \delta_{(i, j), (p, q)}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (1)$$

$$i, j, p, q \in \{1, \dots, M\}, \quad \delta_{\gamma, \beta} = \delta_{\gamma_1, \beta_1} \delta_{\gamma_2, \beta_2}, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\delta_{(i, j), (p, q)} = \delta_{i, p} \delta_{j, q}, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \quad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2, \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Доведення. Враховуючи, що $w_p(x, y)$ є лінійними функціями 2-х змінних, степінь $h_{\beta}(x, y)$ буде дорівнювати

$$\beta_1 + \beta_2 + 2(M - 2) + 1 - \beta_1 + 1 - \beta_2 = 2M - 2,$$

що і стверджує теорема 1. З означення множника у фігурних дужках, він є поліномом Тейлора 1-го степеня за кожною змінною при $\beta_1 = \beta_2 = 0$, тобто

$$\begin{aligned} h_{\beta, 0, 0}(x, y) &= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^2(x, y) \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) - \right. \\ &- 2(x - X_{ij}) \cdot \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right]_{A_{ij}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-3}(X_{ij}, Y_{ij}) - \\ &- 2(y - Y_{ij}) \cdot \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right]_{A_{ij}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-3}(X_{ij}, Y_{ij}) - \\ &- 2(x - X_{ij})(y - Y_{ij}) \times \\ &\times \left[-3 \left(D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right) \left(D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right]_{A_{ij}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-4}(X_{ij}, Y_{ij}) \Big\}.$$

З формули (2) при $(x, y) = (X_{ij}, Y_{ij})$ отримуємо

$$h_{\beta, 0, 0}(X_{ij}, Y_{ij}) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^2(X_{ij}, Y_{ij}) \cdot w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) = 1$$

та $h_{\beta, 0, 0}(X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu}) = 0, (i, j) \neq (\mu, \nu)$.

Тобто властивості (1) доведені для $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$. Аналогічно доводиться, що

$$D^\gamma h_{\beta, 0, 0}(X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu}) = 0, (i, j) \neq (\mu, \nu),$$

$$0 \leq \gamma_1 \leq 1, 0 \leq \gamma_2 \leq 1, |\gamma| > 0.$$

Доведення того, що $D^{1,0} h_{\mu\nu, 0, 0}(X_{ij}, Y_{ij}) = 0$ та $D^{0,1} h_{\mu\nu, 0, 0}(X_{ij}, Y_{ij}) = 0, (\mu, \nu) \neq (i, j)$ є очевидними, оскільки

$$\left(D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \mu, \nu}}^M w_p^2(x, y) \right)_{(X_{ij}, Y_{ij})} = 0, \quad \left(D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \mu, \nu}}^M w_p^2(x, y) \right)_{(X_{ij}, Y_{ij})} = 0.$$

З рівності

$$\begin{aligned} D^{1,0} h_{\beta, 0, 0}(x, y) &= \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^2(x, y) \right] \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} + \\ &+ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^2(x, y) \cdot \left[D^{1,0} \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} \right]. \end{aligned}$$

враховуючи, що

$$\begin{aligned} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right)_{A_{ij}}^{(1,1)} &= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) + \\ &+ \left(D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right)_{A_{ij}} (x - X_{ij}) + \\ &+ \left(D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right)_{A_{ij}} (y - Y_{ij}) + \left(D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right)_{A_{ij}} \times \\ &\times (x - X_{ij})(y - Y_{ij}) \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^2(x, y) \right]_{A_{ij}} = \\ &= 2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(X_{ij}, Y_{ij}) \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right]_{A_{ij}}, \\ &- 2 \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p(x, y) \right]_{A_{ij}} = \\ &= \frac{\left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^{-2}(x, y) \right]_{A_{ij}}}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i, j}}^M w_p^3(X_{ij}, Y_{ij})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right]_{A_{ij}} &= 2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(X_{ij}, Y_{ij}) \times \\
 &\times \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}}, \\
 \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right]_{A_{ij}} &= \frac{-2 \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}}}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^3(X_{ij}, Y_{ij})}, \\
 \left(D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right) \Big|_{A_{ij}} &= 2 \left\{ D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,0} \times \right. \\
 &\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) + \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big\}_{A_{ij}} \\
 \left(D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right) \Big|_{A_{ij}} &= -2 \left\{ -3 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-4}(x,y) D^{0,1} \times \right. \\
 &\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) + \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) D^{1,1} \times \\
 &\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big\}_{A_{ij}}
 \end{aligned}$$

