

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Блишун А.П.

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. Сидоров М.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)

E-mail: alexander.blishun@gmail.com

The flat stationary filtration flow with free boundary is considered. According *R*-function method (RFM) the general solution structure (GSS) was built. The free boundary equation was approached by iterative procedure. Numerical solution was built for a free-boundary problem with known exact solution.

В последние десятилетия наблюдается катастрофическое снижение естественной дренажности и устойчивый подъем уровня грунтовых вод, что приводит к подтапливанию аграрных, городских и др. ландшафтов. Наиболее распространенные методы математического моделирования фильтрационных течений используют методы теории функций комплексного переменного. Однако эти методы часто труднореализуемы в областях сложной геометрии. Еще больше вычислительных сложностей возникает, если область фильтрации содержит участки свободной поверхности. Целью настоящего исследования является разработка на основе метода *R*-функций [1] нового метода решения краевых задач теории фильтрации со свободной границей, который бы точно учитывал всю имеющуюся аналитическую и геометрическую информацию задачи. Применение метода *R*-функций в задачах фильтрации в областях с фиксированной границей изложено в работах [2, 3].

Рассмотрим случай двухмерного несжимаемого установившегося потока через ортотропный грунт в области Ω , для которого закон Дарси может быть записан следующим образом: $v_1 = -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $v_2 = -k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2}$. Здесь u – напор, k_{11} , k_{22} – коэффициенты фильтрации, v_1 , v_2 – компоненты скорости потока. Уравнение неразрывности для такого потока имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (1)$$

Граничные условия задачи таковы:

$$u = \bar{u} \quad \text{на } \partial\Omega_1; \quad v_n = - \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \alpha_{n1} + k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \alpha_{n2} \right) = \bar{v}_n \quad \text{на } \partial\Omega_2, \quad (2)$$

где $\bar{v}_n$ – скорость, направленная по нормали к границе, α_{n1} и α_{n2} – направляющие косинусы нормали с осями Ox_1 и Ox_2 , $\partial\Omega_1$ – непроницаемая часть

границы, $\partial\Omega_2$ – проницаемая часть границы.

Пусть в пористом грунте образуется свободная поверхность $\partial\Omega_*$ фильтрующейся жидкости, называемая обычно поверхность депрессии. Точное положение этой поверхности неизвестно и её определение составляет одну из частей общего решения. С этой целью используется условие: в любой точке свободной поверхности полный потенциальный напор u равен напору H , соответствующему геометрическому возвышению свободной поверхности над плоскостью сравнения (атмосферное давление принимается равным нулю). Это приводит к тому, что на участке свободной поверхности задается дополнительное, так называемое «геометрическое условие» (или «кинематическое условие»)

$$u = \xi(s) \text{ на } \partial\Omega_*, \quad (3)$$

где ξ означает заданный напор на подземном контуре гидросооружения.

Отметим, что наличие свободного участка границы области фильтрации делает краевую задачу (1), (2) нелинейной.

В соответствие с методом R -функций [1] построена полная структура решения краевой задачи (1) – (3), удовлетворяющая краевым условиям (2). Аппроксимацию неопределенных компонент предлагается произвести по методу Ритца с представлением их в виде линейной комбинации финитных сплайнов Шенберга. Для итерационного уточнения уравнения свободной границы построен алгоритм, основанный на использовании точечного метода наименьших квадратов и условия (3).

Вычислительный эксперимент был проведен для модельной задачи с известным точным решением. Сходимость с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ достигнута на 7-й итерации. Сравнение с точным решением показало, что в средне-квадратической норме погрешность составила $0,12 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, для краевой задачи теории фильтрации со свободной границей в работе впервые получена структура решения и предложен алгоритм уточнения уравнения свободной границы. Предложенные в работе методы можно использовать при проектировании различных гидротехнических сооружений, в частности, для предотвращения последствий паводков.

1. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. – К., Наук. думка, 1982. – 552 с.

2. Сидоров М.В., Стороженко А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. 2004. №4. С. 58 – 61.

3. Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R -функций // Радиоэлектроника и информатика. 2010. № 2. С. 40 – 46.