МОЖЕМО НАПИСАТИ

$$\begin{aligned}
 D^{1,0} h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) &= \left(D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right)_{A_{ij}} \times \\
 &\times \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right)_{A_{ij}} + \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right)_{A_{ij}} \times \\
 &\times (-2) D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big|_{A_{ij}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) \right)_{A_{ij}} = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що $D^{0,1} h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) = 0$.

Для доведення того, що $D^{1,1} h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) = 0$, скористаємося формулою $D^{1,1}(uv) = (D^{1,1}u)v + (D^{1,0}u)(D^{0,1}v) + (D^{0,1}u)(D^{1,0}v) + u(D^{1,1}v)$.

$$\begin{aligned}
 D^{1,1} h_{ij,0,0}(x,y) &= \left(D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right) \cdot \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} + \\
 &+ \left(D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right) \cdot \left(D^{0,1} \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right) \cdot \left(D^{1,0} \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} \right) + \\
 &+ \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right) \cdot \left(D^{1,1} \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} \right).
 \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}
 D^{1,1} h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) &= \\
 &= 2 \left\{ D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) + \right. \\
 &+ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big\}_{A_{ij}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) + \\
 &+ \left(2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(X_{ij}, Y_{ij}) \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}} \right) \times \\
 &\times \left(-2 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) \right\}_{A_{ij}} \left\{ D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right\}_{A_{ij}} \right) + \\
 &+ \left(\left(2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(X_{ij}, Y_{ij}) \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}} \right) \right) \times \\
 &\times \left(-2 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) \right\}_{A_{ij}} \left\{ D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right\}_{A_{ij}} \right) + \\
 &+ \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(X_{ij}, Y_{ij}) \right) \cdot (-2) \left\{ -3 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-4}(x,y) D^{0,1} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) + \\
 &+ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big\}_{A_{ij}} \\
 D^{1,1} h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) &= 2 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \times \right. \right. \\
 &\times D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big] + \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-1}(X_{ij}, Y_{ij}) D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big\}_{A_{ij}} + \\
 &- 4 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right\}_{A_{ij}} \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}} \times \\
 &\times \left\{ D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right\}_{A_{ij}} - 4 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}} \cdot \left\{ D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right\}_{A_{ij}} + \\
& + 6 \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) \right) \times \\
& \times \left[D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right]_{A_{ij}} - \\
& - 2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-1}(x,y) D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \Big\}_{A_{ij}} = 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, доведено, що $D^{1,1}h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) = 0$.
При цьому використані наступні рівності.

$$\begin{aligned}
D^{1,1}h_{ij,0,0}(X_{ij}, Y_{ij}) &= \left(D^{1,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right)_{A_{ij}} \times \\
&\times \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(X_{ij}, Y_{ij}) + \left(D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right)_{A_{ij}} \times \\
&\times \left(-2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right)_{A_{ij}} + \\
&+ \left(D^{0,1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right)_{A_{ij}} \times \\
&\times \left(-2 \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-3}(x,y) D^{1,0} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p(x,y) \right)_{A_{ij}} + \\
&+ \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^2(x,y) \right)_{A_{ij}} \cdot \left(D^{1,1} \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^M w_p^{-2}(x,y) \right\}^{1-\beta} \right)_{A_{ij}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно доводяться відповідні властивості функцій $h_{ij,1,0}(x,y)$, $h_{ij,0,1}(x,y)$, $h_{ij,1,1}(x,y)$.

Теорема 1 доведена.

Тобто система $h_{ij,\beta}(x,y)$, $1 \leq i, j \leq M$, $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ є системою базисних функцій при побудові операторів поліноміальної ермітової інтерполяції даних значень функції та її часткових похідних першого порядку і мішаної похідної у вказаних точках інтерполяції. Відповідний оператор інтерполяції можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
L_n f(x,y) &= \sum_{(i,j) \in G} h_{ij,0,0}(x,y) f(X_{ij}, Y_{ij}) + \\
&+ \sum_{(i,j) \in G} h_{ij,1,0}(x,y) f^{(1,0)}(X_{ij}, Y_{ij}) + \\
&+ \sum_{(i,j) \in G} h_{ij,0,1}(x,y) f^{(0,1)}(X_{ij}, Y_{ij}) + \\
&+ \sum_{(i,j) \in G} h_{ij,1,1}(x,y) f^{(1,1)}(X_{ij}, Y_{ij}),
\end{aligned}$$

де

$$G = \{(i,j) : (X_{ij}, Y_{ij}) = (X_{ji}, Y_{ji}) = \Gamma_i \cap \Gamma_j; i, j = \overline{1, M}, i \neq j\}.$$

Теорема 2. Оператор $L_n f(x,y)$ є оператором поліноміальної інтерполяції ермітового типу на $\frac{(M-1)M}{2}$ точках A_{ij} , що є точками перетину прямих Γ_k , $k = \overline{1, M}$:

$$\begin{aligned}
D^\alpha L_n f(X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu}) &= D^\alpha f(X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu}) = f_{\mu\nu}^\alpha, \\
(\mu, \nu) \in G; \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Доведення. Застосуємо до $L_n f(x,y)$ оператор D^α . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
D^\alpha L_n f(x,y) \Big|_{(X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu})} &= \sum_{(i,j) \in G} \sum_{0 \leq \beta \leq 1} f_{ij}^\beta \cdot D^\alpha h_{ij,\beta}(x,y)_{A_{\mu\nu}} = \\
&= \sum_{(i,j) \in G} \sum_{0 \leq \beta \leq 1} f_{ij}^\beta \cdot \delta_{(i,j),(\mu,\nu)} \delta_{\alpha,\beta} = f_{\mu\nu}^\alpha, (\mu, \nu) \in G, \\
&0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1.
\end{aligned}$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Оператори $L_n f(x,y)$ є точними на поліномах степеня $2M-2$, які є функціями $h_{ij,\beta}(x,y)$, $(i,j) \in G$, $0 \leq |\beta| \leq 1$:

$$L_n h_{\mu\nu,\gamma}(x,y) = h_{\mu\nu,\gamma}(x,y). \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи властивості (1), можемо записати

$$\begin{aligned}
L_n h_{\mu\nu,\gamma}(x,y) &= \sum_{(i,j) \in G} \sum_{0 \leq \beta \leq 1} D^\beta h_{\mu\nu,\gamma}(X_{ij}, Y_{ij}) \cdot h_{ij,\beta}(x,y) = \\
&= \sum_{(i,j) \in G} \sum_{0 \leq \beta \leq 1} \delta_{\beta,\gamma} \cdot \delta_{(i,j),(\mu,\nu)} \cdot h_{ij,\beta}(x,y) = h_{\mu\nu,\gamma}(x,y), \\
&(\mu, \nu) \in G, 0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1.
\end{aligned}$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Якщо системи вузлів (X_{ij}, Y_{ij}) є регулярними, тобто $X_{ij} = X_i$, $Y_{ij} = Y_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, то $h_{ij,\beta_1\beta_2}(x,y) = h_{i,\beta_1}(x) h_{j,\beta_2}(y)$, де

$$\begin{aligned}
h_{i,\beta_1}(x) &= \frac{(x - X_i)^{\beta_1}}{\beta_1!} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^2 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \right\}_{X_i}^{1-\beta_1}, \\
h_{j,\beta_2}(y) &= \frac{(y - Y_j)^{\beta_2}}{\beta_2!} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (y - Y_p)^2 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (y - Y_p)^{-2} \right\}_{Y_j}^{1-\beta_2},
\end{aligned}$$

Доведення. Якщо $m+n=M$ та $\Gamma_{1i} : x = X_i$, $i = \overline{1, m}$, $\Gamma_{2j} : y = Y_j$, $j = \overline{1, n}$, тобто $A_{ij}(X_i, Y_j) = \Gamma_{1i} \cap \Gamma_{2j}$, то для випадку $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$

$$\begin{aligned}
h_{ij,00}(x,y) &= \frac{(x - X_i)^0 (y - Y_j)^0}{0!0!} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^2 \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^2 \times \\
&\times \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right\}_{A_{ij}}^{(1-0,1-0)},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
& \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^n (y - Y_q)^{-2} \right\}_{A_{ij}}^{(1,1)} = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^m (X_i - X_p)^{-2} \times \\
& \quad \times \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^n (Y_j - Y_q)^{-2} + \\
& \quad + (x - X_i) \frac{\partial}{\partial x} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right)_{A_{ij}} + \\
& \quad + (y - Y_j) \frac{\partial}{\partial y} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right)_{A_{ij}} + \\
& \quad + (x - X_i)(y - Y_j) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right)_{A_{ij}} = \\
& = \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (X_i - X_p)^{-2} + (x - X_i) \left[\frac{\partial}{\partial x} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \right]_{x=X_i} \right\} \times \\
& \quad \times \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (Y_j - Y_q)^{-2} + \\
& \quad + (y - Y_j) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (X_i - X_p)^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right)_{y=Y_j} + \\
& \quad + (x - X_i) \left(\frac{\partial}{\partial x} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \right)_{x=X_i} \times \\
& \quad \times (y - Y_j) \left(\frac{\partial}{\partial y} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right)_{y=Y_j} = \\
& = \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (X_i - X_p)^{-2} + (x - X_i) \left[\frac{\partial}{\partial x} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \right]_{x=X_i} \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (Y_j - Y_q)^{-2} + (y - Y_j) \left[\frac{\partial}{\partial y} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right]_{y=Y_j} \right\} = \\
& = h_{i,0}(x) h_{j,0}(y).
\end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned}
h_{ij\beta_1\beta_2}(x, y) &= \frac{(x - X_i)^{\beta_1}}{\beta_1!} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^2 \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m (x - X_p)^{-2} \right\}_{X_i}^{1-\beta_1} \times \\
& \quad \times \frac{(y - Y_j)^{\beta_2}}{\beta_2!} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^2 \left\{ \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^n (y - Y_q)^{-2} \right\}_{Y_j}^{1-\beta_2} = \\
& = h_{i\beta_1}(x) h_{j\beta_2}(y), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\begin{aligned}
h_{ij10}(x, y) &= h_{i1}(x) h_{j0}(y) \quad h_{ij01}(x, y) = h_{i0}(x) h_{j1}(y) \\
\text{та } h_{ij11}(x, y) &= h_{i1}(x) h_{j1}(y).
\end{aligned}$$

Теорема 4 доведена.

Висновки

Таким чином, в роботі запропоновано загальний метод побудови операторів ермітової інтерполяції диференційовних функцій та її часткових похідних першого порядку і змішаної похідної в точках перетину M непаралельних прямих. Метод використовувався при побудові інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека 3-го та 5-го степенів на трикутнику, які планується використати при побудові математичної моделі вектора прискорення в сейсмічній томографії між свердловинами, якщо цей вектор заданий своїми слідами в точках заданої системи свердловин. Такі сліди можна отримати за допомогою акселерометрів, розміщених на різних глибинах у свердловинах.

Список літератури: 1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. / Л. Коллатц. — М.: Мир., 1969. — 252 с. 2. Литвин О.М. Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетатції функцій. За ред. акад. НАНУ І.В. Сергієнка. / О.М. Литвин, Н.І. Штепа, О.О. Литвин. — Київ: Наукова Думка, 2011. — 228 с. 3. Gasca M. Polynomial interpolation in several variables / M. Gasca, T. Sauer // Advances in Computational Mathematics 0 (2001), 1-40. 4. Матвеева Ю.В. Приближение функций многочленами на треугольной сетке. / Ю.В. Матвеева. Дис. канд. физ.-мат. наук, Саратов 2008. 101 с. 5. Матвеева Ю.В. Об интерполяции кубическими многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных / Ю.В. Матвеева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7. Вып. 1. — С. 28-32. 6. Zlamal M. A finite element procedure of the second order accuracy / M. Zlamal // Numer. Math., 14 (1970), 394-402. 7. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle / A. Zenisek // Numer. Math. 1970. — Vol. 15. — P. 283-296. 8. Zlamal M. Mathematical aspect of the finite element method / M. Zlamal, A. Zenisek // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V. Kolar et. al. eds.) Praha: Acad. VED. 1971. — P. 15-39. 9. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // Math. Comp. 1995. — V. 64. — №211. — P. 929-941. 10. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. / Р. Варга: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 126 с. 11. Bramble J.H. Triangular elements in the finite element method / J.H. Bramble, M. Zlamal // Math. Comp. 1970. — V. 24. — P. 809-820. 12. Babushka I. On the angle condition in the finite element method / I. Babushka, A.K. Aziz // SIAM J. Numer. Anal. 1976. — V. 13. — № 2. — P. 214-226. 13. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции / Ю.Н. Субботин // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 189. — С. 117-137. 14. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ / Ю.Н. Субботин // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург:

УрО РАН, 2005. — V. 11. — № 2. — Р. 120-130. **15. Литвин О.М.** Побудова 2D кубічних інтерполяційних сплайнів класу $C_1(D)$. / О.М. Литвин, О.О. Литвин, О.І. Денисова /Збірник наукових праць Вісник Запорізького національного університету. — 2011. №1. — С. 66-74. **16. Слесаренко А.П.** Математическое моделирование регионального управления образования форм и сложных поверхностей тел. Восточно-европейский журнал передовых технологий. — 2011. № 4/4(52). — С. 52-58. **17. D. Shepard.** Two-Dimensional interpolation function For Irregularly Spaced Data // Proc 23rd Nat. Conf. ACM. — 1968. — Р. 517-524. **18. Литвин О.М.** Формули Тейлора і Даламбера. Інтерлінація функцій. Методика викладання. Рекомендації викладачам і студентам. Київ: УМК ВО, 1990. — 48 с.

Надійшла до редколегії 5.03.2014

УДК 519.6

Полиномиальная эрмитова интерполяция функций 2-х переменных в узлах пересечения системы непараллельных прямых / О.О. Литвин // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2014. — № 1 (82). — С. 23–28.

Предложены явные формулы для операторов полиномиальной эрмитовой интерполяции, интерполирующих функцию, её частные производные первого порядка и смешанную производную в нерегулярно заданной системе узлов. Сформулированы и доказаны теоремы о базисных полиномиальных функциях и их свойствах.

Библиогр.: 18 назв.

UDC 519.6

Hermitian polynomial interpolation functions of 2 variables in the nodes of the intersection of non-parallel lines / O.O. Litvin // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. — 2014. — № 1 (82). — P. 23–28.

Proposed explicit formulas for the operators of Hermite interpolation polynomial interpolating function and its first order partial derivatives and mixed derivative in irregularly given system of nodes. Formulate and prove theorems on the basis of polynomial functions and their properties.

Ref.: 18 items.